Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Афанасьева, А. В. Ткаченко, Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 210–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:26:06

© 2013 г. АФАНАСЬЕВА Л. Г.* , ТКАЧЕНКО А. В.**

**МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
С РЕГЕНЕРИРУЮЩИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ¹⁾**

Рассматривается многоканальная система обслуживания с неидентичными приборами и регенерирующим входящим потоком. Установлено необходимое и достаточное условие эргодичности, доказаны функциональные предельные теоремы при высокой и сверхвысокой загрузке. Как следствие получено условие эргодичности систем с ненадежными приборами. Предложенные подходы используются для доказательства эргодической теоремы для систем с ограничениями. Рассматриваются также иерархические сети систем обслуживания.

Ключевые слова и фразы: многоканальная система обслуживания, регенерирующий поток, эргодичность, стохастическая ограниченность.

Введение. Изучению многоканальных систем обслуживания посвящено большое количество работ. В значительной мере это связано с широким кругом приложений в самых различных областях: компьютерные системы, коммуникационные сети, супермаркеты, аэропорты и т.д. (см., например, [30], [6], [10], [23], [29], [25]). Одна из важнейших проблем теории очередей — выяснение условий существования предельных распределений (условий стабильности) процессов, описывающих функционирование систем обслуживания. В работах [23], [10] установлено, что эти процессы для многоканальной системы стабильны, если интенсивность поступления требований меньше суммарной интенсивности обслуживания, когда все приборы заняты. При этом предполагается, что интервалы между поступлениями требований и времена обслуживания образуют стационарную метрически транзитивную двумерную последовательность и приборы одинаковы. В такой ситуации введенный в [23] r -мерный случайный процесс $\vec{W}_n$ обладает свойством стохастической монотонности, т.е. если $\vec{W}_1 = 0$ и $F_n(x) = \mathbf{P}\{\vec{W}_n \leq x\}$, то $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$.

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: afanas@mech.math.msu.su

**Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», кафедра математической экономики и эконометрики; tkachenko.av.87@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00653).

Отсюда следует сходимость последовательности $F_n(x)$ при нулевых начальных условиях. Подобный подход можно применить и к системам с ограничениями, обладающим указанным свойством монотонности [1]. Однако для доказательства стабильности при общих начальных условиях требуются дополнительные предположения (см., например, [8, гл. 4, § 6]).

В настоящей статье рассматривается система $G|G|r$ с регенерирующим входящим потоком и различными приборами, т.е. каждый прибор имеет свою функцию распределения времени обслуживания. Класс таких потоков весьма широк и включает в себя значительную часть процессов, обычно используемых в теории очередей (см., например, [15]). Кроме того, эти потоки обладают рядом полезных свойств. В частности, при определенных условиях можно установить слабую сходимость последовательности, состоящей из временных интервалов между поступлениями требований, к стационарной. Это позволяет на основе упомянутых выше результатов для систем со стационарной управляющей последовательностью доказать условия стабильности при регенерирующем потоке, когда все приборы идентичны. При неидентичных приборах этого сделать не удастся, так что анализ стабильности системы требует других подходов.

Цель предпринятого исследования — получение достаточно простого доказательства условия эргодичности такой многоканальной системы. При этом используются классические результаты теории восстановления, а также предельные теоремы для систем с различными приборами и рекуррентным входящим потоком, доказанные в [22]. Предложенный подход потребовал выполнения некоторых дополнительных условий, обеспечивающих возможность применения теоремы Смита [31]. Эти условия достаточно естественны, легко проверяются и обычно выполняются в моделях, важных для приложений [30]. Без них асимптотический анализ системы существенно усложняется. Вместо методов, опирающихся на классическую регенерацию, приходится использовать другие подходы, основанные, например, на таких понятиях, как период обновления [19], слабая регенерация [17] или обновляющие события [8]. При этом таких законченных результатов относительно условий эргодичности, как для одноканальных систем, насколько нам известно, пока получить не удалось.

Отметим также работу [27], в которой в качестве точек регенерации входящего потока могут выступать только моменты прихода требований в систему. Класс таких потоков существенно уже рассмотренных в предлагаемой статье. Например, полумарковский поток или дважды стохастический пуассоновский поток с произвольной случайной интенсивностью, представляющей собой регенерирующий процесс, не будут регенерирующими в смысле определения, данного в [27]. Кроме того,

в [27] установлено лишь достаточное условие эргодичности.

Работа организована следующим образом. В первом разделе дается определение регенерирующего потока и отмечаются некоторые его асимптотические свойства. Приводятся примеры различных потоков, используемых в теории очередей, которые являются регенерирующими. Во втором разделе доказывается теорема об эквивалентности условий стохастической ограниченности и эргодичности для достаточно общей модели обслуживания. В следующем разделе для системы с регенерирующим входящим потоком и неидентичными приборами находится необходимое и достаточное условие эргодичности, выраженное через параметры системы. В качестве процесса, характеризующего систему, выбирается многомерный процесс, определяющий остаточную работу для каждого прибора. Здесь же указываются предельные распределения числа требований в системе при высокой (коэффициент загрузки $\rho = 1$) и сверхвысокой ($\rho > 1$) загрузках. В заключительном разделе рассматриваются многоканальные системы с регенерирующим входящим потоком и ненадежными приборами, системы с ограниченным временем ожидания (пробеживания) требований в системе, а также иерархические сети.

1. Регенерирующий поток. Определение, примеры и свойства. Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ определен случайный процесс $X(t)$, принимающий целочисленные значения и имеющий непрерывные слева неубывающие траектории, $X(0) = 0$. Такой процесс будем называть потоком.

О п р е д е л е н и е 1. Поток $X(t)$ является регенерирующим, если существует возрастающая последовательность случайных величин $\{\theta_i, i \geq 0\}$, $\theta_0 = 0$, такая, что последовательность $\{\varkappa_i\}_{i=1}^\infty = \{X(\theta_{i-1} + t) - X(\theta_{i-1}), \theta_i - \theta_{i-1}, t \in [0, \theta_i - \theta_{i-1})\}_{i=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$.

Случайную величину θ_i назовем i -м моментом (точкой) регенерации, а $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ — i -м периодом регенерации ($i = 1, 2, \dots$). Пусть $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$ — число требований, поступивших в систему за i -й период регенерации. Предположим, что $\mu = \mathbf{E} \tau_i < \infty$, $a = \mathbf{E} \xi_i < \infty$. Тогда существует $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (X(t)/t) = a/\mu$ почти наверное и λ — интенсивность входящего потока.

Значительная часть потоков, обычно используемых в теории массового обслуживания, являются регенерирующими. Прежде всего, к этому классу относится дважды стохастический пуассоновский поток (ДСПП), у которого случайная интенсивность — регенерирующий процесс [21]. Напомним определение, приведенное в [21]. Если $X^*(t)$ — стандартный пуассоновский процесс, а $\Lambda(t)$ — не зависящий от него неотрицательный случайный процесс с неубывающими траекториями, то ДСПП получается случайной заменой времени: $X(t) = X^*(\Lambda(t))$. В случае, когда

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy$, где $\lambda(y)$ — неотрицательный случайный процесс, $\lambda(t)$ называется случайной интенсивностью ДСПП. Если $\lambda(t)$ — регенерирующий процесс с последовательностью моментов регенерации $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ (см., например, [12]), то $X(t)$ — регенерирующий поток в смысле определения 1 и $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ — его точки регенерации. Например, для марковски модулированного потока [17]

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{I}(u(t) = i),$$

где $u(t)$ — управляющая цепь Маркова, а λ_i — интенсивность пуассоновского процесса, когда $u(t)$ находится в состоянии i . В качестве точек регенерации потока $X(t)$ можно взять моменты попадания $u(t)$ в некоторое фиксированное состояние. Также точками регенерации являются моменты скачков $X(t)$, когда $u(t)$ находится в фиксированном состоянии. При этом $X(t)$ будет регенерирующим и в смысле определения, предложенного в [27]. Другие примеры регенерирующих потоков (полумарковский, полумарковский марковски модулированный) приведены в [15]. Эти потоки, вообще говоря, не являются ДСПП и не будут регенерирующими в смысле определения, данного в [27], отличающегося от определения 1 тем, что в качестве θ_n (точек регенерации) могут выступать только моменты t_n прихода требований в систему.

Заметим, что регенерирующий поток по сути может рассматриваться как регенерирующий процесс с неубывающими траекториями (см. [12]).

Регенерирующий поток обладает рядом полезных свойств. Остановимся на некоторых из них, которые будут использованы в дальнейшем.

1. Обозначим t_n момент поступления n -го требования. Тогда $\zeta_n = t_n - t_{n-1}$ — интервал между поступлениями n -го и $(n-1)$ -го требований. Пусть $d = \text{Н.О.Д.}\{j: \mathbf{P}\{\xi_n = j\} > 0\}$. При $d = 1$ имеет место слабая сходимость $\mathbf{P}\{\zeta_n \leq x\} \rightarrow G(x)$ и $\mathbf{E}\zeta_n \rightarrow \lambda^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Доказательство опирается на основную теорему восстановления для непериодических решетчатых случайных процессов восстановления (см., например, [4]). Далее условие $d = 1$ предполагается выполненным.

2. Если $\mathbf{E}\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $\mathbf{E}\tau_1^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то на любом конечном интервале $[0, v]$ нормированный случайный процесс

$$\hat{X}(t) = \frac{X(tT) - \lambda tT}{\sigma_X \sqrt{T}} \quad (1.1)$$

С-сходится при $T \rightarrow \infty$ к стандартному винеровскому процессу. Здесь

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\mu} + \frac{a^2 \sigma_\tau^2}{\mu^3} - \frac{2ar_{\xi\tau}}{\mu^2}, \quad (1.2)$$

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{D}\xi_1, \quad \sigma_\tau^2 = \mathbf{D}\tau_1, \quad r_{\xi\tau} = \text{cov}(\xi_1, \tau_1).$$

Кроме того, имеет место C -сходимость $(X(tT) - \lambda tT)T^{-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Доказательство этих утверждений опирается на теоремы 1 и 2 из [8, гл. 1, § 1] для общих процессов восстановления. Оно исходит из представления

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j + \tilde{\xi}(t),$$

где $N(t) = \max\{k: \theta_k \leq t\}$, а $\tilde{\xi}(t)$ — приращение $X(t)$ в интервале $[\theta_{N(t)}, t)$. Основное отличие от теорем 1 и 2 в [8] заключается в том, что случайные величины ξ_k и τ_k для общего регенерирующего потока зависимы. Это, однако, не вносит существенных изменений в доказательство. Нужно только добавить в нормирующий коэффициент член $r_{\xi\tau}$ и установить C -сходимость

$$\frac{\tilde{\xi}(tT)}{\sqrt{T}} = \frac{X(tT) - \sum_{j=1}^{N(tT)} \xi_j}{\sqrt{T}} \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Это делается с помощью оценок, аналогичных приведенным в [3].

3. Пусть $p \in (0, 1]$ и $X^p(t)$ — процесс, полученный из $X(t)$ операцией просеивания (разрежения). Для ординарного потока $X(t)$ это означает, что каждый его скачок независимо от других с вероятностью p является скачком $X^p(t)$. Если у $X(t)$ в некоторый момент времени есть скачки размера m , то скачок $X^p(t)$ имеет биномиальное распределение, соответствующее m испытаниям с вероятностью успеха p . Нетрудно видеть, что если $X(t)$ — регенерирующий поток, то $X^p(t)$ также обладает этим свойством и моменты регенерации этих потоков совпадают.

2. Эргодичность и стохастическая ограниченность регенерирующих процессов, описывающих системы обслуживания. Рассматривается система обслуживания с регенерирующим входящим потоком $X(t)$. Задана последовательность $\{\vec{\eta}_n = (\eta_n^1, \dots, \eta_n^r)\}_{n=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных векторов, не зависящих от $X(t)$. Пусть $\vec{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$ есть r -мерный случайный процесс с неотрицательными координатами, характеризующий функционирование системы. Будем предполагать, что $\vec{W}(t)$ при $t > 0$ определяется соотношением

$$\vec{W}(t) = \Phi(\vec{W}(0), t, \{X(s), s \leq t\}, \vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_{X(t)}), \quad (2.1)$$

где $\Phi(\cdot)$ — некоторая функция в соответствующем пространстве со значениями в $\mathbf{R}_+^r$. В качестве координат такого процесса можно рассматривать, например, остаточное количество работы, т.е. виртуальное время ожидания на каждом приборе многоканальной системы. Нам понадобятся следующие определения.

О п р е д е л е н и е 2. Случайный процесс $\{\vec{Y}(t), t \geq 0\}$ со значениями в $\mathbf{R}_+^r$ стохастически ограничен, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\vec{y} = (y_1, \dots, y_r) < \infty$ такое, что для всех t

$$\mathbf{P}\{\vec{Y}(t) < \vec{y}\} > 1 - \varepsilon.$$

По сути это означает компактность множества функций распределения $\{F_t(\vec{x}) = \mathbf{P}\{\vec{Y}(t) \leq \vec{x}\}\}$, $t \geq 0$, и в зарубежной литературе данное свойство часто называется «tightness» [28].

О п р е д е л е н и е 3. Случайный процесс $\vec{Y}(t)$ сильно стохастически неограничен, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vec{y} = (y_1, \dots, y_r) < \infty$ существует $t_0 < \infty$ такое, что при $t > t_0$

$$\mathbf{P}\{\vec{Y}(t) \geq \vec{y}\} > 1 - \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что точка $\vec{y} \in \mathbf{R}_+^r$ достижима из нуля процессом $\vec{Y}(t)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют ε -окрестность $\Delta_\varepsilon(\vec{y}) = \{\vec{x}: \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon\}$ и момент t_ε такие, что $\mathbf{P}\{\vec{Y}(t_\varepsilon) \in \Delta_\varepsilon(\vec{y}) \mid \vec{Y}(0) = 0\} > 0$. Обозначим $B_0(\vec{Y}(t))$ множество точек, достижимых из нуля процессом $\vec{Y}(t)$.

О п р е д е л е н и е 5. Процесс $\{\vec{Y}(t), t \geq 0\}$ назовем эргодическим, если для любого начального состояния $\vec{Y}(0) = \vec{y} \in B_0(\vec{Y}(t))$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\vec{Y}(t) \leq \vec{x}\} = F(\vec{x}),$$

являющийся функцией распределения, и $F(\vec{x})$ не зависит от $\vec{y}$.

Для процесса $\vec{W}(t)$, определенного соотношением (2.1), введем вложенную цепь Маркова

$$\vec{W}_n = \vec{W}(\theta_n - 0) = (W_{n1}, \dots, W_{nr})$$

и суммы координат

$$w(t) = \sum_{j=1}^r W_j(t), \quad w_n = \sum_{j=1}^r W_{nj}.$$

Далее предположим, что входящий поток $X(t)$, последовательность $\{\vec{\eta}_n\}_{n=1}^\infty$ и функция $\Phi(\cdot)$ таковы, что выполнены следующие условия.

У с л о в и е 1. $\mathbf{P}\{w_{n+1} = 0 \mid w_n = 0\} > 0$.

У с л о в и е 2. Для любого $\vec{x} < \infty$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$, найдутся целое $m(\vec{x})$ и $\delta(\vec{x}) > 0$ такие, что при всех $\vec{y} \in B_0(\vec{W}_n)$ и $\vec{y} \leq \vec{x}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{w_{n+m(\vec{x})} = 0 \mid \vec{W}_n = \vec{y}\} > \delta(\vec{x}).$$

Здесь и далее $\vec{y} \leq \vec{x}$ означает покоординатное неравенство.

Будем говорить, что цепь Маркова $\vec{W}_n$ асимптотически стохастически непрерывна, если выполнено следующее условие.

У с л о в и е 3. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\vec{x} \in \mathbf{R}_+^r$ существуют $\delta > 0$ и целое n_0 такие, что

$$\left| \mathbf{P}\{\vec{W}_n \leq \vec{x} \mid \vec{W}_0 = \vec{y}^*\} - \mathbf{P}\{\vec{W}_n \leq \vec{x} \mid \vec{W}_0 = \vec{y}\} \right| < \varepsilon,$$

если $n > n_0$, $\|\vec{y}^* - \vec{y}\| < \delta$ и $\vec{y}^*, \vec{y} \in B_0(\vec{W}_n)$.

Условие 2, упрощенно говоря, при стохастической ограниченности означает неприводимость, условие 1 — непериодичность $\vec{W}_n$ (см., например, [9]), а условие 3 — непрерывную зависимость от начальных условий. Следующее предположение технического характера касается входящего потока, оно позволяет устанавливать условия эргодичности для процесса с непрерывным временем $\vec{W}(t)$.

У с л о в и е 4. Распределение τ_n содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Заметим, что если один из процессов $\vec{W}(t)$, $\vec{W}_n$ стохастически ограничен (сильно стохастически неограничен), то и другой обладает соответствующим свойством. Это же выполнено и для процессов $w(t)$, w_n . На самом деле данное утверждение верно для совокупности всех этих процессов, если последовательность

$$u_n = \max_{1 \leq i, j \leq r} |W_{ni} - W_{nj}|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

при $n \rightarrow \infty$ стохастически ограничена (у с л о в и е 5).

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Если выполнено условие 3 и для некоторого начального состояния $\vec{y}_0 \in B_0(\vec{W}_n)$ процесс $\vec{W}_n$ стохастически ограничен, то он эргодичен. Если процесс w_n стохастически неограничен при любом начальном состоянии $\vec{W}_0 = \vec{y} \in B_0(\vec{W}_n)$, то он сильно стохастически неограничен. Если выполнено условие 5, это верно и для процесса $\vec{W}_n$. Данные утверждения имеют место для процесса $\vec{W}(t)$ при условии 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Процессы $\vec{W}(t)$ и $\vec{W}_n$, а также $w(t)$ и w_n являются регенерирующими. Точки регенерации процессов $\vec{W}(t)$ и $w(t)$ — те моменты регенерации входного потока $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$, для которых $\vec{W}(\theta_i - 0) = 0$. Обозначим эти моменты регенерации $\{\theta_{\alpha_k}\}_{k=1}^\infty$. Тогда точки регенерации процессов $\vec{W}_n$ и w_n образуют последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$. Введем $\chi_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ ($j \geq 1$), положив $\alpha_0 = 0$. При произвольном начальном условии $\vec{W}(0)$ последовательность $\{\chi_j\}_{j=1}^\infty$ образует общий процесс восстановления. Предположим, что $\vec{W}_n$ стохастически ограничен при начальном состоянии $\vec{y}$. Тогда найдется вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$ ($x_i < \infty$ для всех i) такой, что процесс $\vec{W}_n$ с вероятностью единица попадает в множество $[0, \vec{x})$ бесконечно часто. Вместе с

условием 2 это обеспечивает конечность χ_1 с вероятностью единица, так что можно считать, что стохастически ограничен процесс $\vec{W}_n^0$ с нулевым начальным состоянием.

В силу условия 1 и теоремы Блекуэлла [32] существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{w_n^0 = 0\} = p.$$

При этом $p > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\chi_2 < \infty$. Стохастическая ограниченность $\vec{W}_n^0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_\varepsilon, n_\varepsilon$ такие, что для $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{w_n^0 < x_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Отсюда и из условия 2 следует существование $m(x_\varepsilon)$ такого, что $\mathbf{P}\{w_{n+m(x_\varepsilon)}^0 = 0\} \geq \delta(x_\varepsilon) > 0$ для всех $n > n_\varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{w_n^0 = 0\} > 0, \quad (2.4)$$

так что $\mathbf{E}\chi_2 < \infty$. Предположим, что для некоторого $\vec{y}_0 \in B_0(\vec{W}_n)$ процесс $\vec{W}_n(\vec{y}_0)$ с начальным значением $\vec{W}_0 = \vec{y}_0$ не является стохастически ограниченным. Отсюда, в силу условия 3 и достижимости $\vec{y}_0$ из нуля вытекает стохастическая неограниченность w_n^0 при нулевом начальном условии, что противоречит $\mathbf{E}\chi_2 < \infty$. Итак $\mathbf{P}\{\chi_1 < \infty\} = 1$ при любом начальном состоянии $\vec{W}_0 = \vec{y}_0 \in B_0(\vec{W}_n)$ и $\mathbf{E}\chi_2 < \infty$, так что теорема Смита [31] обеспечивает существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\vec{W}_n \leq \vec{x}\} = F(\vec{x}), \quad (2.5)$$

где $F(\vec{x})$ — функция распределения, не зависящая от $\vec{y}_0$, что по определению означает эргодичность.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Поскольку при нулевом начальном условии $\vec{W}_n$ стохастически неограничен, то $\mathbf{E}\chi_2 = \infty$. Пусть найдется $\vec{y} \in B_0(\vec{W}_n)$ такое, что процесс $w_n(\vec{y})$ для $\vec{W}_n(\vec{y})$, выходящий из $\vec{y}$, будучи стохастически неограниченным, не является сильно стохастически неограниченным. Это означает, что существуют $x < \infty, \varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ такие, что

$$\mathbf{P}\{w_{n_j}(\vec{y}) < x\} > \varepsilon, \quad j \geq 1.$$

С учетом условия 2 отсюда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{w_n^0 = 0\} > 0,$$

что противоречит $\mathbf{E}\chi_2 = \infty$.

При стохастической ограниченности последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (условие 5) сильная стохастическая неограниченность координат $\vec{W}_n$ следует из сильной стохастической неограниченности w_n .

Доказательство для процессов $\vec{W}(t)$ и $w(t)$ аналогично, поскольку условие 4 обеспечивает существование предельного распределения (возможно несобственного) для этих регенерирующих процессов. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть t_n — момент поступления n -го требования и $\vec{W}_n^* = \vec{W}(t_n - 0)$. Положим $\nu(n) = \max\{j: \theta_j \leq t_n\}$ и $X_n = X(\theta_{\nu(n)})$. Тогда значение $\vec{W}_n^*$ может быть выражено через $\vec{W}_{\nu(n)}$ с помощью соотношения

$$\vec{W}_n^* = \Phi \left(\vec{W}_{\nu(n)}, X(s) - X_n, s \in [\theta_{\nu(n)}, t_n), \vec{\eta}_{X_n+1}, \vec{\eta}_{X_n+2}, \dots, \vec{\eta}_{n-1} \right).$$

Это позволяет устанавливать аналог теоремы 1 для процесса $\vec{W}_n^*$.

3. Эргодическая теорема для многоканальной системы обслуживания с неидентичными приборами.

3.1. Описание модели. Пусть S — система обслуживания с r приборами и регенерирующим входящим потоком $X(t)$. Все приборы занумерованы, и поступившее требование направляется на любой из свободных приборов с равной вероятностью, когда таковой имеется. Если все приборы заняты, то требование встает в общую очередь. Времена обслуживания требований — независимые случайные величины, не зависящие от входящего потока. Требования, обслуживаемые на одном приборе, имеют одинаковое распределение времен обслуживания. Таким образом, каждый прибор характеризуется последовательностью независимых времен обслуживания $\eta^{(i)} = \{\eta_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ ($i = 1, \dots, r$) с функцией распределения $B_i(x)$ и математическим ожиданием β_i^{-1} .

3.2. Эргодическая теорема. Введем случайный процесс $\vec{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$, где $W_i(t)$ — время от момента t до момента, когда i -й прибор освободится от обслуживания требований, пришедших раньше t . Пусть $\vec{W}_n = (W_{n1}, \dots, W_{nr}) = \vec{W}(\theta_n - 0)$ и $w_n = \sum_{i=1}^r W_{ni}$. Положим $\vec{\eta}_n = (\eta_n^1, \dots, \eta_n^r)$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда $\vec{W}(t)$ определяется с помощью соотношения вида (2.1) через начальное значение $\vec{W}(0)$, входящий поток $X(s)$ до момента t и векторы $\{\vec{\eta}_n\}_{n=1}^{X(t)}$.

Если точками регенерации входного потока являются лишь моменты поступления требований $\{t_n\}$ (см., например, [27]), то функцию $\Phi(\vec{y}, \cdot)$ можно выписать в явном виде.

Далее мы будем считать, что для некоторого $i = 1, \dots, r$ имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1^i\} > 0, \quad (3.1)$$

которое обеспечивает выполнение условий 1 и 2.

Теорема 2. 1. Если выполнено (3.1) и

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^r \beta_i} < 1, \quad (3.2)$$

то процесс $\vec{W}_n$ эргодичен. Если, кроме того, выполнено условие 4, то процесс $\vec{W}(t)$ эргодичен.

2. При $\rho > 1$, а также при $\rho = 1$ и дополнительных условиях

$$\mathbf{E} \tau_1^{2+\delta} < \infty, \quad \mathbf{E} \xi_1^{2+\delta} < \infty, \quad \mathbf{E} (\eta_1^i)^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.3)$$

для некоторого $\delta > 0$ все эти процессы сильно стохастически неограничены.

З а м е ч а н и е 2. Прежде чем доказывать теорему, заметим, что для одинаковых приборов даже без условий (3.3) она является простым следствием результатов, установленных в [8, гл. IV, § 7] для систем $G|G|r|\infty$ со стационарной последовательностью $\{\tilde{\zeta}_n\}$ интервалов между поступлениями требований. Для регенерирующего потока можно установить более сильное, чем свойство 1, утверждение. А именно, при $d = 1$ имеет место слабая сходимость последовательности $\{t_{n+k+1} - t_{n+k}\}_{k=1}^\infty$ к стационарной $\{\tilde{\zeta}_k\}_{k=1}^\infty$ в случае $n \rightarrow \infty$. Это означает, что при нулевом начальном значении существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\vec{W}_n^* \leq x\} = F^*(\vec{x})$$

и $F^*(\vec{x})$ — функция распределения в том и только том случае, когда $\rho = \lambda/(r\beta) < 1$ ($\beta = \beta_i$, $i = 1, \dots, r$). Далее нужно воспользоваться условием (3.1) и теоремой 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Начнем с вспомогательного утверждения.

Лемма 1. Процесс u_n , определенный соотношением (2.2), для рассматриваемой системы стохастически ограничен при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство аналогично ключевой лемме в [23] (см. также [26]) и здесь опускается.

Пусть $Q(t)$ — общее число требований в системе S в момент t и $Q_n = Q(\theta_n - 0)$, $Q_n^* = Q(t_n - 0)$. Процесс $Q(t)$ определяется соотношением (2.1) с помощью некоторой функции $\Phi(\cdot)$, но, разумеется, Q_n не является цепью Маркова. Тем не менее в смысле стохастической ограниченности или сильной стохастической неограниченности все указанные процессы ведут себя одинаково.

Обозначим $\nu_i(n)$ число требований, обслуженных i -м прибором за время $(t_n, t_{n+1}]$.

Лемма 2. Если w_n сильно стохастически неограничен, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $n > n_0$

$$\mathbf{E} \nu_i(n) > \beta_i \lambda^{-1} - \varepsilon, \quad i = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Если процесс w_n сильно стохастически неограничен, а потому в силу леммы 1 сильно стохастически неограничены процессы W_{ni} и q_{ni} ($i = 1, \dots, r$), где q_{ni} — число требований, назначенных на i -й прибор к моменту времени t_n . Соотношение (3.4) интуитивно понятно. Если i -й прибор работает в условиях полной загрузки, то поток обслуженных на нем требований является процессом восстановления. По теореме Блекуэлла (см. [7, приложение 1]) при $t \rightarrow \infty$ математическое ожидание числа обслуженных требований за время $(t, t + y)$ равно $\beta_i y$, а за интервал между поступлениями требований в систему — β_i / λ . При сильной стохастической неограниченности для любого конечного $y > 0$ с вероятностью сколь угодно близкой к единице прибор будет занят в интервале $(t, t + y)$, когда t достаточно велико, что и приводит к (3.4). Собственно, на этих интуитивных соображениях основано доказательство. Мы строим общий процесс восстановления, совпадающий с выходящим с прибора потоком на достаточно длительном промежутке времени с вероятностью сколь угодно близкой к единице (т.е. используем метод склеивания). Для построенного процесса выполняется теорема Блекуэлла, откуда после ряда оценок следует (3.4).

Зафиксируем некоторый прибор i . Далее в этом доказательстве рассматривается только его функционирование. Для удобства опустим индекс i и обозначим $B(x) = B_i(x)$, $\beta = \beta_i$ и т.д. Пусть $q(t)$ — количество требований из числа имеющихся в системе в момент t , которые будут обслуживаться (или уже обслуживаются) на i -м приборе. Как и раньше, t_n — момент поступления n -го требования и $\zeta_n = t_n - t_{n-1}$. Положим $G_n(x) = \mathbf{P}\{\zeta_n \leq x\}$. По свойству 1 регенерирующего потока существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = G(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \zeta_n = \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x dG(x). \quad (3.5)$$

Доказательство леммы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем Y из условий

$$\int_0^Y y dG(y) > \lambda^{-1}(1 - \varepsilon), \quad 1 - G(Y) < \varepsilon. \quad (3.6)$$

В соответствии с (3.5) найдется n_1 такое, что при $n > n_1$

$$\int_0^Y y dG_n(y) > \lambda^{-1}(1 - 2\varepsilon), \quad 1 - G_n(Y) < 2\varepsilon. \quad (3.7)$$

Выберем U из условия

$$\beta \int_U^\infty (1 - B(x)) dx < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Обозначим $H(t)$ функцию восстановления простого процесса восстановления с функцией распределения $B(x)$ между восстановлениями. Используя теорему Блекуэлла (см. [7, приложение 1]), устанавливаем существование $T > U$, для которого

$$H(t - U + y) - H(t - U) > \beta y - \varepsilon \quad (3.9)$$

при всех $y \in [0, Y]$ и $t \geq T$.

Шаг 2. Обозначим $N(t)$ число требований, обслуженных на приборе за время $[0, t]$. Для выбранного T определим случайные величины

$$s_n = (t_n - T)\mathbf{I}(t_n \geq T) + t_n\mathbf{I}(t_n < T), \quad \gamma_{s_n} = \chi_{s_n}\mathbf{I}(q(s_n) > 0), \quad (3.10)$$

где χ_{s_n} — остаточное время обслуживания требования на приборе в момент s_n , если $q(s_n) > 0$.

Сопровождающий общий процесс восстановления $\hat{N}(t)$ зададим последовательностью $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ независимых случайных величин, где $\gamma_1 = \gamma_{s_n}$, а γ_j ($j > 1$) — времена обслуживания требований на приборе после момента s_n , так что $B(x)$ — их функция распределения. Относительно распределения γ_{s_n} (см. [7, приложение 1]) несложно установить слабую сходимость

$$\mathbf{P}\{\gamma_{s_n} > x \mid \gamma_{s_n} > 0\} \rightarrow \beta \int_x^\infty (1 - B(y)) dy \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (3.8) следует существование n_2 такого, что при $n > n_2$

$$\mathbf{P}\{\gamma_{s_n} > U\} < 2\varepsilon. \quad (3.11)$$

Шаг 3. Здесь устанавливается соотношение между процессами $N(t)$ и $\hat{N}(t)$. Введем событие

$$A_n = \{t_n > T, q(t) > 0 \text{ для } t \in [t_n - T, t_{n+1}]\}.$$

Поскольку $q(t)$ сильно стохастически неограничен, то

$$\mathbf{P}\{\bar{A}_n\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Кроме того,

$$[N(t) - N(t_n - T)]\mathbf{I}(t > t_n - T, A_n) = \hat{N}(t - t_n + T)\mathbf{I}(t > t_n - T, A_n).$$

Шаг 4. На этом шаге мы оценим $\mathbf{E} \nu(n)$. Из определения величины $\nu(n) = N(t_{n+1}) - N(t_n)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \nu(n) &\geq \mathbf{E} [N(t_{n+1}) - N(t_n)] \mathbf{I}(A_n) = \mathbf{E} [\hat{N}(T + \zeta_n) - \hat{N}(T)] \mathbf{I}(A_n) \\ &= \mathbf{E} [\hat{N}(T + \zeta_n) - \hat{N}(T)] - \mathbf{E} [\hat{N}(T + \zeta_n) - \hat{N}(T)] \mathbf{I}(\bar{A}_n) \\ &= J_1(n) - J_2(n). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{E} [\hat{N}(T + \zeta_n) - \hat{N}(T)] < \infty$, то $J_2(n) \rightarrow 0$ в силу (3.12). Значит, найдется n_3 такое, что $J_2(n) < \varepsilon$ при $n > n_3$. Чтобы оценить $J_1(n)$, возьмем Y, U, T , определенные в (3.6), (3.8), (3.9), и n_1, n_2 , определенные в (3.7), (3.11). Тогда для $n > \max(n_1, n_2)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} J_1(n) &\geq \int_0^Y \int_0^U [H(T + y - u) - H(T - u)] dP\{\gamma_{s_n} < u\} dG_n(y) \\ &\geq \int_0^Y \int_0^U (\beta y - \varepsilon) d\mathbf{P}\{\gamma_{s_n} \leq u\} dG_n(y) \geq (1 - 2\varepsilon)^2 \left(\frac{\beta}{\lambda} - \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Теперь для $n > \max(n_1, n_2, n_3)$ получаем

$$\mathbf{E} \nu(n) \geq (1 - 2\varepsilon)^2 \left(\frac{\beta}{\lambda} - \varepsilon \right) - \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε завершает доказательство леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\rho < 1$. Тогда из соотношения (3.1) следует выполнение условий 1, 2 и 3 для $\tilde{W}_n$ и, в силу теоремы 1, этот процесс либо эргодичен, либо сильно стохастически неограничен. Предположим, что $\tilde{W}_n$ неэргодичен, значит, сильно стохастически неограничен Q_n^* . Выберем ε из условия $\varepsilon < r^{-1}(\rho^{-1} - 1)$. Из леммы 2 заключаем, что существует n_0 такое, что для любого $n > n_0$ имеют место соотношения

$$\mathbf{E} Q_{n+1}^* = \mathbf{E} Q_n^* + 1 - \sum_{i=1}^r \mathbf{E} \nu_i(n) \leq \mathbf{E} Q_n^* + 1 - \lambda^{-1} \sum_{i=1}^r \beta_i + r\varepsilon < \mathbf{E} Q_n^*,$$

что противоречит сильной стохастической неограниченности процесса Q_n^* .

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Сначала пусть $\rho > 1$. Обозначим $Q(t)$ общее число требований в системе S в момент t . Введем так называемую «модифицированную» (или автономную) систему обслуживания S' (см., например, [22]). Пусть $Y_i(t)$ ($i = 1, \dots, r$) — простой процесс восстановления с функцией распределения $B_i(x)$ интервалов между восстановлениями. Для системы S' предполагается следующее.

1. Если требование поступает на i -й прибор, когда он свободен, то время его обслуживания равно времени до следующего восстановления процесса $Y_i(t)$.

2. Требование обслуживается на том приборе, который закончит его обслуживание раньше других, и это не обязательно первый освободившийся прибор.

Входящий поток $X(t)$ в систему S' тот же, что и в S . Обозначим $Q'(t)$ число требований в системе S' в момент t . Тогда для модифицированной системы при $Q'(0) = 0$ выполняется соотношение

$$Q'(t) = X(t) - Y(t) - \inf\{X(s) - Y(s), s \in [0; t]\},$$

где $Y(t) = \sum_{i=1}^r Y_i(t)$. Это означает, что S' можно рассматривать как одноканальную систему, в которой $X(t)$ представляет собой количество работы, поступающей в систему, а $Y(t)$ — количество работы, которая может быть выполнена в условиях полной загрузки за время t (см., например, [2]). Коэффициент загрузки ρ такой одноканальной системы равен $\lambda / \sum_{i=1}^r \beta_i$ и при $\rho > 1$ (см., например, [7], [2])

$$Q'(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{п.н.} \quad (3.13)$$

Введем вложенный процесс $Q'_n = Q'(\theta_n - 0)$ и событие $A_m = \{Q'_n > r \text{ для всех } n > m\}$. Поскольку $Q'_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ п.н., то для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что

$$\mathbf{P}\{A_{n_\varepsilon}\} > 1 - \varepsilon. \quad (3.14)$$

Определим два марковских процесса Z'_n и Z_n соотношениями

$$Z'_n = (Q'_n, \chi'_{n1}, \dots, \chi'_{nr}) \quad \text{и} \quad Z_n = (Q_n, \chi_{n1}, \dots, \chi_{nr}).$$

Здесь χ'_{ni} — время до следующего скачка процесса $Y_i(t)$, ($i = 1, \dots, r$) после момента θ_n , а χ_{ni} — остаточное время обслуживания на i -м приборе в момент θ_n в системе S . Если i -й прибор свободен, полагаем $\chi_{ni} = 0$. Начальное распределение Z_n зададим равенством

$$Z_1 = \begin{cases} (Q'_{n_\varepsilon}, \chi'_{n_\varepsilon 1}, \dots, \chi'_{n_\varepsilon r}), & \text{если } Q'_{n_\varepsilon} \geq r, \\ (0, 0, \dots, 0), & \text{если } Q'_{n_\varepsilon} < r. \end{cases} \quad (3.15)$$

Функционирование системы S связано с системой S' следующим образом. Моменты поступления новых требований в S (после θ_1) совпадают с моментами поступлений требований в S' после θ_{n_ε} , т.е. с моментами скачков $X(t + \theta_{n_\varepsilon})$. Времена обслуживания требований, начинающих обслуживание на i -м приборе в S , задаются интервалами между восстановлениями процесса $Y_i(t)$ после момента $\theta_{n_\varepsilon} + \chi'_{n_\varepsilon i}$ ($i = 1, \dots, r$). Тогда на множестве A_{n_ε} выполняется равенство

$$Q'_{n_\varepsilon + j} = Q_{j+1}, \quad j \geq 0, \quad (3.16)$$

поскольку на этом множестве количество требований, покинувших S и S' за время t , одинаково и равно $Y(\theta_{n_\varepsilon} + t) - Y(\theta_{n_\varepsilon})$, а $Q'_{n_\varepsilon} = Q_1$. Таким образом, при начальных условиях, определенных соотношением (3.15), процесс Q_n в силу (3.14) и (3.16) сильно стохастически неограничен, так как этим свойством обладает Q'_n (см. (3.13)). Следовательно, $\vec{W}_n$ сильно стохастически неограничен, а поэтому неэргодичен.

При $\rho = 1$ приходится делать дополнительные предположения. Они вряд ли связаны с существом дела, но без них пока не удалось получить соответствующего результата.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (3.3). Тогда при $\rho = 1$ и $x \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{Q(t)}{\sigma t^{1/2}} \leq x \right\} = \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{1/2} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy.$$

Здесь

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 > 0 \quad (3.17)$$

и σ_X^2 определяется соотношением (1.2), а

$$\sigma_Y^2 = \sum_i^r \sigma_i^2 \beta_i^3, \quad \sigma_i^2 = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\beta_i} \right)^2 dB_i(x).$$

Доказательство данного утверждения проводится по аналогии с доказательством соответствующего утверждения в [22]. Единственным тонким моментом является замена рекуррентного входящего потока регенерирующим. Однако свойство сходимости нормированного рекуррентного потока к винеровскому процессу, используемое в [22], выполнено при условии (3.3) и для регенерирующего потока (свойство 2).

Теперь сильная стохастическая неограниченность процесса $Q(t)$, а, следовательно, и $\vec{W}(t)$ очевидным образом вытекает из леммы 3. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если $B_i(x) = B(h_i x)$, $h_i > 0$ ($i = 1, \dots, r$) и $\int_0^\infty x dB(x) = b < \infty$, то неидентичность приборов можно трактовать как различие в скорости обслуживания. Это означает, что требования поступают в систему с собственными временами обслуживания, имеющими функцию распределения $B(x)$ на некотором идеальном приборе. Рассмотрим одноканальную систему с тем же входящим потоком $X(t)$ и функцией распределения времени обслуживания $B(x \sum_{i=1}^r h_i)$. Пусть $\tilde{w}(t)$ — процесс $w(t)$ в этой системе. При одинаковых начальных условиях (например, $w(0) = 0$, $\tilde{w}(0) = 0$) для всех $t > 0$ выполняется стохастическое неравенство $w(t) \geq \tilde{w}(t)$. Поскольку среднее значение времени обслуживания в одноканальной системе равно $b / \sum_{i=1}^r h_i$, то ее коэффициент загрузки ρ равен $\lambda b / \sum_{i=1}^r h_i = \lambda / \sum_{i=1}^r \beta_i$, где $\beta_i = h_i / b$. Если $\rho \geq 1$, то процесс $\tilde{w}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ сильно стохастически неограничен.

Следовательно, $w(t)$ сильно стохастически неограничен и, значит, неэргодичен. Таким образом, в описанной ситуации при $\rho = 1$ не требуется дополнительных условий (3.3) на моменты.

З а м е ч а н и е 4. При выполнении условий (3.3) для случая $\rho > 1$ при $T \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость нормированного процесса

$$\frac{Q(tT) - (\lambda - \sum_{i=1}^r \beta_i)Tt}{\sigma\sqrt{T}}$$

к стандартному винеровскому процессу на любом конечном интервале $t \in [0, h]$, где σ определяется в (3.17).

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и в [22], на основании С-сходимости нормированного регенерирующего процесса к винеровскому (свойство 2 регенерирующего потока). Если $\rho = 1$, то нормированный процесс $Q(tT)/(\sigma\sqrt{T})$ слабо сходится к модулю стандартного винеровского процесса.

4. Приложения к анализу более общих моделей обслуживания. Опираясь на свойства регенерирующего потока, асимптотическое поведение многих систем обслуживания удастся выяснить с помощью предложенных подходов и полученных выше результатов. В качестве примеров мы рассмотрим несколько моделей (системы с ненадежными приборами, системы с ограничениями и иерархические сети).

4.1. Условия эргодичности систем обслуживания с ненадежными приборами. Пусть S — многоканальная система обслуживания, условия функционирования которой описаны в разделе 3, однако теперь предполагается, что приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. Системы и сети (см., например, [25], [20], [14], [18]) с ненадежными приборами широко изучались и продолжают интенсивно изучаться различными авторами. Основополагающей работой в данном направлении для одноканальных систем можно считать статью [20], в которой автор рассматривает несколько моделей, различающихся характером поведения требования, застигнутого поломкой во время обслуживания. Мы также рассмотрим различные варианты поведения требования при поломке прибора.

Отличие нашей модели от ранее рассмотренных в том, что входящий поток требований — регенерирующий. Как уже отмечалось, это весьма широкий класс потоков, включающий в себя, в частности, дважды стохастический пуассоновский процесс с интенсивностью, являющейся регенерирующим процессом.

Предположим, что поломка i -го прибора ($i = 1, \dots, r$) возможна только тогда, когда он занят обслуживанием требования. При этом время до выхода i -го прибора из строя имеет показательное распределение со средним γ_i^{-1} . Ремонт прибора начинается немедленно после

его поломки и продолжается случайное время с функцией распределения $D_i(x)$ и средним d_i для i -го прибора. Введем также преобразование Лапласа–Стилтьеса $b_i(s)$ функции $B_i(x)$ ($i = 1, \dots, r$). Рассматриваются три различных варианта поведения требования, обслуживание которого было прервано выходом прибора из строя, что приводит к следующим трем моделям:

— требование покидает систему сразу после восстановления прибора (модель M_1);

— после восстановления прибора обслуживание начинается сначала на том же приборе, и это новое время обслуживания не зависит от предыдущего (модель M_2);

— после восстановления прибора обслуживание продолжается на том же приборе с тем же временем обслуживания (модель M_3).

Как будет показано ниже, асимптотическое поведение очереди определяется параметрами $\varkappa_i$ ($i = 1, \dots, r$), которые задаются соотношениями

$$\varkappa_i = \begin{cases} (d_i + \gamma_i^{-1})[1 - b_i(\gamma_i)] & \text{для модели } M_1, \\ \frac{(d_i + \gamma_i^{-1})[1 - b_i(\gamma_i)]}{b_i(\gamma_i)} & \text{для модели } M_2, \\ \beta_i^{-1}(1 + d_i\gamma_i) & \text{для модели } M_3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Заметим, что модель 1 оказывается полезной при описании функционирования перекрестка автомобильных дорог [5].

Следствие 1. Пусть выполнено (3.1). Для систем с ненадежными приборами при

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^r \varkappa_i^{-1}} < 1$$

процессы, описывающие функционирование системы, эргодичны. При $\rho > 1$, а также при $\rho = 1$, дополнительных условиях (3.3) и если $\int_0^\infty x^{2+\delta} dD_i(x) < \infty$, $\delta > 0$, эти процессы сильно стохастически неограничены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку приборы могут выходить из строя только во время обслуживания требований, то время восстановления прибора после поломки может рассматриваться как добавочное время его занятости обслуживанием находящегося на нем требования. Вместо обычного времени обслуживания η_n^i n -го требования на i -м приборе так же, как и в [20], мы вводим составную случайную величину $\varkappa_n^i$, которая представляет собой время от момента начала обслуживания до момента, когда требование покидает систему (completion time [20]). Тем самым, мы приходим к рассмотрению многоканальной системы с неидентичными приборами. Задача теперь состоит в вычислении математического ожидания времени занятости $\varkappa_n^i$ для описанных моделей.

Рассмотрим модель M_1 . Пусть u_n^i — время, отсчитанное от момента поступления n -го требования на обслуживание i -м прибором до момента выхода этого прибора из строя, η_n^i — время, необходимое для обслуживания этого требования на i -м приборе, и d_n^i — время, необходимое для ремонта этого прибора, если во время обслуживания n -го требования произошла поломка. Поскольку интервалы между поломками имеют показательное распределение, то величина u_n^i также имеет показательное распределение с параметром γ_i . Итак, полное время, затраченное i -м прибором на n -е требование, определяется соотношением

$$\varkappa_n^i = \eta_n^i \mathbf{I}(\eta_n^i < u_n^i) + (u_n^i + d_n^i) \mathbf{I}(\eta_n^i \geq u_n^i), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{I}(A)$ — индикатор события A . Таким образом, многоканальную систему с ненадежным прибором можно рассматривать как стандартную систему с надежными приборами, заменив β_i ($i = 1, \dots, r$) на соответствующие величины $\varkappa_i^{-1}$, где $\varkappa_i$ — математическое ожидание случайной величины $\varkappa_n^i$. Остается найти $\varkappa_i = \mathbf{E} \varkappa_n^i$. Из определения (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_i &= \int_0^\infty \mathbf{E}(\varkappa_n^i | \eta_n^i = x) dB_i(x) = \int_0^\infty \left(d_i + \frac{1}{\gamma_i}\right) (1 - e^{-\gamma_i x}) dB_i(x) \\ &= \left(d_i + \frac{1}{\gamma_i}\right) (1 - b_i(\gamma_i)). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь модель M_2 . По аналогии с предыдущим пунктом, полное время, затраченное i -м прибором на обслуживание n -го требования, может быть представлено следующим образом:

$$\varkappa_n^i = \eta_n^i \mathbf{I}(\eta_n^i < u_n^i) + (u_n^i + d_n^i + \tilde{\varkappa}_n^i) \mathbf{I}(\eta_n^i \geq u_n^i), \quad (4.3)$$

где $\tilde{\varkappa}_n^i$ обозначает время, потраченное прибором на обслуживание n -го требования после его ремонта. В силу того, что требование начинает обслуживание сначала, величина $\tilde{\varkappa}_n^i$ имеет такое же распределение, как и $\varkappa_n^i$. Из (4.3) получаем

$$\mathbf{E} \varkappa_n^i = \frac{(d_i + 1/\gamma_i)(1 - b_i(\gamma_i))}{b_i(\gamma_i)}. \quad (4.4)$$

Для третьей модели находим

$$\varkappa_n^i = \eta_n^i + \sum_{j=1}^{N_i(\eta_n^i)} d_j^i,$$

где $N_i(t)$ — пуассоновский процесс с параметром γ_i . Следовательно,

$$\begin{aligned} \varkappa_i &= \mathbf{E} \left(\eta_n^i + \sum_{j=1}^{N_i(\eta_n^i)} d_j^i \right) = \beta_i^{-1} + \int_0^\infty \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^{N_i(\eta_n^i)} d_j^i \mid \eta_n^i = x \right) dB_i(x) \\ &= \beta_i^{-1} (1 + \gamma_i d_i). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Как видно из (4.4) и (4.5), среднее время нахождения требования на i -м приборе при показательном распределении времени обслуживания в моделях M_2 и M_3 одинаково, что и следовало ожидать. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 5. Если выход приборов из строя возможен и в их свободном состоянии, условия эргодичности систем останутся прежними. Кроме того, ситуация надкритической ($\rho > 1$) и критической ($\rho = 1$) загрузки может быть исследована также для систем с ненадежными приборами. Следует только пересчитать нормирующий коэффициент σ (см. замечание 3). Например, для модели M_3 коэффициент σ^2 определяется соотношением (3.17), где σ_X^2 находится из (1.2), а $\sigma_Y^2 = \sum_i^r \sigma_{\varepsilon_i}^2 (\beta_i / (1 + \gamma_i d_i))^3$ и

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \gamma_i \beta_i^{-1} (\sigma_{D_i}^2 + d_i^2) + (1 + \gamma_i d_i)^2 \sigma_i^2,$$

$$\sigma_i^2 = \int_0^\infty (x - \beta_i^{-1})^2 dB_i(x), \quad \sigma_{D_i}^2 = \int_0^\infty (x - d_i)^2 dD_i(x).$$

4.2. Условие эргодичности систем с ограничениями. Рассмотрим систему S , описанную в п. 3.1, с дополнительным предположением. Задана последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящая от входного потока и последовательности времен обслуживания. Случайная величина v_n может быть несобственной и $\alpha = \mathbf{P}\{v_n = \infty\}$, $C(x) = \mathbf{P}\{v_n \leq x \mid v_n < \infty\}$. При этом v_n ограничивает время ожидания (пребывания) n -го требования в системе, т.е. если по истечении времени v_n требование не начало (не закончило) свое обслуживание, то оно покидает систему. В первом случае мы имеем систему с ограниченным временем ожидания, во втором — пребывания. Системы с различными ограничениями интенсивно изучаются с середины прошлого века. Много интересных результатов, а также ссылок на статьи вплоть до 2000-х годов можно найти в книге [11].

Теорема 3. Пусть выполнено условие (3.1). Для систем S с ограниченным временем ожидания (пребывания) имеют место утверждения теоремы 2, если в качестве коэффициента загрузки ρ взять

$$\rho_\alpha = \alpha \lambda \left(\sum_{i=1}^r \beta_i \right)^{-1} = \alpha \rho. \quad (4.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее мы рассматриваем систему S с ограниченным временем ожидания, поскольку доказательство для системы с ограниченным временем пребывания проводится аналогично.

Будем считать, что в S поступают требования двух типов: требования первого типа имеют неограниченное время ожидания, а у требований второго типа время ожидания ограничено собственной случайной

величиной с функцией распределения $C(x)$. В силу свойства регенерации просеянного потока и взаимной независимости случайных величин $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ потоки требований первого и второго типов будут регенерирующими и, вообще говоря, зависимыми. Справедливость второй части теоремы 2 для рассматриваемой системы с ограничениями почти очевидна. Если $Q(t)$ — число требований в этой системе в момент t , а $Q_\alpha(t)$ — число требований в системе S_α , в которую поступают только требования первого типа, то (при одинаковых начальных условиях) выполняется стохастическое неравенство

$$Q(t) \geq Q_\alpha(t). \quad (4.7)$$

Поскольку интенсивность входящего потока в S_α равна $\alpha\lambda$, то коэффициент загрузки этой системы задается соотношением (4.6) и она является рассмотренной ранее системой без ограничений. Из сильной стохастической неограниченности $Q_\alpha(t)$ ($t \rightarrow \infty$) при $\rho_\alpha \geq 1$ в силу (4.7) следует стохастическая неограниченность $Q(t)$.

Пусть теперь $\rho_\alpha < 1$. Сначала рассмотрим систему S_V , в которой время ожидания требований второго типа ограничено постоянной величиной $V < \infty$.

Лемма 4. *При $\rho_\alpha < 1$ процессы, описывающие функционирование S_V , эргодичны.*

Доказательство. Пусть $Q_i(t)$ — число требований i -го типа ($i = 1, 2$), находящихся в S_V в момент t , и $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$ — общее число требований в S_V . Если $Q(t)$ неэргодичен, то по теореме 1 он сильно стохастически неограничен. Заметим, что $(Q_2(t) - r)$ мажорируется числом требований в бесконечноканальной системе с постоянным временем обслуживания V , так что $Q_2(t)$ стохастически ограничен. Это означает, что сильно стохастически неограниченным является процесс $Q_1(t)$, а стало быть, таковым является и процесс $q_{1i}(t)$, где $q_{ki}(t)$ представляет собой число требований k -го типа ($k = 1, 2$) к моменту времени t , которые должны обслуживаться на i -м приборе. Если $\nu_{1i}(n)$ — число требований первого типа, обслуженных i -м прибором за время $[t_n, t_{n+1})$, то при любом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E} \nu_{1i}(n) > \frac{\beta_i}{\alpha\lambda} - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r, \quad (4.8)$$

т.е. верно утверждение леммы 2.

Доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству леммы 2, только вместо события A_n нужно взять $A_n^* = A_n \cdot D_n$. Здесь событие D_n состоит в том, что i -й прибор в интервале $[t_n, t_{n+1})$ обслуживает требования только первого типа. Из сильной стохастической неограниченности $q_{1i}(t)$ и стохастической ограниченности $q_{2i}(t)$ очевидным образом следует, что $\mathbf{P}\{\bar{D}_n\} \rightarrow 0$ и $\mathbf{P}\{\bar{A}_n\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

поэтому $\mathbf{P}\{\overline{A_n^*}\} \rightarrow 0$. Как в доказательстве теоремы 2, приходим к противоречию, т.е. $q_{1i}(t)$ стохастически ограничен и, следовательно, эргодичен.

Вернемся к доказательству теоремы. Поскольку $\rho_\alpha < 1$ и $\alpha < 1$, то найдутся $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям

$$\alpha + \varepsilon < \frac{\sum_{i=1}^r \beta_i}{\lambda}$$

и

$$\varepsilon < 1 - \alpha,$$

и такое V_ε , что $C(V_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Пусть S_ε — система с ограничением, в которой поступающее требование имеет первый тип с вероятностью $\alpha + \varepsilon$, второй — с вероятностью $1 - \alpha - \varepsilon$, а время ожидания требований второго типа ограничено постоянной V_ε . Если $Q_\varepsilon(t)$ — общее число требований в этой системе, то имеет место стохастическое неравенство (при нулевых начальных условиях) $Q(t) \leq Q_\varepsilon(t) + r$. Доказательство этого интуитивно понятного утверждения аналогично доказательству леммы о мажорировании для систем с возможностью неприсоединения к очереди [6]. Оно довольно громоздко и здесь опущено. Из леммы 4 следует стохастическая ограниченность $Q_\varepsilon(t)$, а стало быть, и $Q(t)$, что в свою очередь влечет эргодичность $Q(t)$. Теорема 3 доказана.

4.3. Условие эргодичности иерархических сетей обслуживания с регенерирующим входящим потоком. Асимптотический анализ иерархических сетей опирается на еще одно свойство регенерирующего потока. При достаточно естественных предположениях этот поток сохраняет свойство регенерации при прохождении через систему обслуживания, т.е. выходящий поток (обслуженных или потерянных) требований является регенерирующим. В качестве их точек регенерации надо взять те точки регенерации входящего потока, в которых система свободна. Иерархическая сеть джексоновского типа с регенерирующим входящим потоком рассматривалась в [29], где она называется «feed-forward network». Основное отличие нашей модели в том, что дается более общее определение регенерирующего потока (см. раздел 1 данной работы). Наш подход также значительно упрощает доказательство существования предельного распределения, правда, при более сильном, чем в [29], предположении, обеспечивающем освобождение сети. Заметим также, что мы устанавливаем необходимое и достаточное условие эргодичности, а в [29] доказана только его достаточность.

Мы рассматриваем сеть с N узлами. Она называется иерархической, если наличие маршрута из узла A в узел B предполагает, что отсутствует маршрут из B в A . В такой ситуации множество узлов сети можно разбить на m классов (уровней) таким образом, что отсутствуют маршруты между узлами одного уровня, а перемещение требо-

ваний из узлов уровня i возможно только в узлы уровня $i + 1$. Перенумеруем уровни и узлы каждого уровня так, что символ (i, j) обозначает j -й узел i -го уровня и $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_i$, $\sum_{i=1}^m n_i = N$ (n_i — число узлов на уровне i). Обозначим множество всех узлов $\mathbf{N} = \{(i, j), j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, m\}$. В качестве маршрута рассматривается набор $I = (j_1, \dots, j_m)$, определяющий последовательность узлов, проходимых требованием, так что j_k — номер посещаемого на k -м уровне узла. При этом поступление требований извне происходит лишь в узлах первого уровня, уход из сети — через узлы последнего (m -го) уровня и каждое требование проходит все уровни. Эти, на первый взгляд, ограничительные предположения легко устраняются введением фиктивных узлов с нулевым временем обслуживания. На множестве $\mathbf{J}$ всех маршрутов задана вероятностная мера $\{P(I), I \in \mathbf{J}\}$ и требования, поступающие в сеть, выбирают свои маршруты в соответствии с этой мерой независимо друг от друга. Каждый узел сети является многоканальной системой обслуживания с различными приборами, описанной в разделе 3, и $r(i, j)$ — число приборов в узле (i, j) , $B_{(i,j)}^k(x)$ — функция распределения, а $(\beta_{i,j}^k)^{-1}$ — математическое ожидание времени обслуживания на k -м приборе узла (i, j) . Предполагается, что поступающий в сеть поток $X(t)$ — регенерирующий в смысле определения 1 с интенсивностью λ . Выпишем условие, аналогичное (3.1), обеспечивающее регенерацию описывающих сеть процессов. Пусть $\eta_{(i,j)}^k$ — случайная величина с функцией распределения $B_{(i,j)}^k(x)$, $k = 1, \dots, r(i, j)$, $\hat{\eta}_{i,j} = \max\{\eta_{(i,j)}^k, k = 1, \dots, r(i, j)\}$. Предположим, что найдется маршрут $I_0 = (j_1^0, \dots, j_m^0)$, $P(I_0) > 0$, такой, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} + \mathbf{P}\left\{\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \sum_{i=1}^m \hat{\eta}_{i,j_i^0}\right\} > 0. \quad (4.9)$$

Пусть $\vec{W}^{i,j}(t)$ обозначает случайный процесс $\vec{W}(t)$, введенный в разделе 3, для узла (i, j) , а $\vec{\mathbf{W}}(t) = \{\vec{W}^{i,j}(t), (i, j) \in \mathbf{N}\}$. Определим также вложенный процесс

$$\vec{\mathbf{W}}_n = \vec{\mathbf{W}}(\theta_n - 0) = \{\vec{W}_n^{i,j}, (i, j) \in \mathbf{N}\}$$

и суммы координат, так что $w_n(i, j)$ — сумма координат вектора $\vec{W}_n^{i,j}$, $w_n(i) = \sum_{j=1}^{n_i} w_n(i, j)$, $w_n = \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}} w_n(i, j)$. Коэффициентом загрузки узла (i, j) является величина

$$\rho(i, j) = \lambda_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{r(i,j)} \beta_{i,j}^k \right)^{-1}, \quad (4.10)$$

где интенсивности $\lambda_{i,j}$ определяются соотношениями

$$\lambda_{i,k} = \lambda \sum_{I: j_i=k} P(I) \quad (4.11)$$

Положим $\rho = \max\{\rho(i, j) \mid (i, j) \in \mathbf{N}\}$.

Следствие 2. Пусть выполнено условие (4.9).

1. Если

$$\rho < 1, \quad (4.12)$$

то процесс $\vec{W}_n$ эргодичен. При условии 4 эргодическим является и процесс $\vec{W}(t)$.

2. Если $\rho > 1$, то $w_n \rightarrow \infty$ п.н.

3. Если $\rho = 1$ и выполнены дополнительные предположения (3.3) для входящего потока и времен обслуживания всех узлов, то w_n сильно стохастически неограничен.

Доказательство. Процессы $\vec{W}(t)$ и $\vec{W}_n$ регенерирующие. Моменты регенерации $\vec{W}(t)$ образуют подпоследовательность $\{\theta_{n_\alpha}\}$ моментов регенерации $X(t)$ таких, что $\vec{W}(\theta_{n_\alpha} - 0) = 0$, т.е. сеть свободна в момент θ_{n_α} . Точками регенерации $\vec{W}_n$ является последовательность $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ (см. теорему 1). Пусть $\rho < 1$. Так же, как и в теореме 2, соотношение (4.9) обеспечивает выполнение условий теоремы 1, так что $\vec{W}_n$ эргодичен, если w_n стохастически ограничен. Докажем, что это так. Пусть $X_{i,j}(t)$ — поток требований, поступающий в узел (i, j) . Так как требования выбирают маршруты независимо друг от друга, то поток $X_{1,j}(t)$ — регенерирующий с интенсивностью $\lambda_{1,j}$ ($j = 1, \dots, n_1$). Выполнение (4.12) означает, что процессы $\vec{W}_n^{(1,j)}$ ($j = 1, \dots, n_1$) для узлов первого уровня эргодические и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_n(1) = 0) > 0$. В силу этого потоки $X_{2,j}(t)$ ($j = 1, \dots, n_2$) также регенерирующие и моменты регенерации — те точки регенерации $X(t)$, для которых все узлы первого уровня свободны. Интенсивность $X_{2,j}(t)$ равна $\lambda_{2,j}$, так что при выполнении (4.12) все узлы второго уровня эргодичны, а потому $w_n(2)$ стохастически ограничен. Аналогично устанавливается, что при выполнении (4.12) все узлы эргодичны, поскольку $X_{i,j}(t)$ является регенерирующим и его моменты регенерации — те члены последовательности $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$, для которых все узлы первых $i-1$ уровней свободны ($(i, j) \in \mathbf{N}$). Заметим, что интенсивность $X_{i,j}(t)$ равна $\lambda_{i,j}$. Сказанное означает, что процесс w_n стохастически ограничен, а значит, эргодичен. Следствие 2 доказано.

Оставшиеся утверждения очевидным образом следуют из теоремы 2.

З а м е ч а н и е 6. Сеть может иметь узлы различных типов, например, с ненадежными приборами или ограничениями. В последнем случае мы предполагаем, что требования, покинувшие узел из-за окончания времени ожидания, не уходят из сети, а направляются на узел следующего уровня в соответствии с выбранным маршрутом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьева Л. Г., Мартынов А. В.* Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 1, с. 102–112.
2. *Афанасьева Л. Г.* Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами. — Кибернетика и системный анализ, 2005, № 1, с. 54–69.
3. *Афанасьева Л. Г., Баштова Е. Е.* Предельные теоремы для систем массового обслуживания в условиях высокой загрузки. — Современные проблемы математики и механики, 2009, т. IV, с. 40–54.
4. *Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
5. *Афанасьева Л. Г., Руденко И. В.* Системы обслуживания $G|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 427–452.
6. *Белорусов Т. Н.* Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди. — Теория вероятн. и ее примен., т. 56, в. 1, 2011, с. 145–152.
7. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
8. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980, 381 с.
9. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: Эдиториал УРСС, 1999, 440 с.
10. *Боровков А. А.* Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. II (многоканальные системы). — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 3, с. 409–436.
11. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966, 431 с.
12. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 299 с.
13. *Марьянович Т. П.* Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором. — Укр. матем. журн., 1962, т. 14, № 4, с. 417–422.
14. *Руденко И. В.* Двухфазовая система обслуживания с ненадежными приборами. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, № 4, с. 4–12.
15. *Afanasyeva L. G., Bashtova E. E., Bulinskaya E. V.* Limit theorems for semi-Markov queues and their applications. — Comm. Statist. Simulation Comput., 2012, v. 41, № 6, p. 688–709.
16. *Asmussen S.* Semi-Markov queues with heavy tails. — Semi-Markov Models and Application. Ed. by J. Janssen et al. Dordrecht: Kluwer, 1999, p. 269–284.
17. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. Chichester: Wiley, 1987, 318 p.
18. *Falin G.* An $M|G|1$ retrial queue with an unreliable server and general repair times. — Performance Evaluation, 2010, v. 67, № 7, p. 569–582.
19. *Foss S., Kalashnikov V.* Regeneration and Renovation in Queues. — Queueing Syst., 1991, v. 8, № 3, p. 211–223.
20. *Gaver D. P., Jr.* A waiting line with interrupted service, including priorities. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1962, v. 24, 1962, p. 73–96.
21. *Grandell D. P.* Doubly stochastic poisson process. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 529, p. 1–234.
22. *Iglehart D., Whitt W.* Multiple channel queues in heavy traffic. I. — Adv. Appl. Probab., 1970, v. 2, p. 150–177.
23. *Kiefer J., Wolfowitz J.* On the theory of queues with many servers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1955, v. 78, p. 1–18.
24. *Loynes R.* The stability of a queue with nonindependent inter-arrival and service times. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, v. 58, p. 497–520.
25. *Neuts M. F., Lucantoni D. M.* A Markovian queue with N servers subject to breakdowns and repairs. — Management Sci., 1979, v. 25, № 9, p. 849–861.
26. *Morozov E.* Stochastic boundness of some queueing processes. Preprint № R-95-2022. Aalborg: Dept. Math. and Computer Sci., Aalborg Univ., 1995, 28 p.

27. *Morozov E.* The stability of a non-homogeneous queueing system with regenerative input. — J. Math. Sci. (N.Y.), 1997, v. 83, № 3, p. 407–421.
28. *Morozov E.* The tightness in the ergodic analysis of regenerative queueing processes. — Queueing Systems Theory Appl., 1997, v. 27, № 1–2, p. 179–203.
29. *Morozov E.* Weak regeneration in modeling of queueing processes. — Queueing Syst., 2004, v. 46, № 3–4, p. 295–315.
30. *Sadowsky J. S., Szpankowski W.* The probability of large queue lengths and waiting times in a heterogeneous multiserver queue. Part I: Tight limits. — Adv. Appl. Probab., 1995, v. 27, № 2, p. 532–566.
31. *Smith W. L.* Regenerative Stochastic Processes. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1955, v. 232, № 1188, p. 6–31.
32. *Thorisson H.* A complete coupling proof of Blackwell's renewal theorem. — Stochastic Process. Appl., 1987, v. 26, p. 87–97.

Поступила в редакцию
15.XI.2012