Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Две теоремы о параметре сходимости для неприводимой марковской цепи, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 1, 200–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:57:17

2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
3. Ширяев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
4. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
5. Beibel M., Lerche H. R. A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance. — Statist. Sinica, 1997, v. 7, № 1, p. 93–108.
6. Ekström E., Lindberg C. Optimal closing of a momentum trade. — J. Appl. Probab. (to appear).
7. Feinberg E. A., Shiryaev A. N. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. — Statist. Decisions, 2006, v. 24, № 4, p. 445–470.
8. Gapeev P. V., Peskir G. The Wiener disorder problem with finite horizon. — Stochastic Process. Appl., 2006, v. 116, № 12, p. 1770–1791.
9. Matsumoto H., Yor M. Exponential functionals of Brownian motion. I: Probability laws at fixed time. — Probab. Surv., 2005, v. 2, p. 312–347.
10. Shiryaev A., Novikov A. A. On a stochastic version of the trading rule «Buy and Hold». — Statist. Decisions, 2008, v. 26, № 4, p. 289–302.

Поступила в редакцию
13.XII.2012

© 2013 г.

ШУР М. Г.*

ДВЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПАРАМЕТРА СХОДИМОСТИ НЕПРИВОДИМОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Рассматривается однородная неприводимая цепь Маркова X с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$ и переходным оператором P , действующим в пространстве ограниченных снизу измеримых функций, причем σ -алгебра $\mathcal{B}$ считается счетнопорожденной. Доказывается, что если эта цепь апериодична, а какие-либо функция f и мера ν малы для нее, то $[\nu(P^n f)]^{1/n} \rightarrow R$ при $n \rightarrow \infty$, где R — ее параметр сходимости. Для периодических цепей Маркова это утверждение модифицируется соответствующим образом. Если же цепь X симметрична относительно некоторой σ -конечной меры π , то $R = \|\tilde{P}\|^{-1}$, где $\tilde{P}$ — ограниченный самосопряженный оператор, порожденный P и действующий в пространстве $L_2(\pi)$. Результаты работы развивают приведенные в [4] и [5].

Ключевые слова и фразы: неприводимая цепь Маркова, симметричная цепь Маркова, параметр сходимости.

1. В этой заметке, дополняющей работы [4] и [5], приведены теоремы 1 и 2, связанные с важнейшей характеристикой неприводимой цепи Маркова — ее параметром сходимости. По поводу терминологии см. монографию [1].

Далее под X подразумевается некоторая однородная цепь Маркова $X = \{X_n; n \geq 0\}$ с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$, стохастической переходной вероятностью $p(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и переходным оператором P , действующим в пространстве $\mathcal{D}$ ограниченных снизу $\mathcal{B}$ -измеримых функций. В теореме 1, постулировав неприводимость и апериодичность X , мы при широких условиях устанавливаем равенство

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{[\nu(P^n f)]^{1/n}\}, \quad (1)$$

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.

где R — параметр сходимости цепи, малая (для X) функция f и малая мера ν выбраны произвольно, а содержащееся в квадратных скобках выражение обозначает интеграл $\int P^n f d\nu$. Здесь отметим, что параметр R можно определить с помощью равенства

$$R = \inf\{\alpha > 0: \sum_{n \geq 1} \alpha^n P^n f \equiv \infty \text{ для всех } f \in S\},$$

в котором S — совокупность всех малых функций, а нижняя грань пустого множества приравнивается к ∞ (см. [5]); эквивалентное определение см. в [1]. Ранее соотношение (1) отмечалось лишь при $R = 1$ [4; следствие 5], правда в последнем случае соответствующий запас функций f был богаче. Ситуация с периодическими цепями отражена в следствии 1.

Пусть теперь цепь X симметрична относительно некоторой меры π , заданной на $\mathcal{B}$ (иными словами, $\pi(gPf) = \pi(fPg)$ для всех $f, g \geq 0$ из $\mathcal{D}$). Тогда эта мера инвариантна для цепи, и в силу стандартных соображений (см., например, [3; лемма 3]) существует ограниченный самосопряженный линейный оператор $\tilde{P}$, действующий в обычном пространстве $L_2(\pi)$ (неважно, вещественном или комплексном), который порождается оператором P в понятном смысле: если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$ берутся из одного и того же класса эквивалентности $\varphi \in L_2(\pi)$, то $Pf_1, Pf_2 \in \tilde{P}\varphi$. Наша теорема 2 утверждает, что

$$\|\tilde{P}\| = R^{-1} \quad (2)$$

при надлежащих условиях, гарантирующих, разумеется, неприводимость X и существование R . При доказательстве этой теоремы используется, в частности, равенство (1). Аналог теоремы 2, применимый к определенному семейству марковских цепей на локально компактных пространствах, был опубликован в [5; теорема 4]. Теорема 2 и ее аналог позволяют включить в более широкий контекст хорошо известное равенство $\|\tilde{P}\| = 1$, справедливое для обширного класса симметричных случайных блужданий на аменабельных локально компактных группах и к тому же служащее существенным атрибутом теории групп такого типа [2; теоремы 4.19 и 4.20].

2. Перейдем к изложению результатов заметки, причем всюду далее *предположим σ -алгебру $\mathcal{B}$ счетнопорожденной*.

Теорема 1. *Если цепь Маркова X неприводима и аperiodична, то равенство (1) применимо при любом выборе малой функции f и малой меры ν .*

Доказательство неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\nu(P^n f)^{1/n}\} \geq R^{-1} \quad (3)$$

напоминает доказательство следствия 5 из [4]. В самом деле, при любом $t \in (0, R^{-1})$ множества $A_n = \cap_{m \geq n} \{x \in E: P^m f(x) > t^m\}$ с ростом $n \geq 1$ не убывают, а поскольку по теореме 4 из [4]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(P^n f)^{1/n}] \geq R^{-1}$$

всюду в E , их объединение совпадает с E . Следовательно,

$$\nu(P^n f) \geq \nu(1_{A_n} P^n f) \geq t^n \nu(A_n) \geq \frac{1}{2} t^n \nu(E)$$

при всех достаточно больших n , где 1_{A_n} — функция-индикатор множества A_n . Отсюда и вытекает (3), так как t можно выбрать сколь угодно близким к R^{-1} .

Остается убедиться в том, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\nu(P^n f)^{1/n}\} \leq R^{-1}. \quad (4)$$

Для этого, исходя из определения малой меры [1], подберем натуральное m , положительное β и малую функцию g так, чтобы для переходной вероятности $p_m(\cdot, \cdot)$ за m шагов иметь $p_m(x, \cdot) \geq \beta g(x) \nu(\cdot)$ при всех $x \in E$, и затем воспользуемся очевидным неравенством

$$[\beta g(x) \nu(P^n f)]^{1/n} \leq [P^{m+n} f(x)]^{1/n}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

На основании все той же теоремы 4 из [4] можно найти точку $x \in E$ в которой $g(x) > 0$ и правая часть (5) стремится к R^{-1} при $n \rightarrow \infty$, после чего (4) выводится из (5) посредством предельного перехода с $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В следствии 1 мы предложим вариант теоремы 1 для случая периодических цепей Маркова. С этой целью, рассматривая неприводимую цепь X с периодом $d \geq 2$ и параметром сходимости R , выделим какой-либо ее d -цикл $(E_0, E_1, \dots, E_{d-1})$ в смысле [1]. Участвующие здесь множества E_i обычно называют циклическими классами данной цепи; каждое из них является поглощающим для цепи Маркова с переходным оператором P^d , а их объединение $\bar{E}$ — поглощающим для X . Согласно [1; предложение 2.8], каковы бы ни были малые для X функция f и мера ν , найдутся такие целые $i = i_f$ и $j = j_\nu$, что $f = 0$ на E_k и $\nu(E_m) = 0$ всякий раз, когда $k \neq i$ и $m \neq j$ соответственно, где i, j, k, m принимают значения $0, 1, \dots, d-1$.

Сохраняя условия, указанные в начале предыдущего абзаца, и только что введенные обозначения, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Если функция f и мера ν являются малыми для X , то

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{[\nu(P^{nd+i-j}f)]^{1/nd}\} \quad (6)$$

с $i = i_f$ и $j = j_\nu$.

Доказательство. Наделим E_0 σ -алгеброй $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B}: A \subset E_0\}$ и образуем цепь Маркова $\mathcal{X}$ с пространством состояний $(E_0, \mathcal{B}_0)$ и переходным оператором $\mathcal{P}$, отвечающим сужению $p_d(\cdot, \cdot)$ на $(E_0, \mathcal{B}_0)$. Согласно [1; предложения 2.9 и 3.5] эта цепь неприводима, апериодична и имеет параметр сходимости R^d . В силу замечания 2.1(i) из [1] мера νP^{d-j} сосредоточена на E_0 , и, отождествив ее с ее сужением на $\mathcal{B}_0$, мы видим, что она мала для $\mathcal{X}$. В свою очередь, сужение $\widetilde{P^i f}$ на E_0 функции $P^i f$ является малой функцией для $\mathcal{X}$. Поэтому, применив теорему 1 к $\mathcal{X}$, получаем, что

$$\{\nu P^{d-j}[\mathcal{P}^n(\widetilde{P^i f})]\}^{1/n} \rightarrow R^{-d},$$

когда $n \rightarrow \infty$. Снова вспомнив, что мера νP^{d-j} сосредоточена на E_0 , заменяем выражение в квадратных скобках на $P^{nd}(P^i f)$, а затем и на $P^{nd}(P^i f) = P^{nd+i}f$, что и влечет (6).

Займемся рассмотрением вопросов, связанных с соотношением (2). Следующая лемма является улучшенным вариантом леммы 5 из [3] и к тому же ее доказательство короче. Далее положим

$$G(\cdot, A) = \sum_{n \geq 1} p_n(\cdot, A) \quad \text{и} \quad A^+ = A \cup \{x \in E: G(x, A) > 0\} \quad \text{для} \quad A \in \mathcal{B}.$$

Лемма 1. Пусть цепь Маркова X неприводима и симметрична относительно некоторой σ -конечной меры π , заданной на $\mathcal{B}$. Тогда любая максимальная мера неприводимости ν этой цепи эквивалентна π , и, следовательно, π сама является максимальной мерой неприводимости.

Доказательство. В силу симметричности нашей цепи

$$\int_B G(x, A) d\pi = \int_A G(x, B) d\pi \quad (7)$$

для $A, B \in \mathcal{B}$. Отсюда при $B = E$ и $\pi(A) = 0$ видно, что $G(\cdot, A) = 0$ π -п.в. (т.е. π -почти всюду), и поэтому $\nu(A) = 0$ в силу выбора ν . Вывод: мера ν абсолютно непрерывна относительно π .

Пусть теперь $\nu(B) = 0$ для некоторого $B \in \mathcal{B}$. Ввиду предложений 2.2 и 2.4 из [1] $\nu(B^+) = 0$ и множество $A = E \setminus B^+$ либо пусто, либо является поглощающим, так что $G(\cdot, B^+) = 0$ всюду в A . В случае пустого A оказалось бы $\nu(B^+) = \nu(E) \neq 0$, а это несовместимо с равенством $\nu(B^+) = 0$. Таким образом, множество A должно быть поглощающим. Поэтому $\nu(A) > 0$ и $G(\cdot, A) > 0$ в E , вследствие чего (7) с B^+ в роли B показывает, что $\pi(B^+) = 0$ и тем более $\pi(B) = 0$, так как $B \subset B^+$. Последнее равенство устанавливает абсолютную непрерывность π относительно ν , и доказательство завершено.

В дальнейшем при рассмотрении пространства $L_2(\pi)$ каждый класс эквивалентности, являющийся элементом этого пространства, будет, как обычно, отождествляться с подходящим представителем этого класса. Норма $\|f\|$ для $f \in L_2(\pi)$ определяется традиционным образом.

Лемма 2. Пусть реализуются предположения из первой фразы леммы 1. Тогда как в случае вещественного, так и в случае комплексного $L_2(\pi)$ для оператора $\tilde{P}$ (см. п. 1) справедливо равенство

$$\|\tilde{P}\| = \sup_{f \in S} \frac{\|Pf\|}{\|f\|}, \quad (8)$$

где S — семейство всех функций, малых для X .

Доказательство. Пусть $f \in S$, а функция $g \geq 0$ суммируема по π и $\pi(g) > 0$. Тогда $f \leq aP^m g$ при соответствующих $a > 0$ и $m \geq 1$ [1; предложение 2.7], откуда ввиду инвариантности меры π следует суммируемость $P^m g$ и f , а затем и f^2 по мере π , так как функция f ограничена. Итак, $S \subset L_2^+(\pi)$, где $L_2^+(\pi) = \{f \in L_2(\pi): f \geq 0 \text{ п.в.}\}$.

С этого момента и до специального указания цепь X предполагается апериодической. Зададим $A \in \mathcal{B}$ с $\pi(A) < \infty$. По предыдущей лемме и предложению 2.11 (iv) из [1] найдутся такие малые множества $A_n, n \geq 1$, и множество $B \in \mathcal{B}$ с $\pi(B) = 0$, что $A = B \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$, причем без ограничения общности можно также потребовать, чтобы $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ (иначе набор $\{A_1, A_2, \dots\}$ следовало бы заменить на $\{A_1, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots\}$). Поэтому $\|1_A - 1_{A_n}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и, поскольку $1_{A_n} \in S, n \geq 1$, то функция 1_A принадлежит замыканию в $L_2(\pi)$ множества S . Этот вывод немедленно распространяется на любую функцию из $L_2^+(\pi)$ с конечным множеством значений, а затем и на прочие функции из $L_2^+(\pi)$. Тем самым обнаружено, что S является плотным в $L_2^+(\pi)$.

Переходя к непосредственному доказательству равенства (8), начнем со случая вещественного $L_2(\pi)$. Согласно уже доказанному $q \leq \|\tilde{P}\|$, где q приравнено правой части (8), так что нам достаточно вывести неравенство

$$\|\tilde{P}f\| \leq q\|f\| \quad (9)$$

для $f \in L_2(\pi)$. Если $f \in L_2^+(\pi)$, то, отождествив $\tilde{P}f$ и Pf и приняв во внимание ограниченность оператора $\tilde{P}$, легко получить (9) из доказанного в предыдущем абзаце. Если же $f \in \mathcal{D}$ суммируема с квадратом по π , то

$$\|\tilde{P}f\|^2 = \int |Pf|^2 d\pi \leq \int (P\varphi)^2 d\pi \leq q^2 \|\varphi\|^2 = q^2 \|f\|^2,$$

где $\varphi = |f|$ и применено (9) с φ в роли f с учетом принадлежности φ к $L_2^+(\pi)$. Таким образом, (9) распространено на функции $f \in \mathcal{D}$ указанного вида. Отсюда без труда выводится (9), а с ним и (8) в требуемой сейчас общности.

Отправляясь от уже установленного, нетрудно получить (9), а затем и (8) для функций из комплексного $L_2(\pi)$.

Остается разобрать случай периодической цепи X ; при этом ради определенности пространство $L_2(\pi)$ будем считать комплексным. В соответствии с условиями леммы наша цепь имеет период $d = 2$ [3; следствие 3], и поэтому по аналогии с ранее изложенным для нее можно выделить 2-цикл (E_0, E_1) . Положим $S_i = \{f \in S: f = 0 \text{ п.в. вне } E_i\}$, $L_i = \{f \in L_2(\pi): f = 0 \text{ п.в. вне } E_i\}$ и $L_i^+ = \{f \in L_i: f \geq 0 \text{ п.в.}\}$ (до конца доказательства всюду $i = 0$ или 1). При любом из наших i соответствующие изменения в предыдущем показывают, что S_i плотно в L_i , что

$$\sup_{f \in L_i^+} \frac{\|\tilde{P}f\|}{\|f\|} = \sup_{f \in S_i} \frac{\|Pf\|}{\|f\|} \leq q$$

с прежним q и что, следовательно, справедливо (9) для $f \in L_i$. В то же время каждая функция $f \in L_2(\pi)$ п.в. равна $f_0 + f_1$, где $f_i = 1_{E_i} f \in L_i$. При этом согласно

определению L_i функции f_0 и f_1 ортогональны в $L_2(\pi)$ друг другу, и тем же свойством обладают функции $\tilde{P}f_0$ и $\tilde{P}f_1$. Отсюда

$$\|\tilde{P}f\|^2 = \|\tilde{P}f_0\|^2 + \|\tilde{P}f_1\|^2 \leq q^2(\|f_0\|^2 + \|f_1\|^2) = q^2\|f\|^2, \quad (10)$$

поскольку допустимо использовать (9) с f_i вместо f . Итак, мы вновь пришли к (9) для $f \in L_2(\pi)$, что, как и прежде, влечет (8). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение леммы 2 применимо к любой цепи Маркова, для которой существует субинвариантная мера неприводимости π_1 . Действительно, в этой ситуации корректно определен оператор $\tilde{P}$ [3; лемма 3] и π_1 является максимальной мерой неприводимости [1; предложение 2.4 (ii)], что позволяет повторить предшествующее доказательство с небольшими естественными изменениями (например, вместо только что рассмотренного 2-цикла придется иметь дело с некоторым d -циклом, где d — период рассматриваемой цепи).

Теорема 2. Если цепь Маркова X неприводима и симметрична относительно некоторой σ -конечной меры π , заданной на $\mathcal{B}$, то имеет место равенство (2) в случаях как комплексного, так и вещественного $L_2(\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала предположим цепь X апериодической. Пусть $f \in S$ и, следовательно, $f \in L_2(\pi)$ (см. лемму 2). Воспользовавшись соотношениями (11) из [3], заключаем, что существует $b_f = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|P^n f\|^{1/n})$ и что

$$\|f\|^{-1} \|Pf\| \leq b_f \leq \|\tilde{P}\|. \quad (11)$$

Если g — еще одна малая функция, а числа a и m связаны с f и g так же, как в начале доказательства леммы 2, то

$$b_f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|aP^{n+m}g\|^{1/n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|P^{n+m}g\|^{1/n}) = b_g$$

и аналогично $b_g \leq b_f$, т.е. $b_f = b_g$. Иначе говоря, значение b_f не зависит от выбора $f \in S$, и далее под b подразумевается общее значение b_f для $f \in S$.

На основании леммы 2 величину $\|f\|^{-1} \|Pf\|$ за счет выбора $f \in S$ можно сделать сколь угодно близкой к $\|\tilde{P}\|$, а это вместе с (11) влечет совпадение b с $\|\tilde{P}\|$. Другими словами,

$$\|P^n f\|^{1/n} \rightarrow \|\tilde{P}\| \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$, какова бы ни была функция $f \in S$. В то же время ввиду теоремы 2.1 из [1] малую функцию f можно выбрать так, чтобы мера ν , абсолютно непрерывная относительно π и обладающая плотностью $d\nu/d\pi = f$, также была малой. В этом случае

$$\|P^n f\|^2 = \int f P^{2n} f d\pi = \nu(P^{2n} f)$$

в силу самосопряженности оператора $\tilde{P}$. Таким образом, левая часть (12) должна стремиться к тому же значению, что и $[\nu(P^{2n} f)]^{1/2n}$, т.е. к R^{-1} (см. (1)). Отсюда и из (12) вытекает равенство (2).

Теперь освободимся от предположения об апериодичности цепи X . Пусть она имеет период $d = 2$ (как отмечалось в предыдущем доказательстве, значения $d > 2$ исключены). Следуя доказательству следствия 1, рассмотрим некоторый 2-цикл (E_0, E_1) , прежнюю σ -алгебру $\mathcal{B}_0$ на $\mathcal{E}_0$ и цепь Маркова $\mathcal{X}$ на $(E_0, \mathcal{B}_0)$ с переходным оператором $\mathcal{P}$, определяемым по старому образцу, но при теперешнем значении $d = 2$. Согласно ранее сказанному эта цепь неприводима и имеет параметр сходимости R^2 . Кроме того, она симметрична относительно сужения π на $\mathcal{B}_0$, так как в силу симметричности исходной цепи

$$\int_{E_0} g \mathcal{P} f d\pi = \int g P^2 f d\pi = \int f P^2 g d\pi = \int_{E_0} f \mathcal{P} g d\pi$$

для ограниченных $f, g \geq 0$ из $L_2(\pi)$, обращающихся в 0 вне E_0 . Образует также новую цепь Маркова с пространством состояний $(E_1, \mathcal{B}_1)$ и переходным оператором $\mathcal{Q}$, аналогичную цепи $\mathcal{X}$, где $\mathcal{B}_1 = \{A \in \mathcal{B} : A \subset E_1\}$. Новая цепь тоже неприводима

и имеет параметр сходимости R^2 . К тому же она симметрична относительно сужения π на $\mathcal{B}_1$.

Ввиду уже проведенной части доказательства

$$\|\widetilde{\mathcal{P}}\| = \|\widetilde{\mathcal{Q}}\| = R^{-2}, \quad (13)$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}$ — операторы, порожденные $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно в $L_2(\pi_0)$ и $L_2(\pi_1)$ (ср. с определением $\tilde{P}$), а π_0 и π_1 — сужения π на $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$. Для $f \in L_2(\pi)$ приравняем $\widetilde{\mathcal{P}}f$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}f$ к $\widetilde{\mathcal{P}}f_0$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}f_1$ соответственно, где f_i — сужение f на $E_i, i = 0, 1$, получив тем самым возможность далее трактовать $\widetilde{\mathcal{P}}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}$ как операторы, действующие в $L_2(\pi)$. Множество $E_0 \cup E_1$ является поглощающим для X , и поэтому $\pi(E \setminus (E_0 \cup E_1)) = 0$ в соответствии с леммой 1. Отсюда вытекает, что $\tilde{P}^2 = \widetilde{\mathcal{P}} + \widetilde{\mathcal{Q}}$. Кроме того, функции $\widetilde{\mathcal{P}}f_0$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}f_1$ ортогональны друг другу в $L_2(\pi)$. Теперь, учитывая (13), по аналогии с (10) находим

$$\|\tilde{P}^2 f\| = \|\widetilde{\mathcal{P}}f_0\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{Q}}f_1\|^2 \leq R^{-2}(\|f_0\|^2 + \|f_1\|^2) = R^{-2}\|f\|^2$$

для $f \in L_2(\pi)$ (здесь подразумевается, что недавно введенным функциям f_0 и f_1 приписано значение 0 в $E \setminus E_0$ и $E \setminus E_1$ соответственно). Таким образом, $\|\tilde{P}\|^2 = \|\tilde{P}^2\| \leq R^{-2}$, где знак равенства обусловлен самосопряженностью оператора $\tilde{P}$ [6; задача 162]. На самом деле, последнее неравенство является равенством, так как $\|\tilde{P}\| \geq R^{-1}$ [5; предложение 1], что и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nummelin E. General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984, 187 p.
2. Paterson A. T. Amenability. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988, 452 p.
3. Шур М. Г. Предельные теоремы для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами и симметричными цепями Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 268–288.
4. Шур М. Г. Об условии Лина в сильных предельных теоремах для отношений. — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 6, с. 927–940.
5. Шур М. Г. Параметр сходимости, ассоциированный с цепью Маркова и семейством функций. — Матем. заметки, 2010, т. 87, в. 2, с. 294–304.
6. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970, 352 с.

Поступила в редакцию
19.XII.2011