Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, Закон больших чисел для количества активированных частиц в модели эпидемии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 235–254

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:49:09

© 2013 г.

ЖУКОВСКИЙ М. Е.*

**ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА
АКТИВИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ЭПИДЕМИИ**

В последнее десятилетие целый ряд работ был посвящен изучению вероятностных свойств моделей эпидемии на графах. В данной работе мы рассматриваем обобщение модели, предложенной Ф. Машадо, Х. Машурианом и Х. Матзингером. Модель Машадо–Машуриана–Матзингера служит интерпретацией процесса распространения вирусов в компьютерной сети. Мы предположили, что в каждый момент времени не только один узел сети может быть подвергнут заражению. В этой связи мы предлагаем более сложную модель, допуская каждый раз скачки нескольких частиц, причем количество таких частиц случайно. В работе доказан оптимальный вариант закона больших чисел для количества зараженных в рассмотренной модели эпидемии.

Ключевые слова и фразы: модель эпидемии, случайные блуждания, закон больших чисел, ветвящиеся процессы.

1. Введение. В последнее десятилетие целый ряд работ был посвящен изучению вероятностных свойств моделей эпидемии на графах (см., например, [1]–[7]). Дополнительный стимул это направление получило со стороны интернета, поскольку модели эпидемии играют существенную роль в изучении эволюции веб-графа (см., например, [8]). Моделирование интернета и изучение свойств этих моделей помогает, например, поисковым компаниям в улучшении качества ранжирования и в борьбе со спамом (см. [9]). Некоторые результаты для моделей эпидемий на графах оказываются полезными при исследовании химических реакций горения (см. [6]). Нас будет интересовать обобщение модели, предложенной Ф. Машадо, Х. Машурианом и Х. Матзингером в [10]. Эта модель тесно связана с классическим марковским процессом эпидемий SIR (см. [11]). Машадо, Машуриан и Матзингер рассматривали множество частиц, которые в момент времени $t = 1$ находятся в точках множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. В точке x_1 располагается активная частица, а во всех остальных — неактивные (по одной частице в каждой точке). В любой момент времени $t \in \mathbf{N}$ ровно одна активная частица, номер которой имеет равномерное распределение на множестве номеров активных

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
e-mail: zhukmax@gmail.com

частиц, имеющих в момент t , совершает скачок в некоторую точку $x_{\xi(t)}$. При этом случайная величина $\xi(t)$ также равномерно распределена на $\{1, \dots, n\}$. Если частица совершает скачок в точку с неактивной частицей, то эта частица активируется, а частица, совершившая скачок, остается активной. Активная частица умирает в том и только том случае, когда совершает скачок в точку, в которой находится или побывала ранее активная частица. В частности, если она совершает скачок в точку, где сама находится, то тоже погибает. Пусть величина $D_n(t)$ равна количеству неактивных частиц в момент t , а σ_n — момент, в который погибает последняя активная частица. Для случайной величины $X_n = n - D_n(\sigma_n)$ в [10] установлена центральная предельная теорема. Заметим, что для обозначения различных типов частиц существует и другая терминология, которая использовалась и в [10].

Модель Машадо–Машуриана–Матзингера служит интерпретацией процесса распространения вирусов в компьютерной сети. Однако представляется более естественным предположить, что в каждый момент времени не только один узел сети может быть подвергнут заражению. В этой связи мы предлагаем более сложную модель, допуская каждый раз скачки нескольких частиц, причем количество таких частиц случайно. Целью работы является исследование предельного поведения по вероятности величин X_n , которые для новой модели имеют тот же смысл, что в [10], но описываются иначе. Рассмотрим множества $\{x_1(n), \dots, x_n(n)\}$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть, как и в модели работы [10], время t дискретно. Будем считать, что в момент $t = 1$ в каждой точке $x_i(n)$ находится одна частица с номером i . В точке $x_1 = x_1(n)$ располагается активная частица, а во всех остальных располагаются неактивные. В каждый момент времени активная частица совершает скачок с вероятностью $p > 0$ независимо от всех остальных активных частиц, при этом, если частица совершила скачок, то вероятность попадания в каждую точку равна $1/n$. Иными словами, любая активная частица совершает случайное блуждание по вершинам полного графа. Схема взаимодействия активных и неактивных частиц та же, что в [10]. Однако если несколько частиц в один момент времени совершают скачки в одну и ту же точку с неактивной частицей, то все они остаются живы, а неактивная частица становится активной. Таким образом, с ненулевой вероятностью найдутся моменты времени, в которые в некоторых точках будет находиться по две и более активных частиц. Неактивные и активные частицы мы будем называть *живыми*.

Введем некоторые обозначения и формализуем описанную модель. Будем считать, что рассматриваемые случайные величины заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть величина $A_n(t)$ равна количеству активных частиц в момент времени t , а $D_n(t)$, как и ранее, равна количеству неактивных частиц. Положим $\mathcal{F}_n(t) =$

$\sigma(D_n(t), A_n(t))$. Количество частиц, совершивших скачок в момент времени t , обозначим $Y_n(t)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}_n(t) = \{\zeta_1^A(t), \dots, \zeta_{A_n(t)}^A(t)\}$, $\mathcal{D}_n(t) = \{\zeta_1^D(t), \dots, \zeta_{D_n(t)}^D(t)\}$, $\mathcal{Y}_n(t) = \{\zeta_1^Y(t), \dots, \zeta_{Y_n(t)}^Y(t)\}$ — соответственно множество активных частиц, множество неактивных частиц в момент t и множество частиц, совершивших скачок в момент t . Выполнены равенства $\mathcal{A}_n(1) = \{1\}$, $\mathcal{D}_n(1) = \{2, 3, \dots, n\}$, $\mathbf{P}(\mathcal{Y}_n(1) = \{1\}) = p$, $\mathbf{P}(\mathcal{Y}_n(1) = \emptyset) = 1 - p$. Кроме того, $\mathcal{Y}_n(t) \subset \mathcal{A}_n(t)$ и справедливо следующее соотношение:

$$\forall t \in \mathbf{N} \forall a \in \mathbf{N} \forall k \in \{0, 1, \dots, a\} \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, a\}$$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{Y}_n(t) = \{\zeta_{i_1}^A(t), \dots, \zeta_{i_k}^A(t)\} \mid A_n(t) = a\right) = p^k (1 - p)^{a-k}. \quad (1)$$

Определим также случайное подмножество $\mathcal{Z}_n^+(t)$ частиц, совершивших скачки в точки с неактивными частицами, распределенное по следующему закону:

$$\forall t \in \mathbf{N} \forall d, y \in \{1, 2, \dots, n\} \forall k \in \{0, 1, \dots, y\} \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, y\}$$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{Z}_n^+(t) = \{\zeta_{i_1}^Y(t), \dots, \zeta_{i_k}^Y(t)\} \mid Y_n(t) = y, D_n(t) = d\right)$$

$$= (dn^{-1})^k (1 - dn^{-1})^{y-k}.$$

Пусть $\mathcal{Z}_n^-(t) = \mathcal{Y}_n(t) \setminus \mathcal{Z}_n^+(t)$, $Z_n(t) = |\mathcal{Z}_n^+(t)|$, где $|X|$ — мощность множества X .

Для каждого $z, d \in \mathbf{N}$ и всех $\delta_1, \dots, \delta_d \in \{x_1, \dots, x_n\}$ определим случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_z$ на множестве $\{Z_n(t) = z, \mathcal{D}_n(t) = \{\delta_1, \dots, \delta_d\}\}$, распределение которых задано следующим образом:

$$\forall j \in \{1, \dots, z\} \forall \{i_1, \dots, i_j\} \subset \{1, \dots, z\} \forall k_1, \dots, k_j \in \{1, 2, \dots, d\}$$

$$\mathbf{P}\left(\eta_{i_1} = k_1, \dots, \eta_{i_j} = k_j \mid Z_n(t) = z, \mathcal{D}_n(t) = \{\delta_1, \dots, \delta_d\}\right) = d^{-j}.$$

Иными словами, $\eta_1, \dots, \eta_z$ — это номера частиц, находящихся в момент t в точках, в которые прыгают в этот же момент частицы из $\mathcal{Z}_n^+(t)$. Тогда для любого $\omega \in \Omega$ справедливы равенства

$$\mathcal{A}_n[t+1](\omega) = \mathcal{A}_n[t](\omega) \cup \text{Dif}\left(\{\zeta_{\eta_1(t)(\omega)}^D, \dots, \zeta_{\eta_{Z_n[t](\omega)}^D}^D(\omega)\}\right) \setminus \mathcal{Z}_n^-[t](\omega), \quad (2)$$

$$\mathcal{D}_n[t+1](\omega) = \mathcal{D}_n[t](\omega) \setminus \text{Dif}\left(\{\zeta_{\eta_1(t)(\omega)}^D, \dots, \zeta_{\eta_{Z_n[t](\omega)}^D}^D(\omega)\}\right). \quad (3)$$

где $\text{Dif}(X)$ — множество всех различных элементов в X .

Как и в модели «с одним скачком», рассмотренной в работе [10], σ_n — момент, в который процесс $A_n(t)$ останавливается, т.е. $\sigma_n = \min\{t \in \mathbf{N} : A_n(t) = 0\}$. Если $A_n(t) > 0$ для всех $t \in \mathbf{N}$, то положим

$\sigma_n = 0$. Мы изучаем предельное распределение количества частиц, которые были активированы в ходе процесса, т.е. случайной величины $X_n = n - D_n(\sigma_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Данная статья состоит из введения и двух частей. В первой из них формулируются основные результаты, а во второй даются их доказательства.

2. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы, относящийся к закону больших чисел.

Теорема 1. Для любого $\gamma > 3/4$ справедливо соотношение

$$(X_n - \mathbf{E} X_n) n^{-\gamma} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Кроме того, для любого $\gamma < 3/4$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E} X_n| > n^\gamma) > 0.$$

З а м е ч а н и е. Данный результат оптимален в том смысле, что (4) не выполнено при $\gamma < 3/4$. Отметим также, что сходимость по вероятности в (4) нельзя заменить на сходимость почти наверное, как показывает следующее утверждение.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}(X_n - \mathbf{E} X_n) = 0\right) = 0. \quad (5)$$

Из тождества (5), очевидно, следует, что сходимость по вероятности в (4) нельзя заменить на сходимость почти наверное ни при каком $\gamma \leq 1$.

3. Доказательства. Мы начнем с доказательства леммы 1 по двум причинам. Во-первых, оно простое. Во-вторых, интерес к доказательству сходимости по вероятности возрастает, когда нет сходимости почти наверное.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Очевидно, что $\mathbf{P}(X_n = 1) = p/n$. Учитывая независимость случайных величин $X_1, X_2, \dots$, по лемме Бореля–Кантелли имеем $\mathbf{P}(\forall k \exists n \geq k: X_n = 1) = 1$. Но соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}(X_n(\omega) - \mathbf{E} X_n) = 0$ не выполнено ни для какого $\omega \in \{\forall k \exists n \geq k: X_n = 1\}$, так как $\mathbf{E} X_n$ имеет порядок n (в п. 3.4 будет показано, что существуют такие положительные числа c и n_0 , что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство $\mathbf{E} X_n > cn$). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Возьмем произвольные $\alpha \in (0, 1/2)$, $\delta \in (0, \infty)$. Разобьем отрезок $[1, \sigma_n]$ на два промежутка. По истечении первого периода времени $t_\alpha(n) = [(1/2 - \alpha) \log_{1+p} n]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, с вероятностью, стремящейся к 1, будет активировано $n^{1/2-\alpha} + o(n^{1/4+\delta})$ частиц, а все остальные частицы будут

живы. В п. 3.1 мы рассмотрим первый промежуток времени. Основным результатом этого пункта мы сформулируем в виде леммы. Зависимость между рассматриваемыми в этом пункте случайными величинами достаточно слаба. Благодаря этому удастся доказать упомянутую лемму. Несмотря на то что при $t > t_\alpha(n)$ зависимость усиливается, нам удалось построить независимые случайные величины, которые позволили использовать схемы суммирования независимых случайных величин и доказать теорему 1. В п. 3.2 мы рассмотрим второй промежуток времени и получим оценки для отклонения случайных величин $A_n(t)$, $D_n(t)$ от их условного математического ожидания $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_n(t-1))$ для каждого момента времени t из этого промежутка. Наконец, в п. 3.3 мы выведем на основе результатов пп. 3.1, 3.2 рекуррентные соотношения для случайных величин $A_n(t)$ и $n - D_n(t)$, с помощью которых в п. 3.4 докажем первую часть утверждения теоремы 1 (про сходимости к нулю). Завершим доказательство теоремы в п. 3.5.

3.1. Первые скачки. Весь этот пункт мы посвятим доказательству сформулированной ниже леммы. Положим $B_n(t) = A_n(t) + D_n(t)$. Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $\delta > 0$.

Лемма 2. *Имеем*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\left|A_n(t_\alpha(n)) - n^{1/2-\alpha}\right| < n^{1/4+\delta}, B_n(t_\alpha(n)) = n\right) = 1.$$

Кроме того, для любого $\mu > 0$ при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\min\left\{\left|A_n(t_\alpha(n)) - n^{1/2-\alpha}\right|, \left|n - D_n(t_\alpha(n)) - n^{1/2-\alpha}\right|\right\} > n^{1/4-\alpha/2-\delta}\right) \\ > \frac{1}{2} - \mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $c \in (0, (-\ln p)/(2(1 - \ln p)))$. При $n \geq 2$ положим

$$\begin{aligned} y(n) &= \ln^{-1/2}(pc \ln^2 \ln n), \quad J_n(t) = \mathbf{N} \cap [\ln^2 \ln n, t], \\ t_\alpha^-(n) &= \left\lceil t_\alpha(n)(1 - y(n)) - \ln^2 \ln n \right\rceil, \quad t_\alpha^+(n) = \left\lceil t_\alpha(n)(1 + y(n)) + \ln^2 \ln n \right\rceil. \end{aligned}$$

Для функции $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ введем обозначение $\Delta f(i) = f(i+1) - f(i)$. Определим вспомогательные события:

$$\begin{aligned} W_n^1 &= \left\{ \#\{t \in \{1, \dots, \lfloor \ln^2 \ln n \rfloor\}: Y_n(t) > 0\} \geq pc \ln^2 \ln n \right\}, \\ W_n^2(t) &= \{B_n(t) = n\}, \quad \widetilde{W}_n^1 = W_n^1 \cap W_n^2(\lfloor \ln^2 \ln n \rfloor), \\ W_n^3(t) &= \left\{ \forall i \in J_n(t) \left((A_n(i) > 1) \wedge \left(|\Delta A_n(i)(A_n(i)p)^{-1} - 1| \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \leq \ln^{-1/2}(A_n(i)) \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_n^3(t) &= \left\{ \forall i \in J_n(t) \left((A_n(i) > 1) \wedge \left(|Y_n(i)(A_n(i)p)^{-1} - 1| \leq \ln^{-2}(A_n(i)) \right) \right) \right\}, \\ W_n^4(t) &= \left\{ \forall i \in J_n(t) \left((Y_n(i) > 1) \wedge \left(|\Delta A_n(i)(Y_n(i))^{-1} - 1| \leq \ln^{-2/3}(A_n(i)) \right) \right) \right\}.\end{aligned}$$

Здесь $\sharp \mathcal{A}$ обозначает мощность конечного множества $\mathcal{A}$. В дальнейшем мы покажем, что мера $\mathbf{P}$ каждого из этих множеств при $t \leq t_\alpha^+(n)$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Для любого $i \in \mathbf{N}$ рассмотрим множества

$$\begin{aligned}W_n^{3,i} &= \left\{ (A_n(i) > 1) \wedge \left(|Y_n(i)(A_n(i)p)^{-1} - 1| \leq \ln^{-2}(A_n(i)) \right) \right\}, \\ W_n^{4,i} &= \left\{ (Y_n(i) > 1) \wedge \left(|\Delta A_n(i)(Y_n(i))^{-1} - 1| \leq \ln^{-2/3}(A_n(i)) \right) \right\}\end{aligned}$$

и установим некоторые их свойства.

P1. При $t > \ln^2 \ln n$ имеем

$$\mathbf{P} \left(W_n^3(t) \cap W_n^2(t) \mid \widetilde{W}_n^1 \right) = \mathbf{P} \left(W_n^3(t) \cap W_n^2(t) \cap W_n^1 \mid \mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1) \right)^{-1}.$$

P2. При достаточно больших n и $t > \ln^2 \ln n$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P} \left(W_n^3(t) \mid \widetilde{W}_n^1 \right) \geq \mathbf{P} \left(\widetilde{W}_n^3(t) \cap W_n^4(t) \mid \widetilde{W}_n^1 \right).$$

P3. Для любого $t > \ln^2 \ln n$ справедливы равенства

$$\bigcap_{i=\lfloor \ln^2 \ln n \rfloor}^t W_n^{3,i} = \widetilde{W}_n^3(t), \quad \bigcap_{i=\lfloor \ln^2 \ln n \rfloor}^t W_n^{4,i} = W_n^4(t).$$

Свойства P2 и P3 очевидны. Свойство P1 выполнено благодаря убыванию семейства $\{W_n^2(t), t \in \mathbf{N}\}$. Семейство $\{W(t) \in \mathcal{F}, t \in T \subset \mathbf{R}\}$ называется убывающим, если из того, что $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, следует, что $W(t_1) \supseteq W(t_2)$.

Доказательство того, что рассмотренные множества имеют достаточно большую меру, проведем следующим образом. Вначале мы покажем, что вероятность $\mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1)$ стремится к 1, затем мы установим аналогичное свойство для вероятностей $\mathbf{P}(W_n^2(t_\alpha^+(n)) \mid \widetilde{W}_n^1)$ и $\mathbf{P}(\widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n)) \mid \widetilde{W}_n^1)$, после чего сделаем вывод, что вероятность $\mathbf{P}(W_n^4(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^1)$ также стремится к 1. Если описанные сходимости имеют место, то из свойств P1 и P2 следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(W_n^1 \cap W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^3(t_\alpha^+(n)) \right) = 1. \quad (7)$$

Итак, начнем с $\mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1)$. Для $0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $k > np$ справедливо неравенство Чернова (см. [12]) $\sum_{i \geq k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \leq$

$\exp(-(np - k)^2/(2np))$. Поэтому для некоторого $\epsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(\overline{W_n^1}) \leq \sum_{i=0}^{[pc \ln^2 \ln n]} C_{[\ln^2 \ln n]}^i (1-p)^{[\ln^2 \ln n]-i} = O(e^{-\epsilon \ln^2 \ln n}),$$

$$\mathbf{P}\left(\overline{W_n^2([\ln^2 \ln n])}\right) \leq p \ln^2 \ln n (2^{\ln^2 \ln n} n^{-1}) = o(n^{-1+\delta}).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1) = 1$. Обратимся теперь к $\mathbf{P}(W_n^2(t_\alpha^+(n)) | \widetilde{W}_n^1)$. Покажем, что за время $t_\alpha^+(n)$ будет активировано не более $n^{1/2-\beta}$ частиц для любого $\beta \in (0, \alpha)$. Для всех положительных $\epsilon < 1 - p$, $\delta < 1 - (1/2)(p + \epsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(n - D_n(t_\alpha^+(n)) > n^{1/2-\beta} | \widetilde{W}_n^1\right) \\ & \leq 1 - \mathbf{P}\left(\forall t \in J_n(t_\alpha^+(n)) \left((- \Delta D_n(t) \leq A_n(t)p(1 + \epsilon)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \wedge (\Delta A_n(t) \geq 0)\right) | \widetilde{W}_n^1\right) \\ & \leq \sum_{t=[\ln^2 \ln n]}^{t_\alpha^+(n)} \left(\mathbf{P}(\Delta A_n(t) < 0 | \mathscr{W}_n(t) \cap \widetilde{W}_n^1) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{P}(-\Delta D_n(t) > A_n(t)p(1 + \epsilon) | \mathscr{W}_n(t) \cap \widetilde{W}_n^1) \right) \\ & \leq t_\alpha^+(n) \max_{t \in J_n(t_\alpha^+(n))} \left\{ 2\mathbf{P}(\mathscr{W}_n^0(t) | \mathscr{W}_n^1(t)) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{P}\left(\overline{\mathscr{W}_n^0(t)} \cap \{\Delta A_n(t) > 0\} | \mathscr{W}_n^1(t)\right) \right\} \\ & \leq t_\alpha^+(n) \max_{t \in J_n(t_\alpha^+(n))} \left\{ 2\mathbf{P}(\mathscr{W}_n^0(t) | \mathscr{W}_n^1(t)) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{P}\left(-\Delta D_n(t) \leq \frac{p + \epsilon}{2} A_n(t) | \mathscr{W}_n^1(t)\right) \right\} \\ & \leq t_\alpha^+(n) \left(2 \exp\left(-\frac{1}{2} \epsilon^2 c \ln^2 \ln n\right) + \exp\left(-\left(1 - \delta - \frac{p + \epsilon}{2}\right)^2 \frac{c \ln^2 \ln n}{2p}\right) \right) \\ & = o((\ln n)^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$\mathscr{W}_n(t) = \bigcap_{i \in J_n(t) \setminus \{t\}} \left\{ (-\Delta D_n(i) \leq A_n(i)p(1 + \epsilon)) \wedge (\Delta A_n(i) \geq 0) \right\},$$

$$\mathscr{W}_n^0(t) = \{Y_n(t) > A_n(t)(p + \epsilon)\}, \quad \mathscr{W}_n^1(t) = \mathscr{W}_n(t) \cap \widetilde{W}_n^1.$$

Последнее неравенство в цепочке получено с помощью неравенства Чернова.

Тогда для любого $\beta \in (0, \alpha)$ приходим к оценке

$$\mathbf{P}\left(W_n^2(t_\alpha^+(n)) | \widetilde{W}_n^1\right) \geq 1 - \sum_{t=[\ln^2 \ln n]}^{t_\alpha^+(n)} \mathbf{P}\left(\Delta B_n(t) < 0 | \widetilde{W}_n^1\right) = 1 + o(\ln^{-1} n).$$

Перейдем к доказательству соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n))) = 1$. Пусть $t \leq t_\alpha^+(n)$, $0 < \beta < \alpha$, $1 - n^{-1/2-\beta} < v = v(n) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_i^A(t) \in \mathcal{Z}_n^+(t) \mid \{i \leq A_n(t)\} \cap \{D_n(i) = vn\} \cap W_n^1 \cap W_n^2(t+1)) \\ = pv(1-p+pv)^{-1}, \end{aligned}$$

при этом $p(1-n^{-1/2-\beta}) \leq pv(1-p+pv)^{-1} < p$. Поэтому в силу неравенства Чернова

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\overline{W}_n^{3,t} \mid W_n^1 \cap W_n^2(t+1)) \\ \leq \max_{m \in \{[pc \ln^2 \ln n], \dots, [n^{1/2-\beta}] + 1\}} \left\{ 2e^{-pm/\ln^4 m} \right\} + o(\ln^{-1} n) = o(\ln^{-1} n). \end{aligned}$$

Следовательно, согласно свойству РЗ, для некоторой константы $C > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widetilde{W}_n^3(x_n) \mid \widetilde{W}_n^1) \\ \geq \mathbf{P}(\widetilde{W}_n^3(x_n) \mid W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^1) \mathbf{P}(W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^1) (\mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1))^{-1} \\ \geq \mathbf{P}(W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^1) (\mathbf{P}(\widetilde{W}_n^1))^{-1} - C \ln^{-1/2} n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть $\mathbf{P}(W_n^4(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^1)$. Семейства $\{W_n^2(t), t \in \mathbf{N}\}$, $\{\widetilde{W}_n^3(t), t \in \mathbf{N}\}$ убывают, поэтому существуют такие числа $C_1, C_2, C_3 \in (0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\overline{W}_n^4(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^1) \\ \leq \sum_{t=[\ln^2 \ln n]}^{t_\alpha^+(n)} \mathbf{P}(\overline{W}_n^{4,t} \cap W_n^2(t+1) \cap \widetilde{W}_n^3(t) \cap \widetilde{W}_n^1) \\ \leq t_\alpha^+(n) \max_{g \in G} \left\{ e^{g(C_1 g^2 / (n - C_1 g))} \left(\frac{g}{n - C_1 g} \right)^{C_2 g / \ln g} \right\} \\ \leq t_\alpha^+(n) \max_{g \in G} \left\{ e^{g(C_1 g^2 / (n - C_1 g) - C_3)} \right\} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G = \mathbf{N} \cap \left[p^2 c \ln^2 \ln n (1 - \ln^{-2} \ln \ln n) (1 - \ln^{-2/3} \ln \ln n), \right. \\ \left. pn^{1/2-\alpha} (1 + \ln^{-1} n) \right]. \end{aligned}$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_n^4(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^3(t_\alpha^+(n)) \cap \widetilde{W}_n^1) = 1$. Равенство (7) доказано.

Пусть t_n — момент пересечения процессом $A_n(t)$ уровня $n^{1/2-\alpha}$. Тогда на множестве $\widetilde{W}_n^1 \cap W_n^2(t_\alpha^+(n)) \cap W_n^3(t_\alpha^+(n))$ значения такой случайной величины сосредоточены в интервале $(t_\alpha^-(n), t_\alpha^+(n))$, так как

$$\begin{aligned} & 2^{\ln^2 \ln n} ((1+p)(1+y(n)))^{t_\alpha^-(n) - \ln^2 \ln n} \\ & < n^{1/2-\alpha} < p c \ln^2 \ln n ((1+p)(1-y(n)))^{t_\alpha^+(n) - \ln^2 \ln n}. \end{aligned}$$

Иными словами, с вероятностью, стремящейся к 1, при $t < t_\alpha^-(n)$ выполнено неравенство $n - D_n(t) < n^{1/2-\alpha}$, а при $t > t_\alpha^+(n)$ — неравенство $n - D_n(t) > n^{1/2-\alpha}$. Кроме того, на каждом шаге $t \in [t_\alpha^-(n), t_\alpha^+(n)]$ условная вероятность $\mathbf{P}(\cdot | \widetilde{W}_n^1 \cap W_n^2(t+1) \cap W_n^3(t))$ того, что количество новых активированных частиц отклоняется от математического ожидания более чем на $\sqrt[4]{n} \ln n$, равна $o(1/n)$ в соответствии с неравенством Чернова. Поэтому для любого $\delta > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \left| n - D_n(t_\alpha(n)) - n^{1/2-\alpha} \right| \\ & \leq n^{1/4} \ln n \exp \left(\ln(1+p)(2 \ln^2 \ln n + 2t_\alpha(n)y(n)) \right) < n^{1/4+\delta}. \end{aligned}$$

Положим $W_n^{-1} = \widetilde{W}_n^1 \cap W_n^2(t_\alpha(n) - 1) \cap W_n^3(t_\alpha(n) - 1)$. Из центральной предельной теоремы Ляпунова (см., например, [13, с. 455]) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(D_n(t_\alpha(n)) - \mathbf{E} \left(D_n(t_\alpha(n)) \mid \mathcal{F}_n(t_\alpha(n) - 1) \right) \geq n^{1/4-\alpha-\delta} \mid W_n^{-1} \right) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(D_n(t_\alpha(n)) - \mathbf{E} \left(D_n(t_\alpha(n)) \mid \mathcal{F}_n(t_\alpha(n) - 1) \right) \leq -n^{1/4-\alpha-\delta} \mid W_n^{-1} \right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\mu > 0$ при достаточно больших n справедливо (6). Лемма доказана.

3.2. Второй период времени. Рассмотрим произвольный момент $t = t(n)$ из промежутка $(t_\alpha^-(n), \infty)$ и исследуем, как изменяется количество активных частиц в этот момент времени. Нас будет интересовать, какое количество частиц совершает скачки в точки с неактивными частицами, сколько всего частиц совершает скачки и как много окажется различных неактивных частиц, активированных в момент t . Текущий пункт мы посвятим доказательству того, что с вероятностью, стремящейся к 1, выполнены приводимые в конце пункта неравенства (13) и (14).

Начнем с изучения распределения количества активированных частиц. Введем функции $s = s(n)$, $u = u(n)$, $\nu_1 = \nu_1(n)$, $\dots$, $\nu_s = \nu_s(n)$, определенные для $n \in \mathbf{N}$ и принимающие натуральные значения. В дальнейшем $\nu_1, \dots, \nu_s$ будут служить номерами частиц, совершивших

скачки в точки с неактивными частицами в момент t . Пусть для некоторой положительной константы C неравенство $u(n) \geq Cn$ справедливо сразу для всех n . Пусть, кроме того, для каждого $n \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства $\nu_1(n) < \dots < \nu_s(n)$. Введем множество $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(n) = \{\mathcal{Z}_n^+(t) = \{\zeta_{\nu_1}^Y, \dots, \zeta_{\nu_s}^Y\}\} \cap \{D_n(t) = u\}$. Пусть $\xi(\nu_i)$ — случайные величины, равные на множестве $\tilde{\Omega}$ индексам точек, в которые были совершены скачки частицами $\zeta_{\nu_i}^Y$, $i \in \{1, \dots, s\}$. Рассмотрим случайные величины $\chi_1 = \chi_1(n), \dots, \chi_s = \chi_s(n)$, равные нулю на множестве $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$. На множестве $\tilde{\Omega}$ величины $\chi_1, \dots, \chi_s$ определим равенствами

$$\chi_1 = \sum_{k=1}^s I(\xi(\nu_1) = \dots = \xi(\nu_k))(k-1), \quad (8)$$

$$\chi_j = \sum_{k=\sum_{l=1}^{j-1} \chi_l + j + 1}^s I\left(\xi(1), \dots, \xi(k) \in \left\{\xi(1), \dots, \xi\left(\sum_{l=1}^{j-1} \chi_l + j\right)\right\}\right)k, \quad (9)$$

где $j \in \{2, \dots, s\}$, $I(A)$ — индикатор события A .

Рассмотрим вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, где $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \tilde{\Omega}$ и $\tilde{\mathbf{P}}(A) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(\tilde{\Omega})$ для $A \in \tilde{\mathcal{F}}$. Нас будет интересовать поведение случайных величин $\chi_1^* = \chi_1^*(n), \dots, \chi_s^* = \chi_s^*(n)$, заданных на пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ равенствами $\chi_i^*(\omega) = \chi_i(\omega)$, где $\omega \in \tilde{\Omega}$, $i \in \{1, \dots, s\}$.

Представим, что помимо s частиц имеется еще счетное количество дополнительных частиц $\zeta_{s+1} = \zeta_{s+1}(n), \zeta_{s+2} = \zeta_{s+2}(n), \dots$. Каждая из них совершает скачок независимо от остальных, при этом попадает с вероятностью $1/u$ в любую точку с неактивной частицей. Иными словами, мы рассматриваем σ -алгебру $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \sigma(\hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_{u-1}))$, где случайные величины $\hat{\chi}_i = \hat{\chi}_i(n)$, $i \in \{1, \dots, u-1\}$, определяются равенствами (8) и (9) для $j \in \{2, \dots, u-1\}$. Очевидно, что соотношение $\hat{\chi}_j = \chi_j^*$ выполнено на множестве $\{\chi_1^* + \dots + \chi_j^* + j < s\}$ для всякого $j \in \{1, \dots, s\}$. Пусть $\hat{\mathbf{P}}$ — такая вероятностная мера, определенная на множествах из $\tilde{\mathcal{F}}$, что $\hat{\mathbf{P}}(A) = \tilde{\mathbf{P}}(A)$ для любого $A \in \tilde{\mathcal{F}}$. Пусть случайная величина $\rho = \rho(n)$, заданная на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, равна количеству частиц, активированных в рассматриваемый момент времени t . Тогда $\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_\rho + \rho = s$. Кроме того, для всякого натурального $h < s$ имеем

$$\tilde{\mathbf{P}}(\chi_1^* + \dots + \chi_h^* + h < s) = \hat{\mathbf{P}}(\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_h + h < s).$$

Тогда $\tilde{\mathbf{P}}(\rho > h) = \hat{\mathbf{P}}(\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_h + h < s)$. Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\rho < h) = \hat{\mathbf{P}}(\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_h + h \geq s) \leq \frac{\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{P}}}(\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_h + h)}{(s - \mathbf{E}_{\hat{\mathbf{P}}}(\hat{\chi}_1 + \dots + \hat{\chi}_h + h))^2}.$$

Так как случайные величины $\hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_h$ являются независимыми, то

$$\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{P}}}\left(\sum_{i=1}^h \hat{\chi}_i + h\right) = u \ln \frac{u}{u-h} + O(1),$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i=1}^h \hat{\chi}_i\right) = u\left(\frac{h}{u-h} - \ln \frac{u}{u-h}\right) + O(1).$$

Поэтому при $\tilde{h} = u(1 - e^{-s/u})$ для любого $\delta > 0$ существует такая константа $\vartheta_1 = \vartheta_1(\delta) > 0$, что сразу для всех n, s и u таких, что $\tilde{h} > n^{1/2-\alpha}$, имеет место неравенство

$$\tilde{\mathbf{P}}(|\rho - \tilde{h}| > \tilde{h}^{1/2+\delta}) \leq \vartheta_1 s h^{-1-2\delta} \leq \vartheta_1 n^{-\delta(1/2-\alpha)}. \quad (10)$$

Пусть известно количество активных частиц в момент t , а количество частиц, совершивших скачки в точки с неактивными частицами, неизвестно. Иными словами, пусть $w: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, причем $w(n) > n^{1/2-\alpha}$, $w(n) < u(n)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Для каждой частицы вероятность попасть в точку с неактивной частицей при условии $\{D_n(t) = u\}$ равна $pu n^{-1}$, а в другую точку — $p(n-u)n^{-1}$. Положим $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_1(n) = \{D_n(t) = u, A_n(t) = w\}$. Из неравенства Берри–Эссеена (см. [13, с. 505–507], [14, с. 157–158]) следует существование такой константы $\vartheta_2 > 0$, что для всех $n \in \mathbf{N}$, $n > e^{2/(1-2\alpha)}$

$$\mathbf{P}\left(|-\Delta B_n(t) - wp(n-u)n^{-1}| \leq \sqrt{w} \ln \ln w \mid \tilde{\Omega}_1\right) \geq 1 - \vartheta_2 (\ln w \ln \ln w)^{-1}. \quad (11)$$

В силу (10) для s частиц, совершивших скачки в точки с неактивными частицами, количество частиц, совершивших скачки в различные точки, с вероятностью $1 - \vartheta_1 n^{-\delta(1/2-\alpha)}$ находится в интервале $(\tilde{h} - \tilde{h}^{1/2+\delta}, \tilde{h} + \tilde{h}^{1/2+\delta})$. Иными словами, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\vartheta > 0$, что сразу для всех $n \in \mathbf{N}$ (достаточно больших, чтобы можно было взять логарифм)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|-\Delta D_n(t) - u(1 - e^{-pw/n})\right| \leq \left(u(1 - e^{-pw/n})\right)^{1/2+\delta} \mid \tilde{\Omega}_1\right) \\ \geq 1 - \vartheta (\ln n \ln \ln n)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенств (11) и (12), очевидно, следует, что соотношения

$$\begin{aligned} \left|\Delta(n - D_n(t)) - D_n(t)(1 - e^{-pA_n(t)/n})\right| \\ \leq \left(D_n(t)(1 - e^{-pA_n(t)/n})\right)^{1/2+\delta}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left|\Delta A_n(t) + p(n - D_n(t))A_n(t)n^{-1} - D_n(t)(1 - e^{-pA_n(t)/n})\right| \\ \leq \sqrt{A_n(t) \ln \ln A_n(t)} + \left(D_n(t)(1 - e^{-pA_n(t)/n})\right)^{1/2+\delta} \end{aligned} \quad (14)$$

выполнены с вероятностью, превосходящей $1 - \vartheta (\ln n \ln \ln n)^{-1}$. Теперь мы получили все необходимые утверждения о поведении частиц. Обратимся к оценке интересующих нас случайных величин. Вначале (в п. 3.3) по индукции оценим количество активных частиц и неактивных частиц, а затем (в п. 3.4) — величину X_n .

3.3. Оценка количества активных частиц. Пусть δ — произвольное положительное число. Для всех $i \in [t_\alpha(n), \infty) \cap \mathbf{N}$ положим

$$\begin{aligned} z_n^{(1)}(t_\alpha(n)) &= z_n^{(2)}(t_\alpha(n)) = n^{1/2-\alpha}, & r_n^{(1)}(t_\alpha(n)) &= r_n^{(2)}(t_\alpha(n)) = n^{1/4+\delta}, \\ z_n^{(1)}(i+1) &= z_n^{(1)}(i) + \left(n - z_n^{(1)}(i)\right) \left(1 - \exp(-pz_n^{(2)}(i)n^{-1})\right), \\ z_n^{(2)}(i+1) &= z_n^{(2)}(i) \left(1 - pz_n^{(1)}(i)n^{-1}\right) \\ &\quad + \left(n - z_n^{(1)}(i)\right) \left(1 - \exp(-pz_n^{(2)}(i)n^{-1})\right). \end{aligned}$$

Прежде чем получить оценки на количество активных и неактивных частиц, изучим поведение функций $z_n^{(1)}(i)$ и $z_n^{(2)}(i)$.

Лемма 3. Пусть $C_1 \in (1/2, 18/35)$ — некоторая константа, $p_0 = (4-p)/(8-p)$. Пусть, кроме того, для некоторого $i_0(n)$ выполнено неравенство $z_n^{(1)}(i_0(n)) \leq C_1 n$ для всех n . Тогда

$$\exists H > 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall i \in [t_\alpha(n), i_0] \quad \frac{z_n^{(1)}(i+1)}{z_n^{(1)}(i)} \geq H. \quad (15)$$

Итак, пусть $z_n^{(1)}(i_0(n)) \leq C_1 n$, $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n)+1, \dots, i_0(n)\}$. Заметим, что $z_n^{(2)}(i) \leq n/2$, так как функция $z_n^{(2)}(i)$ убывает при всех i таких, что $z_n^{(1)}(i) \geq n/2$, а $z_n^{(2)}(i) \leq z_n^{(1)}(i)$. Поэтому справедливо неравенство

$$(n - z_n^{(1)}(i)) \left(1 - \exp(-pz_n^{(2)}(i)n^{-1})\right) \geq p \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(z_n^{(2)}(i) - z_n^{(1)}(i)z_n^{(2)}(i)n^{-1}\right).$$

Пусть после i_1 -го шага $z_n^{(2)}(i)$ уменьшается, тогда в силу полученного неравенства имеем $p(1-p/4) < p(2-p/4)z_n^{(1)}(i_1)n^{-1}$, $z_n^{(1)}(i_1) > np_0$. Покажем, что

$$z_n^{(2)}(i_1) > \frac{np_0}{5}. \quad (16)$$

Если $z_n^{(1)}(i) < np_0/2$, то, так как функция $8(8-p)/(6-p)^2$ возрастает на отрезке $[0, 1]$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{z_n^{(1)}(i+1) - z_n^{(1)}(i)}{z_n^{(2)}(i+1) - z_n^{(2)}(i)} &< \frac{p(1 - z_n^{(1)}(i)n^{-1})}{p(1-p/4)(1 - z_n^{(1)}(i)n^{-1}) - pz_n^{(1)}(i)n^{-1}} \\ &< \frac{8(8-p)}{(6-p)^2} < \frac{56}{25}, \\ z_n^{(2)}(i_1) &> \frac{25}{56} \frac{np_0}{2} > \frac{np_0}{5}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом неравенства $z_n^{(2)}(i+1) > z_n^{(2)}(i)(1 + p(4-p)/4 - p(8-p)C_1/4) > z_n^{(2)}(i)\rho$, где $\rho = 1 - p(2+p)/10$, справедливы для любого $i > i_1$, так как $C_1 < 3/5$. Выберем $i_2(n)$ такое, что

$$z_n^{(1)}(i_2) \geq n \left(p_0 + \frac{p(4-p)p_0}{20} \cdot 2(1 - \rho^{i_2-i_1})(5(1-\rho))^{-1} \right) > C_1 n.$$

Существование упомянутого i_2 обеспечивается неравенством (16), а также цепочкой соотношений

$$p_0 + \frac{p(4-p)p_0}{50} (1-\rho)^{-1} = p_0 (1 + (4-p)(5(2+p))^{-1}) \geq \frac{18}{35}, \quad (18)$$

где последнее неравенство выполнено, так как функция, фигурирующая в левой части (18), убывает на отрезке $[0, 1]$. Подходящее значение i_2 найдем из следующей оценки:

$$\rho^{i_2 - i_1} < (4p + 14)(4 - p)^{-1} - 5C_1(2 + p)(8 - p)(4 - p)^{-2}.$$

Положим

$$i_2 = i_1 + \left\lceil \ln^{-1} \rho \ln \left((4p + 14)(2(4 - p))^{-1} - 5C_1(2 + p)(8 - p)(2(4 - p))^{-2} \right) \right\rceil.$$

Тогда в силу (17)

$$z_n^{(2)}(i_2) > z_n^{(2)}(i_1) \rho^{i_2 - i_1 - 1} > n(5(8 - p))^{-1} (4p + 14 - 5C_1(2 + p)(8 - p)(4 - p)^{-1}).$$

Окончательно заметим, что для всех $i \leq i_2$

$$z_n^{(1)}(i + 1) \geq z_n^{(1)}(i) + p \left(1 - \frac{p}{4} \right) \left(z_n^{(2)}(i) - z_n^{(1)}(i) z_n^{(2)}(i) n^{-1} \right) \geq z_n^{(1)}(i) + C_2 n,$$

где

$$C_2 = (1 - C_1) p \left(1 - \frac{p}{4} \right) (5(8 - p))^{-1} (4p + 14 - 5C_1(2 + p)(8 - p)(4 - p)^{-1}).$$

Таким образом, лемма 3 доказана.

Легко заметить, что при $i > C_1 n$ функция $z_n^{(2)}(i)$ экспоненциально убывает по i . Поэтому для любого положительного $\kappa < 1$ найдется $i_\kappa = i_\kappa(n) = O(n)$ такое, что $z_n^{(2)}(i_\kappa) = O(n^\kappa)$, $z_n^{(1)}(i_\kappa) \geq C_1 n$. При этом, если $\kappa_m \rightarrow 1$, $m \rightarrow \infty$ и для некоторого $i = i(n)$ справедливы неравенства $z_n^{(2)}(i) \geq cn$, $z_n^{(1)}(i) \leq n/2$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то $(i_{\kappa_m} - i)/\ln n \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) при каждом $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 4. Для любых $\lambda_1 > \lambda > 0$ найдутся такие числа $\kappa, \kappa_1 \in (3/4, 1)$, $\kappa_1 < \kappa$, натуральные числа $i_\kappa = i_\kappa(n)$, $i_{\kappa_1} = i_{\kappa_1}(n)$, $i_{3/4} = i_{3/4}(n)$, $i_\kappa \leq i_{\kappa_1} \leq i_{3/4}$, а также такое множество $\Omega_n \subset \Omega$, что $\mathbf{P}(\Omega_n) \geq 1 - o(\ln^{-1} \ln n)$. Кроме того, для каждого $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n) + 1, \dots, i_{3/4} - 1\}$ и всех $\omega \in \Omega_n^1$ выполнены неравенства

$$\left| n - D_n(i) - z_n^{(1)}(i) \right| \leq r_n^{(1)}(i), \quad \left| A_n(i) - z_n^{(2)}(i) \right| \leq r_n^{(2)}(i), \quad (19)$$

где $r_n^{(1)}, r_n^{(2)}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — функции, для которых справедливы следующие свойства.

I. Имеют место соотношения $z_n^{(2)}(i_\kappa) \leq n^\kappa$, $z_n^{(1)}(i_\kappa) < n/2$ и

$$r_n^{(1)}(i_\kappa) \left(r_n^{(1)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1} = r_n^{(2)}(i_\kappa) \left(r_n^{(2)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1} \leq n^\lambda z_n^{(1)}(i_\kappa) \left(z_n^{(1)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1}.$$

II. Справедливы неравенства $z_n^{(2)}(i_{\kappa_1}) \leq n^{\kappa_1}$, $z_n^{(1)}(i_{\kappa_1}) \geq C_1 n$ и $r_n^{(1)}(i_{\kappa_1}) \leq n^{\lambda_1} r_n(i_\kappa)$.

III. Для любого $i \in \{i_{\kappa_1}, i_{\kappa_1} + 1, \dots, i_{3/4} - 1\}$ найдется такое число $c > 0$, что

$$r_n^{(1)}(i + 1) \leq r_n^{(1)}(i)(1 + cn^{\kappa_1 - \kappa}). \quad (20)$$

Доказательство. Из свойств функций $z_n^{(1)}(i)$, $z_n^{(2)}(i)$ вытекает, что найдется такое натуральное число $i_{3/4} = i_{3/4}(n)$, что $z_n^{(2)}(i_{3/4}) \leq n^{3/4}$, $z_n^{(1)}(i_{3/4}) \geq C_1 n$. Возьмем в качестве множества $\tilde{\Omega}_n(t_\alpha(n))$ множество из формулировки леммы 2, мера которого стремится к 1. Пусть κ — такое число, что $z_n^{(2)}(i_\kappa) \leq n^\kappa$, $z_n^{(1)}(i_\kappa) < n/2$. Если неравенства (19) выполнены для шага с номером $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n) + 1, \dots, i_\kappa - 1\}$, то согласно п. 3.2 найдется множество $\Omega_n(i + 1) \subset \Omega_n(i)$ такое, что

$$\mathbf{P}(\Omega_n(i + 1)) \geq (1 - \vartheta(\ln \ln n \ln n)^{-1}) \mathbf{P}(\Omega_n(i)) \quad (21)$$

и для каждого $\omega \in \Omega_n(i + 1)$ в силу (14)

$$\begin{aligned} & \left| A_n(i + 1) - z_n^{(2)}(i + 1) \right| \\ & \leq \left| -pz_n^{(2)}(i)r_n(i)n^{-1} + (n - z_n^{(1)}(i))e^{-pz_n^{(2)}(i)/n}(1 - e^{-pr_n(i)/n}) \right. \\ & \quad \left. + r_n(i) \left(1 - p(z_n^{(1)}(i) + r_n(i))n^{-1} \right) - r_n(i) \left(1 - e^{-p(z_n^{(2)}(i) + r_n(i))/n} \right) \right| \\ & \quad + (pA_n(i))^{1/2+\delta} \\ & \leq (n - z_n^{(1)}(i))(1 - e^{-pr_n(i)/n})e^{-pz_n^{(2)}(i)/n} + r_n(i) \left(1 + n^{-(\delta/2 + \alpha/2 + \alpha\delta)} \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, в силу (13)

$$\begin{aligned} & \left| n - D_n(i + 1) - z_n^{(2)}(i + 1) \right| \\ & \leq \left(n - z_n^{(1)}(i) \right) \left(1 - e^{-pr_n(i)/n} \right) e^{-pz_n^{(2)}(i)/n} + r_n(i) \left(1 + n^{-(\delta/2 + \alpha/2 + \alpha\delta)} \right). \end{aligned}$$

Поэтому мы можем считать, что $r_n^{(1)}(i + 1) = r_n^{(2)}(i + 1) = r_n(i + 1)$,

$$\begin{aligned} r_n(i + 1) &= \left(n - z_n^{(1)}(i) \right) \left(1 - e^{-pr_n(i)/n} \right) e^{-pz_n^{(2)}(i)/n} \\ &\quad + r_n(i) \left(1 + n^{-(\delta/2 + \alpha/2 + \alpha\delta)} \right). \end{aligned}$$

Используя это равенство, легко получить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c > 0$, что если $z_n^{(1)}(i) < cn$ для всех n , то $r_n(i + 1)(r_n(i))^{-1} < (1 + \varepsilon)z_n^{(1)}(i + 1)(z_n^{(1)}(i))^{-1}$. Из этого, в свою очередь, следует, что для

любого $\tilde{\lambda} > 0$ существует такое $c > 0$, что если $z_n^{(1)}(i) < cn$ для всех n , то $r_n(i)(r_n(t_\alpha(n)))^{-1} < n^{\tilde{\lambda}} z_n^{(1)}(i)(z_n^{(1)}(t_\alpha(n)))^{-1}$. Заметим, наконец, что $r_n(i+1) \leq (1+p)r_n^{(1)}(i)$. Поэтому, если $\kappa_m \rightarrow 1-0$, $m \rightarrow \infty$, то

$$r_n(i_{\kappa_m})(r_n(t_\alpha(n)))^{-1} < n^{\tilde{\lambda}+\lambda_m} z_n^{(1)}(i_{\kappa_m}) \left(z_n^{(1)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1},$$

где $\lambda_m \rightarrow +0$, $m \rightarrow \infty$. Свойство I доказано.

Согласно (13) и (14), для каждого $i \in \{i_\kappa, i_\kappa + 1, \dots, i_{3/4} - 1\}$ можно выбрать множество $\Omega_n(i+1) \subset \Omega_n(i)$ такое, что выполнено неравенство (21) и для всех $\omega \in \Omega_n(i+1)$ справедливы неравенства

$$\left| A_n(i+1) - z_n^{(2)}(i+1) \right| \leq r_n^{(1)}(i) + pr_n^{(2)}(i) \left(1 - z_n^{(1)}(i)n^{-1} \right) + \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{1/2+\delta}.$$

Поэтому мы можем считать, что

$$\begin{aligned} r_n^{(1)}(i+1) &= r_n^{(1)}(i) + pr_n^{(2)}(i) \left(1 - z_n^{(1)}(i)n^{-1} \right) + \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{1/2+\delta}, \\ r_n^{(2)}(i+1) &= r_n^{(2)}(i) \left(1 + p - 2pz_n^{(1)}(i)n^{-1} \right) + \left(2z_n^{(2)}(i) \right)^{1/2+\delta}. \end{aligned}$$

Следовательно, $r_n^{(1)}(i+1) \leq (1+p)r_n^{(1)}(i)$, т.е. в силу свойств $z_n^{(1)}(i)$, $z_n^{(2)}(i)$ найдется нужное число κ_1 (число κ при этом необходимо выбрать достаточно близким к 1). Свойство II доказано.

Для доказательства свойства III заметим, что существует такое число $C > 0$, что для каждого $i \in \{i_\kappa, i_\kappa + 1, \dots, i_{3/4} - 1\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} z_n^{(2)}(i+1) \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{-1} &\leq r_n^{(2)}(i+1) \left(r_n^{(2)}(i) \right)^{-1} \\ &\leq z_n^{(2)}(i+1) \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{-1} + C \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{\delta-1/4}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $z_n^{(2)}(i+1) \leq n^{\kappa_1}$, а $z_n^{(1)}(i+1) \geq C_1 n$, то для некоторого $\tilde{c} > 0$

$$r_n^{(2)}(i+1) \leq \tilde{c} n^{\kappa_1-\kappa} r_n^{(2)}(i_\kappa) = \tilde{c} n^{\kappa_1-\kappa} r_n^{(1)}(i_\kappa) \leq \tilde{c} n^{\kappa_1-\kappa} r_n^{(1)}(i+1).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} r_n^{(1)}(i+1) &= r_n^{(1)}(i) + pr_n^{(2)}(i) \left(1 - z_n^{(1)}(i)n^{-1} \right) + \left(z_n^{(2)}(i) \right)^{1/2+\delta} \\ &\leq r_n^{(1)}(i)(1 + cn^{\kappa_1-\kappa}) \end{aligned}$$

для некоторого $c > 0$. В качестве множества Ω_n возьмем пресечение множеств $\Omega_n(i)$ по $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n) + 1, \dots, i_{3/4}\}$. Лемма 4 доказана.

3.4. Оценка количества умерших частиц. Из леммы 4 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $i_{3/4} \in \mathbf{N}$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left((A_n(i_{3/4}) \leq n^{3/4}) \wedge \left(|n - D_n(i_{3/4}) - z_n^{(1)}(i_{3/4})| \leq n^{3/4+\varepsilon}\right)\right) \\ \geq 1 - \vartheta \ln^{-1} \ln n, \end{aligned}$$

при этом $z_n^{(1)}(i_{3/4}) \geq C_1 n$.

Пусть $\tilde{\sigma}_n$ — такой момент времени, что $n - D_n(\tilde{\sigma}_n) \geq C_1 n$, $A_n(\tilde{\sigma}_n) \leq \ln^2 n$ и $A_n(\tilde{\sigma}_n + 1) > \ln^2 n$. Пусть, кроме того $\hat{\sigma}_n = \max\{\tilde{\sigma}_n, i_{3/4}\}$. Опираясь на неравенство Чернова и неравенство $C_1 > 1/2$, легко показать, что найдется число $\tilde{C} > 0$, для которого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left((\hat{\sigma}_n \leq \tilde{C} \ln n) \wedge (D_n(i_{3/4}) - D_n(\hat{\sigma}_n) \leq \tilde{C} n^{3/4})\right) = 1.$$

Осталось доказать, что для любого $\delta > 0$ и некоторого числа $C > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left((\sigma_n - \hat{\sigma}_n \leq C \ln \ln n) \wedge (D_n(\hat{\sigma}_n) - D_n(\sigma_n) \leq C n^\delta)\right) = 1.$$

Рассмотрим ветвящийся процесс T_t , $t \in \mathbf{N}$ (см., например, [15, с. 125–126]): $T_1 = \tau_1^1$, $T_t = \tau_1^t + \dots + \tau_{T_{t-1}}^t$, где $\tau_i^j \in \{0, 1, 2\}$, $i, j \in \{1, 2, \dots\}$ — независимые одинаково распределенные величины, $\mathbf{P}(\tau_1^1 = 0) = pC_1$, $\mathbf{P}(\tau_1^1 = 1) = 1 - p$, $\mathbf{P}(\tau_1^1 = 2) = p(1 - C_1)$. Докажем по индукции, что вероятность вырождения такого процесса в момент t не меньше, чем $1 - (1 + p - 2pC_1)^t$. Для момента 1 это очевидно: $pC_1 > 2pC_1 - p$. Производящая функция случайной величины τ_1^1 имеет вид $P(x) = pC_1 + (1 - p)x + p(1 - C_1)x^2$. Поэтому, если в момент t вероятность вырождения не меньше этой величины, то в момент $t + 1$ вероятность вырождения не превосходит

$$P(1 - (1 + p - 2pC_1)^t) < 1 - (1 + p - 2pC_1)^{t+1}.$$

Но вероятность смерти одной частицы в любой момент, больший $i_{3/4}$, превышает pC_1 , поэтому за время t с вероятностью, превосходящей $1 - (1 + p - 2pC_1)^t$, погибнут все потомки этой частицы. Следовательно, $\ln^2 n$ частиц умрут за время t с вероятностью большей, чем $1 - \ln^2 n (1 + p - 2pC_1)^t$. Так как $C_1 > 1/2$, то найдется такое число $C > 0$, что при $t = [C \ln n \ln n]$ выполнено соотношение $1 - \ln^2 n (1 + p - 2pC_1)^t = 1 + o(1)$. Кроме того,

$$D_n(\sigma_n) \leq D_n(\hat{\sigma}_n + t) + (\ln^2 n) \cdot 2^t \leq D_n(\hat{\sigma}_n + t) + C n^\delta$$

с вероятностью, стремящейся к 1. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(|X_n - z_n^{(1)}(i_{3/4})| \leq n^{3/4+\varepsilon}\right) = 1.$$

Можно показать, что это равенство сохранится, если $z_n^{(1)}(i_{3/4})$ заменить на $\mathbf{E} X_n$. Подробное доказательство этого факта мы здесь не приводим, поскольку оно достаточно объемное и при этом не представляет отдельного интереса (подобное рассуждение мы уже проделывали в п. 3.1). Суть заключается в следующем. Можно показать, что с вероятностью $1 + O(n^{\psi-1/4})$, где $\psi > \alpha$, найдется момент времени, в который будет активировано $n^{1/2-\alpha} + r$ частиц, где $|r| \leq n^{1/4-\alpha/2+\delta}$. Далее оценки из п. 3.2 можно улучшить таким образом, чтобы неравенства (21) приобрели вид $\mathbf{P}(\Omega_n(i+1)) \geq (1 - \vartheta(n^{1/4-\psi} \ln n)^{-1}) \mathbf{P}(\Omega_n(i))$. Тогда $|X_n - z_n^{(1)}(i_{3/4})| \leq n^{3/4+\varepsilon}$ с вероятностью $1 + O(n^{\psi-1/4})$. Поэтому при достаточно больших n имеем

$$\left(z_n^{(1)}(i_{3/4}) - n^{3/4+\varepsilon}\right) \left(1 - n^{\psi-1/4}\right) \leq \mathbf{E} X_n \leq z_n^{(1)}(i_{3/4}) + n^{3/4+\varepsilon} + n \cdot n^{\psi-1/4}.$$

Следовательно, для любого $\psi > 0$ при достаточно больших n

$$z_n^{(1)}(i_{3/4}) - n^{3/4+\psi} \leq \mathbf{E} X_n \leq z_n^{(1)}(i_{3/4}) + n^{3/4+\psi}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E} X_n| \leq n^{3/4+\varepsilon}) = 1$.

3.5. Оптимальность показателя степени. Пусть $R_n^{(1)}(t_\alpha(n)) = R_n^{(2)}(t_\alpha(n)) = n^{1/4-\alpha/2-\delta}$, где $\delta > 0$ — произвольное число.

Лемма 5. Для любых $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon \in (0, 3/4)$, $\varrho \in (0, 1)$ найдутся такие натуральные числа $i_\varrho = i_\varrho(n)$, $j_\varrho = j_\varrho(n)$, $i_{3/4-\varepsilon} = i_{3/4-\varepsilon}(n)$, а также такое множество $\tilde{\Omega}_n$, что при достаточно больших n выполнено неравенство $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}_n) > 1/2 - \mu$. Кроме того, для всех $\omega \in \tilde{\Omega}_n$ и $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n) + 1, \dots, i_{3/4-\varepsilon}\}$ справедливы неравенства

$$\left|n - D_n(i) - z_n^{(1)}(i)\right| \geq R_n^{(1)}(i), \quad \left|A_n(i) - z_n^{(2)}(i)\right| \geq R_n^{(2)}(i), \quad (22)$$

причем

$$\begin{aligned} z_n^{(2)}(j_\varrho) &\geq n^\varrho, & \frac{n}{2} > z_n^{(1)}(j_\varrho) &\geq n^\varrho, & z_n^{(2)}(i_\varrho) &\leq n^\varrho, \\ z_n^{(1)}(i_\varrho) &\geq C_1 n, & z_n^{(2)}(i_{3/4-\varepsilon}) &\leq n^{3/4-\varepsilon}, & z_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon}) &\geq C_1 n, \end{aligned}$$

а величина $R_n^{(1)}(i)$ обладает следующими свойствами.

IV. Выполнено неравенство $R_n^{(1)}(j_\varrho)(R_n^{(1)}(t_\alpha(n)))^{-1} \geq n^{-\lambda} z_n^{(1)}(j_\varrho) \times (z_n^{(1)}(t_\alpha(n)))^{-1}$.

V. Найдется такое число $c > 0$, что $R_n^{(1)}(i+1) \geq c R_n^{(1)}(i)$ при $i \in \{j_\varrho, j_\varrho + 1, \dots, i_\varrho\}$.

VI. Для любого $\epsilon > 0$ при достаточно больших n и $i \in \{i_\varrho, i_\varrho + 1, \dots, i_{3/4-\varepsilon}\}$ имеет место неравенство $R_n^{(1)}(i+1) \geq (1 - \epsilon) R_n^{(1)}(i)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость неравенств (22) мы установим по индукции. Базой индукции служит утверждение леммы 2. Возьмем в качестве $\tilde{\Omega}_n(t_\alpha(n))$ множество из формулировки леммы 2, мера которого стремится к 1. Пусть $\epsilon > 0$, $\tilde{q} \in (0, 1)$ — произвольные числа. Найдутся такие числа $i_\epsilon, j_\epsilon, i_{3/4-\epsilon}$, что

$$n^{(1+\epsilon)/2} \geq z_n^{(2)}(j_\epsilon) \geq n^\epsilon, \quad \frac{n}{2} > z_n^{(1)}(j_\epsilon) \geq n^\epsilon, \quad z_n^{(2)}(i_\epsilon) \leq n^\epsilon, \\ z_n^{(1)}(i_\epsilon) \geq C_1 n, \quad z_n^{(2)}(i_{3/4-\epsilon}) \leq n^{3/4-\epsilon}, \quad z_n^{(1)}(i_{3/4-\epsilon}) \geq C_1 n.$$

Тогда существует такое число $N_0 \in \mathbf{N}$, что если соотношения (22) выполнены для некоторого шага с номером $i \in \{t_\alpha(n), t_\alpha(n) + 1, \dots, j_\epsilon - 1\}$, то в силу неравенства (13) найдется множество $\tilde{\Omega}_n(i + 1) \subset \tilde{\Omega}_n(i)$ такое, что

$$\mathbf{P}(\tilde{\Omega}_n(i + 1)) \geq (1 - \vartheta(\ln \ln n \ln n)^{-1}) \mathbf{P}(\tilde{\Omega}_n(i)) \quad (23)$$

и при $n > N_0$ неравенство $|n - D_n(i + 1) - z_n^{(1)}(i + 1)| \geq (1 - \epsilon)(1 + p)R_n^{(1)}(i)$ справедливо для каждого $\omega \in \tilde{\Omega}_n(i + 1)$. Поэтому мы можем считать, что $R_n^{(1)}(i + 1) = (1 - \epsilon)(1 + p)R_n^{(1)}$, а в качестве множества $\tilde{\Omega}_n$ взять $\bigcap_{i=t_\alpha(n)}^\epsilon \tilde{\Omega}_n(i + 1)$. С другой стороны, $z_n^{(1)}(i + 1) \leq z_n^{(1)}(i)(1 + p)$. Следовательно, $R_n^{(1)}(i + 1)(R_n^{(1)}(i))^{-1} \geq (1 - \epsilon)z_n^{(1)}(i + 1)(z_n^{(1)}(i))^{-1}$. Тогда для некоторого $h > 0$, не зависящего от ϵ ,

$$R_n^{(1)}(j_\epsilon) \left(R_n^{(1)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1} \geq (1 - \epsilon)^{h \ln n} z_n^{(1)}(j_\epsilon) \left(z_n^{(1)}(t_\alpha(n)) \right)^{-1}.$$

Если в качестве ϵ взять $1 - e^{-\lambda/h}$, то мы получим свойство IV.

Существует такое число $N_1 \in \mathbf{N}$, что если соотношения (22) выполнены для шага с номером $i \in \{j_\epsilon, j_\epsilon + 1, \dots, i_\epsilon - 1\}$, то в силу (13) найдется такое множество $\tilde{\Omega}_n(i + 1) \subset \tilde{\Omega}_n(i)$, что неравенства (23) и

$$(1 - \epsilon)^{-1} |n - D_n(i + 1) - z_n^{(1)}(i + 1)| \\ \geq R_n^{(1)}(i) \left(1 - p \left(z_n^{(2)}(i) + R_n^{(2)}(i) \right) n^{-1} \right) \\ + R_n^{(1)}(i) \left(n - z_n^{(1)}(i) \right) \left(1 - p z_n^{(2)}(i) n^{-1} \right) p R_n^{(2)}(i) n^{-1} \\ \geq (1 - \epsilon) \left(1 - \frac{p}{2} \right) R_n^{(1)}(i)$$

справедливы при $n > N_1$ и для каждого $\omega \in \tilde{\Omega}_n(i + 1)$. Поэтому мы можем считать, что $R_n^{(1)}(i + 1) = (1 - \epsilon)^2 (1 - p/2) R_n^{(1)}(i)$. Свойство V доказано.

Рассмотрим, наконец, отрезок $[i_\epsilon, i_{3/4-\epsilon}]$. Существует такое число $N_2 \in \mathbf{N}$, что если соотношения (22) выполнены для шага с номером

$i \in \{i_\varrho, i_\varrho + 1, \dots, i_{3/4-\varepsilon}\}$, то согласно п. 3.2 найдется такое множество $\tilde{\Omega}_n(i+1) \subset \tilde{\Omega}_n(i)$, что неравенства (23) и

$$\begin{aligned} \left| n - D_n(i+1) - z_n^{(1)}(i+1) \right| &\geq (1-\epsilon) \left(R_n^{(1)}(i) + \left(n - z_n^{(1)}(i) \right) p R_n^{(2)}(i) n^{-1} \right) \\ &\geq (1-\epsilon) R_n^{(1)}(i) \end{aligned}$$

справедливы при $n > N_2$ и для каждого $\omega \in \tilde{\Omega}_n(i+1)$. Свойство VI доказано.

Из леммы 5 следует, что $|n - D_n(i_{3/4-\varepsilon}) - z_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon})| \geq R_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon})$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, для некоторого $h > 0$ и любых $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ и последовательности $\{\mu_m\}_{m \in \mathbf{N}}$, $\mu_m > 0$, $\mu_m \rightarrow 0$, найдется последовательность $\{\varrho_m\}_{m \in \mathbf{N}}$, $\varrho_m \in (0, 1)$, $\varrho_m \rightarrow 1$ такая, что выполнено неравенство

$$R_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon}) \geq n^{1/4-\alpha/2-\delta} n^{-\lambda} n^{\varrho_m} n^{\alpha-1/2} c^{\mu_m \ln n} (1-\epsilon)^{h \ln n}.$$

Следовательно, $\mathbf{P}(|n - D_n(i_{3/4-\varepsilon}) - z_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon})| \geq n^{3/4-\psi}) > 1/2 - \mu$ для любых $\psi > 0$, $\mu > 0$ и при всех достаточно больших n . Наконец, в п. 3.4 было показано, что найдется такое число $c > 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(D_n(i_{3/4-\varepsilon}) - D_n(\sigma_n) \leq cn^{3/4-\varepsilon}) = 1.$$

Поэтому для любых $\psi > 0$ и $\mu > 0$ при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left(|n - D_n(\sigma_n) - z_n^{(1)}(i_{3/4-\varepsilon})| \geq n^{3/4-\psi}\right) > \frac{1}{2} - \mu.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что последнее равенство влечет отличие от нуля всех частичных пределов последовательности $\{\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E} X_n| \geq n^{3/4-\psi})\}_{n \in \mathbf{N}}$. Это верно, поскольку для любого $i \in \{t_\alpha(n), \dots, i_{3/4-\varepsilon}\}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n - D_n(i) - z_n^{(1)}(i) > R_n^{(1)}(i)) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n - D_n(i) - z_n^{(1)}(i) < -R_n^{(1)}(i)) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи, всестороннее обсуждение результатов и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alves O., Machado F., Popov S. Phase transition for the frog model. — Electron. J. Probab., 2002, v. 7, paper № 16, 21 p.

2. *Lebensztayn E., Machado F., Popov S.* An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees. — J. Statist. Phys., 2005, v. 119, № 1–2, p. 331–345.
3. *A Alves O., Machado F., Popov S.* The shape theorem for the frog model. — Ann. Appl. Probab., 2002, v. 12, № 2, p. 533–546.
4. *Kurkova I., Popov S., Vachkovskaia M.* On infection spreading and competition between independent random walks. — Electron. J. Probab., 2004, v. 9, paper № 11, p. 293–315.
5. *Popov S.* Frogs in random environment. — J. Statist. Phys., 2001, v. 102, № 1–2, p. 191–201.
6. *Ramírez A.F., Sidoravicius V.* Asymptotic behavior of a stochastic combustion growth process. — J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 2004, v. 6, № 3, p. 293–334.
7. *Telcs A., Wormald N.* Branching and tree indexed random walks on fractals. — J. Appl. Probab., 1999, v. 36, № 4, p. 999–1011.
8. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 212 p.
9. *Bollobás B., Riordan O.M.* Mathematical results on scale-free random graphs. — Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet. Ed. by S. Bornholdt and H. G. Schuster. Weinheim: Wiley-VCH, 2003, p. 1–34.
10. *Machado F., Mashurian H., Matzinger H.* CLT for the proportion of infected individuals for an epidemic model on a complete graph. — Markov Process. Related Fields, 2011, v. 17, № 2, p. 209–224.
11. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985.
12. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
13. *Ширяев А. Н.* Вероятность, т. 1. М.: МЦНМО, 2007, 551 с.
14. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
15. *Буллинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 402 с.

Поступила в редакцию
14.XI.2011

Исправленный вариант
13.VIII.2012