Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кварацхелия, В. И. Тариеладзе, Диагонально канонические гауссовские случайные элементы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 282–297

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:43:30

© 2013 г. КВАРАЦХЕЛИЯ В. В.*, ТАРИЕЛАДЗЕ В. И.*

ДИАГОНАЛЬНО КАНОНИЧЕСКИЕ ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ¹⁾

Посвящается 80-летию академика Н. Н. Вахания

Гауссовский случайный элемент η со значениями в банаховом пространстве X с базисом Шаудера $\mathbf{e} = (e_n)$ назовем диагонально каноническим (для краткости D -каноническим) относительно базиса $\mathbf{e}$, если распределение η совпадает с распределением случайного элемента вида $B\xi$, где ξ — гауссовский случайный элемент со значениями в X , компоненты которого относительно базиса $\mathbf{e}$ стохастически независимы, и $B: X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор. В данной статье мы доказываем, что если $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$ и $p \neq 2$, или $X = c_0$, то существует гауссовский случайный элемент η в X , который не является D -каноническим относительно естественного базиса X . Мы выводим этот результат в случае $X = l_p$, $2 < p < \infty$, или $X = c_0$ из следующего утверждения, аналог которого ранее был известен для некоторых банаховых пространств, не обладающих безусловным базисом Шаудера: если $X = l_p$, $2 < p < \infty$, или $X = c_0$, то существует гауссовский случайный элемент η в X такой, что распределение η не совпадает с распределением суммы почти наверное сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ в X , где (x_n) — безусловно суммируемая последовательность элементов в X и (g_n) — последовательность стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Ключевые слова и фразы: диагонально канонический гауссовский случайный элемент, безусловно канонический гауссовский случайный элемент, гауссовский ковариационный оператор, котип банаховых пространств, r -ядерный оператор, суммирующий оператор, гауссовское среднее свойство, gl_2 -банаховы пространства.

1. Введение. Поводом для написания данной работы стал следующий вопрос проф. Н. Н. Вахания, заданный авторам этой статьи.

Вопрос 1.1. Пусть X — одно из пространств l_p , $1 \leq p < \infty$, или c_0 , и пусть η — гауссовский случайный элемент со значениями

*Институт вычислительной математики им. Н. И. Мухелишвили Грузинского технического университета, Тбилиси, Грузия; v.kvaratskhelia@yahoo.com; vajatarieladze@yahoo.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда им. Шота Руставели (грант GNSF/ST09-99-3-104).

в X . Найдутся ли гауссовский случайный элемент ξ со значениями в X , имеющий стохастически независимые компоненты, и линейное непрерывное отображение $B: X \rightarrow X$ такие, что $B\xi = \eta$ п.н. или $B\xi$ имеет то же самое распределение, что и η ?

Мы даем отрицательный ответ на данный вопрос в случаях, когда $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, и $X = c_0$. Наше доказательство основано на результатах и понятиях, которые имеют самостоятельный интерес. Среди них — описание гауссовских распределений в пространствах l_p , $1 \leq p < \infty$ [1], [2], ковариационный оператор [3]–[5] и другие важные разработки Н. Н. Вахания.

Во втором пункте приведены основные понятия, нужные для дальнейшего изложения, введено понятие диагонально канонического гауссовского случайного элемента в банаховом пространстве с базисом Шаудера и рассмотрены случаи, когда ответ на вопрос 1.1 положителен.

В п. 3 доказывается, что не все гауссовские случайные элементы в пространстве l_p , $1 \leq p < 2$, являются диагонально каноническими относительно естественного базиса (теорема 3.2).

В п. 4 мы сначала вводим понятие безусловно канонического гауссовского случайного элемента в произвольном банаховом пространстве (определение 4.1), затем доказываем, что в банаховом пространстве с безусловным базисом каждый диагонально канонический гауссовский случайный элемент является безусловно каноническим (предложение 4.1(c)), и, наконец, показываем, что не все гауссовские случайные элементы в l_p , $2 < p < \infty$, являются безусловно (и, следовательно, диагонально) каноническими (теорема 4.5).

Пункт 5 содержит доказательство утверждения, что не все гауссовские случайные элементы в c_0 являются безусловно (и, следовательно, диагонально) каноническими (теорема 5.2).

2. D-канонические случайные элементы. Мы рассматриваем только действительные векторные пространства и центрированные гауссовские случайные элементы. Норму в банаховом пространстве X обозначим через $\|\cdot\|$. Для банахова пространства X сопряженное пространство X^* снабжено дуальной нормой. Значение функционала $x^* \in X^*$ на $x \in X$ обозначим через $\langle x, x^* \rangle$. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве обозначим через $(\cdot | \cdot)$. Для базиса Шаудера $e = (e_n)$ банахова пространства X обозначим через $e^* = (e_n^*)$ его биортogonalную последовательность в X^* .

Говорят, что случайный элемент η со значениями в банаховом пространстве X имеет *конечный ранг*, если существует конечномерное векторное подпространство X_0 пространства X такое, что $\eta \in X_0$ почти наверное (п.н.).

Пусть X — банахово пространство с базисом Шаудера e . Мы бу-

дем говорить, что гауссовский случайный элемент η со значениями в X является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$, если распределение η совпадает с распределением случайного элемента вида $B\xi$, где ξ — гауссовский случайный элемент в X , для которого $\mathbf{e}$ -компоненты $\langle \xi, e_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, являются стохастически независимыми, и $B: X \rightarrow X$ есть линейное непрерывное отображение.

Предложение 2.1. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство с базисом Шаудера $\mathbf{e} = (e_n)$ и η — центрированный гауссовский случайный элемент конечного ранга в X . Тогда η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Доказательство. Зафиксируем наименьшее (относительно теоретико-множественного включения $\subset$) конечномерное векторное подпространство X_0 пространства X такое, что $\eta \in X_0$ п.н.

Если $X_0 = \{0\}$, то η очевидно является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Если $\dim X_0 = 1$, то для некоторых $0 \neq x_1 \in X_0$ и стандартной гауссовской случайной величины g_1 имеем $\eta = x_1 g_1$ п.н. Положим $\xi = e_1 g_1$ и рассмотрим отображение $B: X \rightarrow X$, определенное равенством

$$Bx = \langle x, e_1^* \rangle x_1, \quad x \in X.$$

Тогда $B\xi = \eta$ п.н. и, следовательно, η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Пусть теперь $\dim X_0 = n \geq 2$. Тогда $\eta = \sum_{k=1}^n x_k g_k$ п.н. для некоторых $x_1, \dots, x_n$ из X_0 и независимых стандартных гауссовских случайных величин $g_1, \dots, g_n$. Положим $\xi = \sum_{k=1}^n e_k g_k$ и рассмотрим отображение $B: X \rightarrow X$, определенное равенством

$$Bx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k^* \rangle x_k, \quad x \in X.$$

Тогда $B\xi = \eta$ п.н. Следовательно, и в этом случае η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$. Предложение 2.1 доказано.

Мы опускаем несложное доказательство следующего предложения.

Предложение 2.2. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство с базисом Шаудера (e_n) и η — центрированный гауссовский случайный элемент в X , который является D -каноническим относительно базиса (e_n) . Тогда:

(а) если $t_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, то η является D -каноническим относительно базиса $(t_n e_n)$;

(б) если (e'_n) — базис Шаудера пространства X , который эквивалентен базису (e_n) , то η является D -каноническим относительно базиса (e'_n) .

Рассмотрим теперь случай гильбертова пространства.

Предложение 2.3. Пусть X — произвольное бесконечномерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\mathbf{e} = (e_n)$ и пусть η — центрированный гауссовский случайный элемент со значениями в X . Тогда η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Доказательство. Согласно предложению 2.1, мы можем предположить, что η не является случайным элементом конечного ранга. Тогда хорошо известно, что $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k$ п.н. для некоторой последовательности $x_1, \dots, x_n, \dots$, составленной из ненулевых попарно ортогональных элементов из X таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$, и для некоторых стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин $g_1, \dots, g_n, \dots$. Положим $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| e_k g_k$ и рассмотрим отображение $B: X \rightarrow X$, определенное равенством

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} (x | e_k) \frac{x_k}{\|x_k\|}, \quad x \in X.$$

Заметим, что B является линейной изометрией, поскольку $(x_k / \|x_k\|)$ есть ортонормированная последовательность в X . Тогда $B\xi = \eta$ п.н., и, следовательно, η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$. Предложение 2.3 доказано.

Следствие 2.1. Пусть X — произвольное бесконечномерное гильбертово пространство с безусловным базисом $\mathbf{e} = (e_n)$ и пусть η — центрированный гауссовский случайный элемент со значениями в X . Тогда η является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Доказательство. По предложению 2.2(а) можно считать, что безусловный базис (e_n) является нормированным. Известно, что произвольный нормированный безусловный базис гильбертова пространства эквивалентен произвольному ортонормированному базису (см., например, [8, с. 71]). Поэтому данное следствие вытекает из предложения 2.3 и предложения 2.2(б).

Замечание 2.1. Нам неизвестно, верно ли заключение следствия 2.1, если (e_n) — произвольный (т.е. не обязательно безусловный) базис гильбертова пространства X .

3. D -канонические случайные элементы в пространствах l_p , $1 \leq p < 2$. Пусть X — банахово пространство; говорят, что оператор $R: X^* \rightarrow X$ является:

— *ковариационным оператором* центрированного гауссовского случайного элемента ξ в X , если

$$\langle Rx_1^*, x_2^* \rangle = \mathbf{E} \langle \xi, x_1^* \rangle \langle \xi, x_2^* \rangle, \quad x_1^*, x_2^* \in X^*;$$

— гауссовской ковариацией, если существует гауссовский случайный элемент ξ в X с ковариационным оператором R .

Ясно, что если X — банахово пространство и $R: X^* \rightarrow X$ — гауссовская ковариация, то R симметричный (т.е. $\langle Rx_1^*, x_2^* \rangle = \langle Rx_2^*, x_1^* \rangle$ для всех $x_1^*, x_2^* \in X^*$) и положительный (т.е. $\langle Rx^*, x^* \rangle \geq 0$ для каждого $x^* \in X^*$) оператор.

Мы будем существенно использовать следующий результат.

Теорема 3.1 (см. [1], [2]). Пусть $1 \leq p < \infty$, $X = l_p$ и $e = (e_n)$ — естественный базис пространства X . В этом случае оператор $R: X^* \rightarrow X$ является гауссовской ковариацией тогда и только тогда, когда он симметричный, положительный и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Re_n^*, e_n^* \rangle^{p/2} < \infty.$$

Прежде чем сформулировать одно следствие теоремы 3.1, напомним следующее определение.

Пусть Y, Z — банаховы пространства, $0 < r \leq 1$. Линейный непрерывный оператор $S: Y \rightarrow Z$ называется r -ядерным, если существуют последовательности $y_n^* \in Y^*$, $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^*\|^r \|z_n\|^r < \infty, \quad Sy = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n^* \rangle z_n, \quad y \in Y.$$

Следствие 3.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $X = l_p$, $e = (e_n)$ — естественный базис пространства X , и пусть η — D -канонический относительно базиса e гауссовский случайный элемент со значениями в X . Тогда ковариационный оператор R_η случайного элемента η является $p/2$ -ядерным.

Доказательство. По определению, распределение η совпадает с распределением случайного элемента вида $B\xi$, где ξ есть гауссовский случайный элемент в X , у которого e -компоненты $\langle \xi, e_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, являются стохастически независимыми, и $B: X \rightarrow X$ — линейное непрерывное отображение.

Так как $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n^* \rangle e_n$, ясно, что

$$B\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n^* \rangle Be_n.$$

Поскольку гауссовские случайные величины $\langle \xi, e_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, центрированы и стохастически независимы, то из этого равенства получим

$$R_\eta x^* = R_{B\xi} x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle Be_n, x^* \rangle Be_n, \quad x^* \in X^*,$$

где

$$\sigma_n = (\mathbf{E} \langle \xi, e_n^* \rangle^2)^{1/2} = \langle R e_n^*, e_n^* \rangle^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как ξ есть гауссовский случайный элемент со значениями в X , то по теореме 3.1 имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_n^2 B e_n\|^{p/2} \|B e_n\|^{p/2} \leq \|B\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^p = \|B\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \langle R e_n^*, e_n^* \rangle^{p/2} < \infty.$$

Следовательно, R_η есть $p/2$ -ядерный оператор. Следствие 3.1 доказано.

Теперь применим следствие 3.1 для доказательства результата, сформулированного в аннотации данной работы, в случае $X = l_p$, $1 \leq p < 2$.

Теорема 3.2. Пусть $1 \leq p < 2$, $X = l_p$ и $\mathbf{e} = (e_n)$ — естественный базис пространства X . Тогда существует гауссовский случайный элемент η со значениями в X , который не является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Доказательство. Отдельно рассмотрим два случая.

Случай 1: $1 < p < 2$. Согласно [6, следствие 9(ii)], для каждого $0 < r < 1$ существует гауссовский случайный элемент η в X , ковариационный оператор которого не является r -ядерным. В частности, в X существует гауссовский случайный элемент η , ковариационный оператор которого не является $p/2$ -ядерным; согласно следствию 3.1, такой случайный элемент η не может быть D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Случай 2: $p = 1$. Согласно [7, теорема 1], в пространстве $X = l_1$ существует гауссовский случайный элемент η , ковариационный оператор которого не является $1/2$ -ядерным; согласно следствию 3.1, такой случайный элемент η не может быть D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Следствие 3.2. (а) Если $X = l_1$ и (e_n) — произвольный безусловный базис пространства X , то существует центрированный гауссовский случайный элемент η в X , который не является D -каноническим относительно базиса (e_n) .

(б) Если $1 < p < 2$, $X = l_p$ и (e_n) — произвольный симметрический базис пространства X , то существует центрированный гауссовский случайный элемент η в X , который не является D -каноническим относительно базиса (e_n) .

Доказательство. (а) По предложению 2.2(а) можно считать, что безусловный базис (e_n) является нормированным. Известно, что произвольный нормированный безусловный базис пространства X эквивалентен каноническому базису пространства X (см. [8, с. 71]).

Поэтому данное утверждение вытекает из теоремы 3.2 и предложения 2.2(b).

(b) По предложению 2.2(a) можно считать, что симметрический базис (e_n) является нормированным. Известно, что произвольный нормированный симметрический базис пространства X эквивалентен каноническому базису пространства X (см. [8, с. 129]). Поэтому, данное утверждение вытекает из теоремы 3.2 и предложения 2.2(b).

З а м е ч а н и е 3.1. Мы не знаем ответа на следующий вопрос относительно следствия 3.1. Пусть $1 \leq p < 2$, $X = l_p$, $e = (e_n)$ — естественный базис пространства X , и пусть η — гауссовский случайный элемент со значениями в X такой, что ковариационный оператор R_η случайного элемента η является $p/2$ -ядерным. Будет ли η D -каноническим относительно базиса e ?

З а м е ч а н и е 3.2. Следствие 3.2(b) оставляет открытым следующий вопрос. Пусть $1 < p < 2$, $X = l_p$, и пусть η — произвольный центрированный гауссовский случайный элемент со значениями в X . Существует ли безусловный базис в пространстве X , относительно которого η является D -каноническим?

4. U - и D -канонические случайные элементы в пространствах l_p , $2 < p < \infty$. Метод доказательства теоремы 3.2 не проходит в случае $2 < p < \infty$. В этом пункте мы разрабатываем способы, необходимые для получения отрицательного ответа на вопрос 1.1 в случае $2 < p < \infty$.

Следуя [9], мы скажем, что последовательность (x_n) элементов банахова пространства X является *безусловно суммируемой*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится безусловно в X .

Зафиксируем последовательность (g_n) стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Теорема 4.1 (см. [10]). *Для банахова пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *для каждой безусловно суммируемой последовательности (x_n) элементов пространства X ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ сходится п.н. в X ;*
- (ii) *X имеет конечный котип;*
- (iii) *для каждой безусловно суммируемой последовательности (x_n) элементов пространства X существует $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, такое, что для всех $\omega \in \Omega_0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n(\omega)$ сходится безусловно в X .*

Для произвольной суммируемой последовательности (x_n) в банаховом пространстве X ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ может не сходиться п.н. в X . Однако в общем случае верно следующее утверждение.

Теорема 4.2 (см. [11]). *Пусть (x_n) — безусловно суммируемая последовательность элементов банахова пространства X , для кото-*

рой п.н. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ в X . Тогда существует $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, такое, что для всех $\omega \in \Omega_0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n(\omega)$ сходится безусловно в X .

Этими результатами мотивируется следующее определение.

О п р е д е л е н и е 4.1. Гауссовский случайный элемент ξ со значениями в банаховом пространстве X назовем *безусловно каноническим* (для краткости *U-каноническим*), если существуют последовательность (x_n) элементов пространства X и последовательность (g_n) стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин такие, что:

- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится безусловно в X ;
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ сходится п.н. в X ;
- распределение ξ совпадает с распределением суммы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$.

Имеется следующая связь между безусловно каноническими и диагонально каноническими гауссовскими случайными элементами.

Предложение 4.1. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом Шаудера $\mathbf{e} = (e_n)$.

(а) [15, лемма 2.1]. Если $R: X^* \rightarrow X$ гауссовская ковариация, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \langle R e_n^*, e_n^* \rangle^{1/2} e_n$ сходится в X .

(б) Если ξ — гауссовский случайный элемент со значениями в X , для которого $\langle \xi, e_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, — центрированные и стохастически независимые случайные величины, то ξ есть *U-канонический гауссовский случайный элемент*.

(с) Если η есть *D-канонический относительно базиса $\mathbf{e}$ гауссовский случайный элемент* в X , то η есть *U-канонический гауссовский случайный элемент*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (б) Рассмотрим случайный элемент ξ , удовлетворяющий требованиям условия (б). Обозначим:

$$\sigma_n = (\mathbf{E} \langle \xi, e_n^* \rangle^2)^{1/2} = \langle R e_n^*, e_n^* \rangle^{1/2}, \quad x_n = \sigma_n e_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем последовательность (g_n) стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Имеем:

- согласно (а), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится безусловно в X ;
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ сходится п.н. в X , так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n^* \rangle e_n$ сходится к ξ в пространстве X и для каждого $n \in \mathbf{N}$ случайные элементы $\langle \xi, e_n^* \rangle e_n$ и $x_n g_n$ имеют одинаковые распределения;
- распределение ξ совпадает с распределением суммы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ по той же причине, что и в предыдущем случае.

(с) По определению, распределение η совпадает с распределением случайного элемента, имеющего вид $B\xi$, где ξ — гауссовский случайный элемент в X , чьи $\mathbf{e}$ -компоненты $\langle \xi, e_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, стохастически

независимы, и $B: X \rightarrow X$ есть линейное непрерывное отображение. Согласно (b), ξ есть U -канонический гауссовский случайный элемент в X . Отсюда очевидно вытекает, что $B\xi$ также является U -каноническим гауссовским случайным элементом в X .

Предложение 4.1 доказано.

Для полноты изложения мы приводим доказательство следующего известного результата.

Теорема 4.3. *В банаховом пространстве котипа 2 каждый гауссовский случайный элемент является U -каноническим.*

Доказательство. Пусть X — банахово пространство котипа 2 и η — гауссовский случайный элемент в X . Согласно [15, теорема 4.1], существует гауссовский случайный элемент ξ в l_2 и линейное непрерывное отображение $U: l_2 \rightarrow X$ такие, что распределение $U\xi$ совпадает с распределением η . По предложению 2.3, ξ является D -каноническим относительно естественного базиса в l_2 . Поэтому, по предложению 4.1(c), ξ является U -каноническим. Таким образом, $U\xi$ (и, следовательно, η) является U -каноническим.

З а м е ч а н и е 4.1. Следующий вопрос, связанный с предложением 4.1(c), имеет отрицательный ответ. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом Шаудера $e = (e_n)$ и η есть U -канонический гауссовский случайный элемент в X . Является ли η диагонально каноническим гауссовским случайным элементом относительно базиса e ?

В самом деле, пусть $1 \leq p < 2$ и $X = l_p$. Тогда по теореме 4.3, каждый гауссовский случайный элемент в X является U -каноническим, но по теореме 3.2 не каждый гауссовский случайный элемент в X является диагонально каноническим относительно естественного базиса пространства X .

Заметим, что п.н. непрерывная реализация винеровского процесса $(W_t)_{t \in [0,1]}$ индуцирует гауссовский случайный элемент в $X = C([0,1])$, который является безусловно каноническим [11].

Относительно отрицательных утверждений до сих пор был известен только следующий результат.

Теорема 4.4 (см. [12, с. 61, предложение]). *Существуют сепарабельное банахово пространство E и гауссовский случайный элемент η со значениями в E такие, что η не является U -каноническим.*

З а м е ч а н и е 4.2. В [12, с. 61–64] доказано, что в банаховом пространстве $E = K(l_2)$ всех компактных операторов в l_2 существует гауссовский случайный элемент, который не является U -каноническим. Пространство $K(l_2)$ имеет базис Шаудера, но не обладает безусловным базисом Шаудера и не имеет конечного котипа.

Имея в виду теорему 4.1 и замечание 4.2, можно было бы предположить, что в произвольном банаховом пространстве с безусловным базисом и конечным котипом каждый гауссовский случайный элемент является U -каноническим (см. [12, замечание 3, с. 63]). Следующее утверждение показывает, что это предположение неверно.

Теорема 4.5. Пусть $X = l_p$, $2 < p < \infty$, и $\mathbf{e} = (e_n)$ есть безусловный базис пространства X . Тогда:

- (а) существует гауссовский случайный элемент со значениями в X , который не является U -каноническим;
- (б) существует гауссовский случайный элемент со значениями в X , который не является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Из предложения 4.1(с) вытекает, что теорема 4.5(б) есть следствие теоремы 4.5(а).

Остальная часть данного пункта посвящается доказательству теоремы 4.5(а).

Предложение 4.2. Пусть X — банахово пространство, $E \subset X$ — измеримое по Борелю векторное подпространство, (x_n) — последовательность элементов в X и (ζ_n) — последовательность стохастически независимых симметрически распределенных действительных случайных величин таких, что:

- 1) $\mathbf{P}[\zeta_n = 0] < 1$, $n = 1, 2, \dots$,
 - 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \zeta_n$ сходится п.н. в X ,
 - 3) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \zeta_n \in E$ п.н.
- Тогда $x_n \in E$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Покажем, например, что $x_1 \in E$. Для остальных индексов доказательство аналогично.

Так как (ζ_n) есть последовательность стохастически независимых симметрически распределенных действительных случайных величин, то последовательности $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots)$ и $(\zeta_1, -\zeta_2, \dots, -\zeta_n, \dots)$ распределены одинаково. Отсюда следует, что случайные элементы $x_1 \zeta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n \zeta_n$ и $x_1 \zeta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} x_n \zeta_n$ распределены одинаково. Следовательно, согласно условию 3), $x_1 \zeta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} x_n \zeta_n \in E$ п.н. Теперь из соотношений $x_1 \zeta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n \zeta_n \in E$ и $x_1 \zeta_1 - \sum_{n=2}^{\infty} x_n \zeta_n \in E$ получим $2x_1 \zeta_1 \in E$ п.н. Из этого и из условия 1), поскольку E есть векторное подпространство, вытекает, что $x_1 \in E$.

Следствие 4.1. Пусть X — банахово пространство, $E \subset X$ — замкнутое векторное подпространство и ξ есть U -канонический гауссовский случайный элемент со значениями в X такой, что $\xi \in E$ п.н. Тогда ξ есть U -канонический гауссовский случайный элемент со значениями в E .

Доказательство. Так как ξ есть U -канонический гауссовский случайный элемент в X , то найдутся последовательность (x_n) эле-

ментов в X и последовательность (g_n) стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин такие, что для них выполнены условия определения 4.1. Поскольку $\xi \in E$ п.н. и распределение ξ совпадает с распределением суммы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$, имеем $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \in E$ п.н. По предложению 4.2, $x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда, поскольку E — замкнутое векторное подпространство пространства X , получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится безусловно в E и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$ сходится п.н. в E . Следовательно, ξ является U -каноническим гауссовским случайным элементом в E .

Следствие 4.2. Пусть X — банахово пространство такое, что каждый гауссовский случайный элемент со значениями в X является U -каноническим, и пусть $E \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда каждый гауссовский случайный элемент со значениями в E является U -каноническим.

Доказательство. Пусть ξ — гауссовский случайный элемент со значениями в E . Тогда ξ есть гауссовский случайный элемент со значениями также и в X . По предположению, ξ как гауссовский случайный элемент со значениями в X является U -каноническим. Тогда по следствию 4.1 можно заключить, что ξ является U -каноническим и как гауссовский случайный элемент со значениями в E . Следствие 4.2 доказано.

Пусть Y_1, Y_2, Y_3 — банаховы пространства. Линейный непрерывный оператор $T: Y_1 \rightarrow Y_3$ называется Y_2 -факторизуемым, если существуют линейные непрерывные операторы $T_1: Y_1 \rightarrow Y_2$ и $T_2: Y_2 \rightarrow Y_3$ такие, что $T = T_2 T_1$.

Лемма 4.1. Пусть X — банахово пространство, (x_n) — безусловно суммируемая последовательность элементов пространства X и $T: l_2 \rightarrow X$ — такой линейный непрерывный оператор, что

$$TT^*x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x^* \rangle x_n, \quad x^* \in X^*.$$

Тогда T есть c_0 -факторизуемый оператор.

Доказательство. Легко проверить, что равенство

$$Sh = \sum_{n=1}^{\infty} (h | e_k) x_k, \quad h \in l_2,$$

определяет линейный непрерывный оператор $S: l_2 \rightarrow X$ такой, что $SS^* = TT^*$. Из последнего равенства имеем

$$\|T^*x^*\|^2 = \|S^*x^*\|^2, \quad x^* \in X^*. \quad (4.1)$$

Определим отображение $V_0: S^*(X^*) \rightarrow T^*(X^*)$ с помощью равенства

$$V_0 S^* x^* = T^* x^*, \quad x^* \in X^*.$$

Из (4.1) легко следует, что V_0 — корректно определенная линейная изометрия из $S^*(X^*)$ в $T^*(X^*)$. Пусть $V: l_2 \rightarrow l_2$ — линейное непрерывное продолжение V_0 . Ясно, что $VS^* = T^*$ и, следовательно,

$$T = SV^*. \quad (4.2)$$

Заметим теперь, что S есть c_0 -факторизуемый оператор. В самом деле, имеем $S = S_1 S_2$, где S_2 есть естественное вложение l_2 в c_0 и $S_1: c_0 \rightarrow X$ определен равенством

$$S_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n^* \rangle x_n, \quad x \in c_0,$$

где (e_n^*) — биортогональная последовательность естественного базиса (e_n) пространства c_0 . Из равенств $S = S_1 S_2$ и (4.2) получим $T = T_1 T_2$, где $T_1 = S_1$ и $T_2 = S_2 V^*$. Следовательно, T есть c_0 -факторизуемый оператор. Лемма 4.1 доказана.

Непосредственным следствием леммы 4.1 является следующее утверждение.

Предложение 4.3. Пусть X — банахово пространство и $T: l_2 \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор такой, что TT^* есть ковариационный оператор U -канонического гауссовского случайного элемента ξ со значениями в X . Тогда T есть c_0 -факторизуемый оператор.

Доказательство. Так как ξ есть U -канонический гауссовский случайный элемент, то существуют безусловно суммируемая последовательность (x_n) в X и последовательность стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин (g_n) такие, что распределение ξ совпадает с распределением суммы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$. Следовательно, ковариационный оператор TT^* случайного элемента ξ можно представить в следующем виде

$$TT^* x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x^* \rangle x_n, \quad x^* \in X^*.$$

Тогда согласно лемме 4.1 можно заключить, что оператор T является c_0 -факторизуемым. Предложение 4.3 доказано.

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения.

Определение 4.2. Пусть Y, Z — банаховы пространства. Линейный оператор $T: Y \rightarrow Z$ называется (абсолютно) суммирующим, если для каждой безусловно суммируемой последовательности (y_n) элементов пространства Y имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ty_n\| < \infty$.

О п р е д е л е н и е 4.3. Банахово пространство Y называется:

— gl_2 -банаховым пространством, если для каждого суммирующего оператора $S: Y \rightarrow l_2$ существует пространство с положительной мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ такое, что S является $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ -факторизуемым;

— *наследственно gl_2 -пространством*, если каждое замкнутое векторное подпространство пространства Y есть gl_2 -пространство.

Нетрудно убедиться в том, что каждое банахово пространство с безусловным базисом Шаудера является gl_2 -пространством. А. Гротендиком была высказана гипотеза, что все банаховы пространства суть gl_2 -пространства. Первый пример пространства, не являющегося gl_2 -банаховым, был построен Гордоном и Льюисом [13]. Более подробную информацию о gl_2 -пространствах можно найти в [9].

О п р е д е л е н и е 4.4 (см. [14, определение 1.1]). Говорят, что банахово пространство Y обладает *гауссовским средним свойством* (для краткости ГАР), если для каждого линейного непрерывного оператора $T: l_2 \rightarrow Y$, для которого T^* является суммирующим, оператор TT^* есть гауссовская ковариация.

Следующее утверждение показывает, что ГАР является наследственным свойством.

Предложение 4.4 (см. [14, с. 564]). Пусть Y — банахово пространство, имеющее ГАР, и X — замкнутое векторное подпространство пространства Y . Тогда X также имеет ГАР.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем линейный непрерывный оператор $T: l_2 \rightarrow X$, для которого T^* есть суммирующий оператор. Пусть $J: X \rightarrow Y$ — естественное вложение и $S = JT: l_2 \rightarrow Y$. Так как T^* — суммирующий оператор, то $S^* = T^*J^*$ также является суммирующим. Поскольку Y имеет ГАР, то оператор SS^* является гауссовской ковариацией. Пусть (e_n) — естественный базис пространства l_2 и (g_n) — последовательность стохастически независимых стандартных гауссовских случайных величин. Из того, что SS^* есть гауссовская ковариация, стандартным путем можно вывести, что ряд $\sum_n S e_n g_n$ сходится п.н. в Y . Ясно, что $S e_n g_n = T e_n g_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Так как X — замкнутое векторное подпространство пространства Y , то ряд $\sum_n T e_n g_n$ сходится п.н. в X . Очевидно, что случайный элемент ξ в X , который п.н. равен сумме ряда $\sum_n T e_n g_n$, является гауссовским случайным элементом с ковариационным оператором TT^* . Следовательно, мы показали, что для любого линейного непрерывного оператора $T: l_2 \rightarrow X$, для которого T^* есть суммирующий оператор, TT^* является гауссовской ковариацией. Таким образом, X имеет ГАР. Предложение 4.4 доказано.

Предложение 4.5 (см. [15, лемма 2.2 и теорема 2.1]). Пусть Y — банахово пространство конечного типа и с безусловным базисом Шаудера. Тогда Y имеет ГАР.

Следующее утверждение является ключевым моментом в доказательстве теоремы 4.5(a).

Предложение 4.6. Пусть рефлексивное банахово пространство Y с безусловным базисом Шаудера имеет конечный котип и пусть каждый гауссовский случайный элемент в Y является U -каноническим. Тогда:

- (a) Y является наследственно gl_2 -банаховым пространством;
- (b) Y имеет котип q для всех $q > 2$.

Доказательство. (a) Зафиксируем замкнутое векторное подпространство X пространства Y . Известно, что X является gl_2 -банаховым пространством тогда и только тогда, когда X^* является gl_2 -банаховым пространством [9, предложение 17.9]. Теперь покажем, что X^* является gl_2 -банаховым пространством. Рассмотрим произвольный суммирующий оператор $S: X^* \rightarrow l_2$. Так как Y — банахово пространство с конечным котипом и безусловным базисом, то по предложению 4.5 оно имеет GАР. Тогда, согласно предложению 4.4, X также имеет GАР. Следовательно, S^*S есть ковариационный оператор гауссовского случайного элемента ξ со значениями в X . По предположению, ξ является U -каноническим в Y . Тогда, согласно следствию 4.1, ξ является U -каноническим как гауссовский случайный элемент со значениями в X . Таким образом, получаем, что S^*S есть ковариационный оператор U -канонического гауссовского случайного элемента со значениями в X . Отсюда, по предложению 4.3, получаем, что $S^*: l_2 \rightarrow X^{**} = X$ является c_0 -факторизуемым. Следовательно, S является l_1 -факторизуемым и утверждение (a) доказано.

(b) Согласно [16, лемма 1], из (a) следует, что Y имеет слабый котип 2 в смысле [17]. Следовательно, согласно [18, предложение 10.7(2)] Y имеет котип q для всех $q > 2$.

З а м е ч а н и е 4.3. Известно, что каждое банахово пространство коти́па 2 с безусловным базисом Шаудера является наследственно gl_2 -банаховым пространством; однако неизвестно, каждое ли банахово пространство коти́па 2 является наследственно gl_2 -пространством (см. [14, проблема 1.15]). Мы не знаем, можно ли в предположениях предложения 4.6 утверждать, что Y является пространством коти́па 2.

Доказательство теоремы 4.5. (a) Так как пространство l_p имеет безусловный базис, то оно является gl_2 -банаховым. Кроме того, l_p имеет котип p и не имеет коти́па $q < p$. Следовательно, по предложению 4.6(b), существует гауссовский случайный элемент со значениями в l_p , который не является U -каноническим.

(b) следует из (a) согласно предложению 4.1(c).

5. D -канонические случайные элементы в пространстве c_0 . Нам понадобится следующий результат.

Теорема 5.1 (см. [19, теорема 19]). Пусть X — сепарабельное банахово пространство и η — гауссовский случайный элемент со значениями в X . Тогда существуют замкнутое векторное подпространство $E \subset c_0$, гауссовский случайный элемент ξ со значениями в E и линейный непрерывный оператор $U: E \rightarrow X$ такие, что распределение $U\xi$ совпадает с распределением η .

Теперь мы можем доказать модификацию теоремы 4.5 для случая $X = c_0$.

Теорема 5.2. Пусть $X = c_0$ и $\mathbf{e} = (e_n)$ — естественный базис пространства X . Тогда:

(а) существует гауссовский случайный элемент со значениями в X , который не является U -каноническим;

(б) существует гауссовский случайный элемент со значениями в X , который не является D -каноническим относительно базиса $\mathbf{e}$.

Доказательство. (а) Допустим, что каждый гауссовский случайный элемент со значениями в X является U -каноническим. Отсюда, согласно следствию 4.2, можно заключить, что если E — замкнутое векторное подпространство пространства c_0 , то каждый гауссовский случайный элемент со значениями в E является также и U -каноническим. По теореме 5.1 отсюда следует, что каждый гауссовский случайный элемент в каждом сепарабельном банаховом пространстве является U -каноническим (так как очевидно, что линейный непрерывный образ U -канонического случайного элемента есть U -канонический случайный элемент). Но это противоречит теореме 4.4 (или теореме 4.5(а)).

(б) следует из (а) согласно предложению 4.1(с), так как естественный базис $\mathbf{e} = (e_n)$ пространства X есть безусловный базис.

В заключение выражаем признательность рецензенту за внимательное прочтение работы и критические замечания, большинство которых учтены. В частности, благодаря им в тексте появились предложение 2.2, следствие 2.1, замечание 2.1, следствие 3.2 и замечание 3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахания Н. Н. О нормальных распределениях в пространстве l_p . — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 737–738.
2. Vakhania N. N. Sur les répartitions de probabilités dans les espaces de suites numériques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, v. 260, № 5, p. 1560–1562.
3. Вахания Н. Н. Ковариационный оператор вероятностного распределения в пространстве Банаха. — Сообщ. АН ГССР, 1968, т. 51, № 1, с. 35–40.
4. Vakhania N. N. Probability Distributions in Linear Spaces. New York–Oxford: North-Holland, 1981, 123 p.
5. Vakhaniya N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A. Probability Distributions on Banach Spaces. Dordrecht: Reidel, 1987, 482 p.

6. Kühn T., Linde W. The r -nuclearity ($0 < r \leq 1$) of Gaussian covariances. — Math. Nachr., 1980, v. 95, p. 165–175.
7. Kühn T. On the r -nuclearity of Gaussian covariances and the composition of nuclear operators. — Math. Ann., 1983, v. 262, p. 377–381.
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I: Sequence Spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977, 190 p.
9. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely summing operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995, 474 p.
10. Kvaratskhelia V. V. On unconditional convergence of random series in Banach spaces. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 828, p. 162–166.
11. Kwapien S., Tareladze V. On a.s. unconditional convergence of random series in Banach spaces. — Stochastic Inequalities and Applications (Barcelona, 2002). Basel: Birkhäuser, 2003, p. 71–75. (Progr. Probab., v. 56.)
12. Kwapien S., Szymański B. Some remarks on Gaussian measures in Banach spaces. — Probab. Math. Statist., 1980, v. 1, p. 59–65.
13. Gordon Y., Lewis D. R. Absolutely summing operators and local unconditional structures. — Acta Math., 1974, v. 133, p. 27–48.
14. Casazza P. G., Nielsen N. J. A Gaussian average property of Banach spaces. — Illinois J. Math., 1997, v. 41, № 4, p. 559–576.
15. Chobanjan S. A., Tareladze V. I. Gaussian characterizations of certain Banach spaces. — J. Multivariate Anal., 1977, v. 7, p. 183–203.
16. Johnson W. B. Homogeneous Banach spaces. — Lecture Notes in Math., 1988, v. 1317, p. 201–203.
17. Milman V. D., Pisier G. Banach spaces with a weak cotype 2 property. — Israel J. Math., 1986, v. 54, p. 139–158.
18. Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 250 p.
19. Talagrand M. Regularity of Gaussian processes. — Acta Math., 1987, v. 159, № 1–2, p. 99–149.

Поступила в редакцию

31.VIII.2011

Исправленный вариант

1.X.2012