Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кузнецова, А. С. Холево, Теоремы кодирования для гибридных каналов,
Теория вероятн. и ее примен., 2013, том 58, выпуск 2, 298–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:07:36

© 2013 г. **КУЗНЕЦОВА А. А.* , ХОЛЕВО А. С.****

ТЕОРЕМЫ КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ КАНАЛОВ¹⁾

Основным результатом настоящей работы является теорема кодирования для пропускной способности с использованием сцепленного состояния (entanglement-assisted capacity) в случае измерительного квантового канала связи с произвольным алфавитом (теорема 3). Попутно получен ряд результатов для энтропий гибридных (классически-квантовых) систем, а также для пропускных способностей канала с гибридным выходом, которые используются при доказательстве теоремы 3.

Ключевые слова и фразы: канал связи, гибридная (классически-квантовая) вероятностная система, классическая пропускная способность, сцепленное состояние, теорема кодирования.

1. Введение. В последние два десятилетия значительное развитие получило квантовое обобщение теории информации, в котором ключевую роль играет понятие сцепленности (entanglement) — специфической квантовой корреляции между компонентами составной квантовой системы (см., например, [1], [2]). В пионерской работе П. Шора с соавторами [3] был рассмотрен протокол передачи информации по квантовому каналу связи с использованием сцепленности между входом и выходом канала. В случае конечномерных каналов была доказана теорема кодирования, дающая явное выражение для соответствующей пропускной способности через максимум квантовой взаимной информации по всевозможным входным состояниям (в настоящей работе речь всюду идет о *классических* пропускных способностях, т.е. о передаче классических данных через квантовый канал связи). Сравнение этого выражения с обычной пропускной способностью показывает возможность многократного увеличения скорости передачи для квантовых каналов с шумом благодаря использованию сцепленности. В частности, подобный выигрыш для так называемых измерительных каналов продемонстрирован в работе [4], где рассмотрен ряд конкретных примеров, представляющих

* МГТУ ИМ. Н. Э. Баумана, Москва, Россия; e-mail: kuznetsova.a.a@bk.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: holevo@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00319) и Российского Квантового Центра.

интерес для приложений (квантовая томография в конечномерном пространстве, оптическое гетеродинамирование с ограничением на энергию входного сигнала и др.). При этом в случае измерений с дискретным алфавитом (множеством значений) $\mathcal{Y}$ измерительный канал $\mathcal{M}$ можно рассматривать как квантовый, и к нему применимы результаты работы [3] в случае конечного $\mathcal{Y}$, либо их бесконечномерное обобщение [5] в случае счетного $\mathcal{Y}$. Для измерений же с непрерывным алфавитом $\mathcal{Y}$ подобный подход оказывается невозможным и формулировка протокола передачи информации с использованием сцепленности, а также доказательство соответствующей теоремы кодирования требуют рассмотрения так называемых гибридных (классически-квантовых) вероятностных систем.

Основным результатом настоящей работы является теорема кодирования для пропускной способности с использованием сцепленного состояния (entanglement-assisted capacity) в случае измерительного канала с произвольным измеримым алфавитом (теорема 3). Тем самым получает обоснование формула (28), анонсированная в работе [4]. Попутно мы получаем ряд результатов для энтропий гибридных систем, а также для пропускных способностей каналов с гибридным выходом, которые используются при доказательстве теоремы 3. Более подробные объяснения используемых в работе понятий квантовой теории информации, а также обозначений (в частности, бра- и кет-векторов Дирака) можно найти, например, в книгах [1], [2].

2. Некоторые сведения о гибридных системах. Квантовая система описывается сепарабельным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Далее $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — пространство операторов со следом (ядерных операторов), $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — выпуклое множество операторов плотности (положительных операторов с единичным следом, называемых также квантовыми состояниями) в $\mathcal{H}$ [6]. Введем также пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, где Ω — некоторое множество, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра его подмножеств, μ — σ -конечная мера на $\mathcal{F}$.

Гибридная (классически-квантовая, кратко cq-) система описывается алгеброй фон Неймана $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, элементами которой являются слабо измеримые существенно ограниченные функции $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Рассмотрим также предсопряженное пространство $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathfrak{T}(\mathcal{H}))$, элементами которого являются измеримые функции $S = \{S(\omega)\}$ со значениями в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, интегрируемые по мере μ (см. подробнее [7], [8]).

О п р е д е л е н и е 1. *Состоянием* (cq-состоянием) на алгебре $\mathcal{L}$ называется элемент $S = \{S(\omega)\} \in \mathcal{L}_*$ такой, что

$$S(\omega) \geq 0 \pmod{\mu}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr } S(\omega) \mu(d\omega) = 1.$$

Частичным q -состоянием называется оператор плотности

$$S^q = \int_{\Omega} S(\omega) \mu(d\omega);$$

частичным s -состоянием называется вероятностная мера S^c на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, определяемая плотностью $\text{Tr } S(\omega)$.

Будем обозначать $\mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$ выпуклое множество всех sq -состояний.

Следуя [8], введем понятия энтропии и относительной энтропии sq -состояний. Здесь и далее мы используем обозначения “ s , q , sq ” для энтропийных характеристик классических, квантовых и гибридных систем соответственно. По поводу определений и свойств квантовых энтропий см., например, [2].

О п р е д е л е н и е 2. Энтропия sq -состояния S определяется соотношением

$$H_{sq}(S) = \int_{\Omega} H_q(S(\omega)) \mu(d\omega),$$

где $H_q(S) = -\text{Tr } S \log S$ — энтропия фон Неймана положительного оператора $S \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Заметим, что

$$H_{sq}(S) = H_c(\Omega) + \int_{\Omega} p(\omega) H_q(\hat{S}(\omega)) \mu(d\omega), \quad (1)$$

где $p(\omega) = \text{Tr } S(\omega)$, $\hat{S}(\omega) = (p(\omega))^{-1} S(\omega)$, $H_c(\Omega)$ — дифференциальная энтропия распределения вероятностей с плотностью $p(\omega)$ относительно меры μ .

О п р е д е л е н и е 3. Относительная энтропия sq -состояний S_1, S_2 определяется соотношением

$$H_{sq}(S_1 \| S_2) = \int_{\Omega} H_q(S_1(\omega) \| S_2(\omega)) \mu(d\omega),$$

где

$$H_q(S_1(\omega) \| S_2(\omega)) = \text{Tr } S_1(\omega) (\log S_1(\omega) - \log S_2(\omega))$$

— квантовая относительная энтропия.

Введем также понятие, которое будет играть важную роль в настоящей статье.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть S — sq -состояние, такое что $H_q(S^q) < \infty$. Условной энтропией sq -системы $\Omega \mathcal{H}$ относительно q -системы $\mathcal{H}$ называется величина

$$H_{sq}(\Omega | \mathcal{H}) = H_{sq}(S) - H_q(S^q).$$

Заметим, что определение 4 есть аналог определения квантовой условной энтропии в случае конечномерных гильбертовых пространств (об определении квантовой условной энтропии в бесконечномерном случае см. [9]).

Все определенные выше энтропии могут принимать значения в $(-\infty, +\infty]$.

Далее мы рассматриваем различные квантовые системы $A, B, \dots$, которые описываются гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \dots$. Энтропию cq-состояния $S \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_A)$ будем кратко обозначать $H_{cq}(\Omega A)$ и т.п. Составная квантовая система описывается тензорным произведением соответствующих гильбертовых пространств $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (см. подробнее [6], [2]).

Лемма 1. *Энтропия cq-системы обладает следующими свойствами.*

1. *Субаддитивность-1:*

$$H_c(\Omega) \leq H_{cq}(\Omega A) \leq H_c(\Omega) + H_q(A). \quad (2)$$

2. *Субаддитивность-2:*

$$H_{cq}(\Omega AB) \leq H_{cq}(\Omega A) + H_{cq}(\Omega B). \quad (3)$$

3. *Сильная субаддитивность:*

$$H_{cq}(\Omega AB) + H_q(A) \leq H_{cq}(\Omega A) + H_q(AB). \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Неравенство

$$H_{cq}(\Omega A) \geq H_c(\Omega) \quad (5)$$

очевидно выполняется для любой системы ΩA по определению энтропии гибридной системы. Для доказательства второго неравенства обозначим $p(\omega) = \text{Tr } S_A(\omega)$, $\hat{S}_A(\omega) = p(\omega)^{-1} S_A(\omega)$. В этих обозначениях $H_c(\Omega)$ — классическая дифференциальная энтропия распределения вероятностей с плотностью $p(\omega)$ относительно меры μ . Тогда, используя вогнутость энтропии фон Неймана, получаем

$$H_{cq}(\Omega A) = H_c(\Omega) + \int_{\Omega} p(\omega) H_q(\hat{S}_A(\omega)) \mu(d\omega) \leq H_c(\Omega) + H_q(S_A^q).$$

2. Если $H_{cq}(\Omega A) + H_{cq}(\Omega B) < \infty$, то неравенство следует из неотрицательности относительной энтропии для гибридных систем. В противном случае неравенство очевидно.

3. Если $H_q(AB) = \infty$, то неравенство (4) очевидно выполняется. Если $H_q(A) = \infty$, то, воспользовавшись фактом, что $H_{cq}(\Omega A) \geq H_q(A)$,

снова получаем выполнение неравенства. Если же $H_c(\Omega) = \infty$, то неравенство (4) следует из (5).

Теперь рассмотрим случай $H_c(\Omega) < \infty$, $H_q(A) < \infty$, $H_q(AB) < \infty$. Заметив, что $p(\omega) = \text{Tr } S_{AB}(\omega) = \text{Tr } S_A(\omega)$, и обозначив

$$\hat{S}_{AB}(\omega) = p(\omega)^{-1} S_{AB}(\omega), \quad \hat{S}_A(\omega) = p(\omega)^{-1} S_A(\omega),$$

перепишем искомое неравенство в виде

$$H_{\text{cq}}(\Omega AB) - H_q(AB) \leq H_{\text{cq}}(\Omega A) - H_q(A),$$

что равносильно

$$\begin{aligned} H_c(\Omega) - \int_{\Omega} p(\omega) H_q(\hat{S}_{AB}(\omega) \| S_{AB}^q) \mu(d\omega) \\ \leq H_c(\Omega) - \int_{\Omega} p(\omega) H_q(\hat{S}_A(\omega) \| S_A^q) \mu(d\omega), \end{aligned}$$

а последнее неравенство следует из монотонности квантовой относительной энтропии. Лемма 1 доказана.

Из сильной субаддитивности энтропии для гибридных систем непосредственно следует свойство монотонности условной энтропии.

Лемма 2. *Рассмотрим гильбертовы пространства $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ и состояния*

$$S_A \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_A), \quad S_A^q = \int_{\Omega} S_A(\omega) \mu(d\omega) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A),$$

а также

$$S_{AB} \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B), \quad S_{AB}^q = \int_{\Omega} S_{AB}(\omega) \mu(d\omega) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B),$$

удовлетворяющие условиям $H(S_A^q) < +\infty$, $H(S_{AB}^q) < +\infty$, причем для почти всех ω выполняется равенство

$$\text{Tr}_B S_{AB}(\omega) = S_A(\omega). \quad (6)$$

Тогда

$$H_{\text{cq}}(\Omega | AB) \leq H_{\text{cq}}(\Omega | A). \quad (7)$$

Далее нам также понадобится понятие наблюдаемой в гибридной системе.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $\mathcal{Y}$ — конечное множество. Наблюдаемой M со значениями в $\mathcal{Y}$ в гибридной системе называется разложение единицы в $\mathcal{L}$, т.е. набор элементов $\{M_y; y \in \mathcal{Y}\} \subset \mathcal{L}$, где $M_y = \{M_y(\omega)\}$, таких, что

$$M_y(\omega) \geq 0 \pmod{\mu}, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad \sum_{y \in \mathcal{Y}} M_y(\omega) = I \pmod{\mu},$$

где I — единичный оператор в $\mathcal{H}$. Распределение вероятностей наблюдаемой M в состоянии S дается формулой

$$p_M(y|S) = \int_{\Omega} \text{Tr } S(\omega) M_y(\omega) \mu(d\omega).$$

3. Классическая пропускная способность каналов с гибридным выходом. Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция на множестве $\mathcal{X} = \{x\}$, которое будем называть алфавитом. Обозначим $\mathcal{P}_1$ класс конечных распределений вероятностей π на $\mathcal{X}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_x f(x) \pi_x \leq E, \quad (8)$$

где E — положительное число. Рассмотрим множество $\mathcal{X}^n$ последовательностей букв $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{X}$ длины n , которые будем называть словами. Введем аддитивное ограничение на входные слова:

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq nE. \quad (9)$$

Будем обозначать $\mathcal{P}_n$ класс распределений на $\mathcal{X}^n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{x_1, \dots, x_n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) \pi_{x_1, \dots, x_n} \leq nE. \quad (10)$$

Классически-гибридным (с-сг) каналом с входным алфавитом $\mathcal{X}$ назовем отображение $\mathcal{S}: x \mapsto S_x$, $S_x \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$. Если на выходе такого канала происходит измерение наблюдаемой $M = \{M_y\}$, то условная вероятность получить на выходе y , если на входе x , дается формулой

$$p_M(y|x) = \int_{\Omega} \text{Tr } S_x(\omega) M_y(\omega) \mu(d\omega).$$

Блочный канал $\mathcal{S}^n$ определяется как отображение слов в сг-состояния на $\mathcal{L}^{\otimes n}$: $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \mapsto S_{x_1}(\omega_1) \otimes \dots \otimes S_{x_n}(\omega_n)$. Введем обозначения $\omega^{(n)} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^{\times n}$, $\mu(d\omega^{(n)}) = \mu(d\omega_1) \dots \mu(d\omega_n)$.

О п р е д е л е н и е 6. Кодом длины n и размера N для с-сг-канала $\mathcal{S}^n$ с ограничением (9) называется пара (W, M) , где $W = \{\alpha_i, i = 1, \dots, N\}$ — набор кодовых слов длины n , удовлетворяющих условию (9), $M = \{M_j, j = 0, 1, \dots, N\}$ — наблюдаемая в $\mathcal{L}^{\otimes n}$.

Средняя вероятность ошибки кода задается формулой

$$\bar{P}_e(W, M) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(1 - \int_{\Omega^{\times n}} \text{Tr } S_{\alpha_j}(\omega^{(n)}) M_j(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)}) \right).$$

Обозначим $\bar{p}_e(n, N)$ инфимум средней вероятности ошибки по всем кодам длины n и размера N .

О п р е д е л е н и е 7. *Классической пропускной способностью* $C(\Phi)$ с-с-с-канала $\mathcal{S}$ с ограничением (9) на входные слова называется супремум достижимых скоростей, т.е. значений R , для которых выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_e(n, 2^{nR}) = 0. \quad (11)$$

Пусть теперь дано дискретное распределение вероятностей $\pi = \{\pi_x\}$, рассмотрим соответствующие состояния $S_x \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$. Обозначим $\bar{S} = \sum_x \pi_x S_x$ — среднее состояние ансамбля. Предположим, что $H_{\text{cq}}(\bar{S}) < \infty$, и введем величину

$$\chi_{\text{cq}}(\pi) = H_{\text{cq}}(\bar{S}) - \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(S_x). \quad (12)$$

Следующая лемма обобщает на гибридные системы известное неравенство для квантовых энтропий.

Лемма 3. *Для произвольного ансамбля $\{\pi_x, S_x\}$, где $\{\pi_x\}$ — распределение вероятностей на $\mathcal{X}$, $S_x \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$, а $H_{\text{cq}}(\sum_x \pi_x S_x) < \infty$, выполняются неравенства*

$$0 \leq H_{\text{cq}}\left(\sum_x \pi_x S_x\right) - \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(S_x) \leq -\sum_x \pi_x \ln \pi_x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\bar{S} = \sum_x \pi_x S_x$. Первое неравенство следует из неотрицательности относительной энтропии, так как $H_{\text{cq}}(\bar{S}) - \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(S_x) = \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(S_x \| \bar{S})$.

Для доказательства второго неравенства воспользуемся свойством энтропии фон Неймана для операторов плотности A_x и среднего $\bar{A} = \sum_x \pi_x A_x$ (см. [10]):

$$H_q(\bar{A}) \leq \sum_x \pi_x H_q(A_x) - \sum_x \pi_x \log \pi_x. \quad (13)$$

Обозначим $p(\omega) = \text{Tr } \bar{S}(\omega)$, $\hat{S}(\omega) = p(\omega)^{-1} \bar{S}(\omega)$, $p_x(\omega) = \text{Tr } S_x(\omega)$, $\hat{S}_x(\omega) = p_x(\omega)^{-1} S_x(\omega)$, а $H_c(p)$, $H_c(p_x)$ — дифференциальные энтропии распределений вероятностей с плотностями $p(\omega)$ и $p_x(\omega)$, соответственно. Заметим, что $\hat{S}(\omega) = \sum_x \pi_x p_x(\omega) p(\omega)^{-1} \hat{S}_x(\omega)$ и воспользуемся свойством (13). Используя (1), имеем

$$H_{\text{cq}}(\bar{S}) \leq H_c(p) + \sum_x \pi_x \int_{\Omega} p_x(\omega) \left(H_q(\hat{S}_x(\omega)) - \log(\pi_x p_x(\omega) p(\omega)^{-1}) \right) \mu(d\omega).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $\sum_x \pi_x p_x(\omega) = p(\omega)$, а

$$H_c(p_x) + \int_{\Omega} p_x(\omega) H_q(\hat{S}_x(\omega)) \mu(d\omega) = H_{\text{cq}}(S_x),$$

получаем требуемое неравенство. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{S}: x \mapsto S_x$, $S_x \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$, — классически-гибридный канал с ограничением (9) на входе, удовлетворяющий условию

$$\sup_{\pi \in \mathcal{P}_1} H_{\text{cq}} \left(\sum_x \pi_x S_x \right) < \infty.$$

Тогда его классическая пропускная способность конечна и дается выражением

$$C(\mathcal{S}) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}_1} \chi_{\text{cq}}(\pi). \quad (14)$$

Доказательство. Обозначим $\bar{\chi}_{\text{cq}}$ величину в правой части формулы (14). Сначала докажем неравенство $C(\mathcal{S}) \leq \bar{\chi}_{\text{cq}}$, т.е.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_e(n, 2^{nR}) > 0 \quad \text{при } R > \bar{\chi}_{\text{cq}}. \quad (15)$$

Рассмотрим блочный с-сг канал $\alpha \mapsto S_\alpha$, где $\alpha = x^{(n)}$ — слово длины n , и наблюдаемую $M^{(n)}$ (в смысле определения 5). Тогда, используя монотонность относительной энтропии, для фиксированного разложения единицы можно получить следующую оценку информации Шеннона через относительную энтропию:

$$\begin{aligned} I_n(\pi_x^{(n)}, M^{(n)}) &= \sum_{x^{(n)}, y^{(n)}} \pi_x^{(n)} p_M(y^{(n)} | x^{(n)}) \log \frac{p_M(y^{(n)} | x^{(n)})}{\sum_{x'^{(n)}} \pi_{x'}^{(n)} p_M(y^{(n)} | x'^{(n)})} \\ &= \sum_{x^{(n)}, y^{(n)}} \pi_x^{(n)} \int_{\Omega \times n} \text{Tr } M_{y^{(n)}}(\omega^{(n)}) S_{x^{(n)}}(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)}) \\ &\quad \times \log \frac{\int_{\Omega \times n} \text{Tr } M_{y^{(n)}}(\omega^{(n)}) S_{x^{(n)}}(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)})}{\int_{\Omega \times n} \text{Tr } M_{y^{(n)}}(\omega^{(n)}) \bar{S}_\pi^{\otimes n}(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)})} \\ &= \sum_x \pi_x H_q \left(\Psi^{\otimes n}(S_x^{\otimes n}) \parallel \Psi^{\otimes n}(\bar{S}_\pi^{\otimes n}) \right) \leq \sum_x \pi_x H_q(S_x^{\otimes n} \parallel \bar{S}_\pi^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Здесь $\Psi: \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\Omega)$ — канал с квантовым выходом, задаваемый соотношениями

$$\Psi(S_x) = \sum_y p_M(y | x) |e_y\rangle \langle e_y|, \quad \Psi(\bar{S}_\pi) = \sum_y \left(\sum_x \pi_x p_M(y | x) \right) |e_y\rangle \langle e_y|.$$

Заметим, что величина $\bar{\chi}_{\text{cq}}^{(n)} = \sup_{\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_n} \chi_{\text{cq}}(\pi^{(n)})$ аддитивна. Действительно, неравенство $\bar{\chi}_{\text{cq}}^{(n)} \geq n \bar{\chi}_{\text{cq}}$ очевидно. Для доказательства обратного неравенства заметим, что для любого распределения $\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_n$ и маргинальных распределений $\pi^{[i]}$

$$\chi_{\text{cq}}(\pi^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^n \chi_{\text{cq}}(\pi^{[i]})$$

в силу субаддитивности полудифференциальной энтропии по отношению к тензорным произведениям (лемма 1). Далее $\sum_{i=1}^n \chi_{\text{cq}}(\pi^{[i]}) \leq n\chi_{\text{cq}}(\bar{\pi})$ для $\bar{\pi} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \pi^{[i]}$ в силу того, что $\chi_{\text{cq}}(\pi)$ — вогнутая функция π . Если $\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_n$, то $\bar{\pi} \in \mathcal{P}_1$, так как неравенство (10) равносильно неравенству

$$\sum_x \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x) \pi_x^{[i]} \leq E.$$

Взяв супремум по всем распределениям $\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_n$, получаем, что $\bar{\chi}_{\text{cq}}^{(n)} \leq n\bar{\chi}_{\text{cq}}$.

Таким образом,

$$\sup_{\pi_x^{(n)}, M^{(n)}} I_n(\pi_x^{(n)}, M^{(n)}) \leq \bar{\chi}_{\text{cq}}^{(n)} = n\bar{\chi}_{\text{cq}}. \quad (16)$$

Рассмотрим случайную величину, описывающую выходные значения канала при использовании наблюдаемой M , при этом слова α кода (W, M) выбираются с равными вероятностями $1/N$. Слова удовлетворяют ограничению (9), а значит, распределение вероятностей удовлетворяет условию (8). Пусть $N = 2^{nR}$, тогда из неравенства Фано [11] и (16) следует, что

$$nR(1 - \bar{p}_e(n, 2^{nR})) \leq \sup_{\pi \in \mathcal{P}_1} \sup_{M^{(n)}} I_n(\pi^{(n)}, M^{(n)}) + 1 \leq n\bar{\chi}_{\text{cq}} + 1.$$

Поэтому, если $R > \bar{\chi}_{\text{cq}}$, то

$$\bar{p}_e(n, 2^{nR}) \geq 1 - \frac{\bar{\chi}_{\text{cq}}}{R} - \frac{1}{nR},$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ следует (15), что доказывает обратное утверждение.

Для доказательства прямого утверждения теоремы кодирования нам понадобятся обобщения понятий типичного и условно типичного проекторов.

Рассмотрим состояние $S \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H})$ и его тензорную степень $S^{\otimes n}$, т.е. функцию $S(\omega_1) \otimes \cdots \otimes S(\omega_n)$ для всех $\omega^{(n)} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^{\times n}$. Для каждого ω рассмотрим спектральное представление оператора $S(\omega)$: $S(\omega) = \sum_i \lambda_i(\omega) |e_i(\omega)\rangle \langle e_i(\omega)|$. Тогда спектральное представление $S^{\otimes n}(\omega^{(n)})$ имеет вид

$$S^{\otimes n}(\omega^{(n)}) = \sum_{\lambda_J(\omega^{(n)})} \lambda_J(\omega^{(n)}) |e_J(\omega^{(n)})\rangle \langle e_J(\omega^{(n)})|,$$

где $\lambda_J(\omega^{(n)}) = \lambda_{j_1}(\omega_1) \cdots \lambda_{j_n}(\omega_n)$, $|e_J(\omega^{(n)})\rangle = |e_{j_1}(\omega_1)\rangle \otimes \cdots \otimes |e_{j_n}(\omega_n)\rangle$.

Пусть $P^{n,\delta}(\omega^{(n)}) = P^{n,\delta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ — проектор на собственные векторы оператора $S^{\otimes n}(\omega^{(n)})$, отвечающий собственным значениям из множества $(2^{-n(H_{\text{cq}}(S)+\delta)}; 2^{-n(H_{\text{cq}}(S)-\delta)})$. Такой проектор назовем *типичным*

проектором для оператора $S^{\otimes n}(\omega^{(n)})$. Имеют место следующие свойства типичных проекторов.

1. Размерность $\dim \mathcal{H}^{n,\delta}(\omega^{(n)}) = \text{Tr } P^{n,\delta}(\omega^{(n)})$ удовлетворяет неравенству

$$\dim \mathcal{H}^{n,\delta}(\omega^{(n)}) \leq 2^{n(H_{\text{cq}}(S)+\delta)}.$$

2. Для достаточно больших n выполняется неравенство

$$\int_{\Omega \times n} \text{Tr } S^{\otimes n}(\omega^{(n)})(I - P^{n,\delta}(\omega^{(n)})) \mu(d\omega^{(n)}) < \varepsilon,$$

т.е. вклад не δ -типичных векторов может быть сколь угодно малым. Чтобы показать это, рассмотрим вероятностное пространство $\Omega \times \mathbf{N}$ и заданную на нем случайную величину $-\log \lambda_j(\omega)$. Соответствующей вероятностной мерой будет

$$P(A \times \{J\}) = \int_A \sum_{j \in J} \lambda_j(\omega) \mu(d\omega).$$

Очевидно, что математическое ожидание $-\log \lambda_j(\omega)$ равно

$$H_{\text{cq}}(S) = - \int_{\Omega} \sum_{j \in J} \lambda_j(\omega) \log \lambda_j(\omega) \mu(d\omega).$$

Обозначим $T^{n,\delta} = \{J: 2^{-n(H_{\text{cq}}(S)+\delta)} < \lambda_J(\omega^{(n)}) < 2^{-n(H_{\text{cq}}(S)-\delta)}\}$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times n} \text{Tr } S^{\otimes n}(\omega^{(n)})(I - P^{n,\delta}(\omega^{(n)})) \mu(d\omega^{(n)}) &= P\{J \in \overline{T}^{n,\delta}\} \\ &= P\left\{\left| -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(\lambda_{j_k}(\omega_k)) - H_{\text{cq}}(S) \right| \geq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Последняя вероятность стремится к нулю по закону больших чисел (для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $-\log \lambda_j(\omega)$, математическое ожидание которых равно $H_{\text{cq}}(S)$).

Введем понятие *условно типичного проектора*. Рассмотрим слово входного алфавита $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда блочное состояние $S_\alpha = S_{x_1} \otimes \dots \otimes S_{x_n}$ задается семейством операторов $S_{x_1}(\omega_1) \otimes \dots \otimes S_{x_n}(\omega_n)$. Обозначим

$$\overline{H}_\pi(S_{(\cdot)}) = \sum_i \pi_{x_i} H_{\text{cq}}(S_{x_i}).$$

Для всех $\omega^{(n)} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ и для каждого кодового слова α можно определить спектральный проектор $P_\alpha(\omega^{(n)})$ оператора $S_\alpha(\omega^{(n)})$, отвечающий собственным значениям в интервале $(2^{-n[\overline{H}_\pi(S_{(\cdot)})+\delta]}; 2^{-n[\overline{H}_\pi(S_{(\cdot)})-\delta]})$, который назовем *условно типичным*. Имеют место следующие свойства.

1. Для любого слова α и всех $\omega^{(n)}$ выполняется неравенство

$$P_\alpha(\omega^{(n)}) \leq S_\alpha(\omega^{(n)}) \cdot 2^{n[\overline{H}_\pi(S_{(\cdot)})+\delta]}.$$

Это следует непосредственно из определения условно типичного проектора.

2. Пусть $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ выбирается случайно с распределением вероятностей $\pi_\alpha = \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_n}$. Обозначим $\mathbf{E}$ математическое ожидание относительно этого распределения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n имеет место неравенство

$$\int_{\Omega \times n} \mathbf{E} \operatorname{Tr} S_\alpha(\omega^{(n)})(I - P_\alpha(\omega^{(n)})) \mu(d\omega^{(n)}) \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Действительно, обозначим $T_\alpha^{n,\delta} = \{J: 2^{-n(\bar{H}_\pi(S_{(\cdot)})+\delta)} < \lambda_J(\omega^{(n)}) < 2^{-n(\bar{H}_\pi(S_{(\cdot)})-\delta)}\}$. Тогда левая часть (17) равна

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times n} \sum_\alpha \pi_\alpha \sum_{J \in T_\alpha^{n,\delta}} \lambda_J \mu(d\omega^{(n)}) &= P\left\{\left| -\frac{1}{n} \log \lambda_J - \bar{H}_\pi(S_{(\cdot)}) \right| \geq \delta \right\} \\ &= P\left\{\left| -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \lambda_{j_k}(\omega_k) - \bar{H}_\pi(S_{(\cdot)}) \right| \geq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Последняя вероятность также стремится к нулю по закону больших чисел (для последовательности независимых случайных величин $-\log \lambda_j(\omega)$).

Перейдем к доказательству неравенства $C(\mathcal{S}) \geq \bar{\chi}_{\text{cq}}$, т.е. покажем, что минимальная средняя вероятность ошибки $\bar{p}_e(n, 2^{nR})$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если $R < \bar{\chi}_{\text{cq}}$.

Рассмотрим среднее состояние $\bar{S}_\pi$ и для всех $\omega^{(n)}$ типичный проектор $P(\omega^{(n)}) = P^{n,\delta}(\omega^{(n)})$ оператора $\bar{S}_\pi^{\otimes n}(\omega^{(n)})$. Для данного набора кодовых слов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ возможно построить условно типичные проекторы $P_{\alpha_j}(\omega^{(n)}) = P_{\alpha_j}^{n,\delta}(\omega^{(n)})$. По аналогии с доказательством в [2, гл. 5] введем субоптимальную наблюдаемую $\{M_j(\omega^{(n)})\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_j(\omega^{(n)}) &= \left(\sum_{i=1}^N P(\omega^{(n)}) P_{\alpha_i}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) \right)^{-1/2} P(\omega^{(n)}) P_{\alpha_j}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^N P(\omega^{(n)}) P_{\alpha_i}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) \right)^{-1/2}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Отметим, что для всех $\omega^{(n)}$ набор операторов $\{M_j(\omega^{(n)})\}$ является разложением единицы, т.е. определенное таким образом семейство операторов M действительно является наблюдаемой в смысле определения 5.

Далее для упрощения записи будем использовать для кодовых слов индекс α , опуская j . Действуя аналогично [2], получаем следующую оценку сверху для средней вероятности ошибки:

$$\bar{P}_e(W, M)$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Omega^{\times n}} \left(4 \operatorname{Tr} S_{\alpha}(\omega^{(n)})(I - P(\omega^{(n)})) + 4 \operatorname{Tr} S_{\alpha}(\omega^{(n)})(I - P_{\alpha}(\omega^{(n)})) \right. \\ \left. + \sum_{\alpha': \alpha' \neq \alpha} \operatorname{Tr} P(\omega^{(n)}) S_{\alpha}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) P_{\alpha'}(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)}) \right).$$

Теперь пусть $\pi = \{\pi_x\}$ — распределение вероятностей на $\mathcal{X}$, удовлетворяющее условию (8). Применим процедуру случайного кодирования, предполагая, что слова $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ выбираются случайным образом, независимо друг от друга, с распределением вероятностей $\pi_{\alpha} = \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_n}$, и заметим, что это распределение будет принадлежать классу $\mathcal{P}_n$.

Тогда для всех $\omega^{(n)}$ имеем

$$\mathbf{E} S_{\alpha}(\omega^{(n)}) = \sum_{x_1, \dots, x_n} \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_n} S_{x_1}(\omega_1) \otimes \cdots \otimes S_{x_n}(\omega_n) = \bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)})$$

(здесь математическое ожидание берется относительно распределения вероятностей π_{α}). Усреднив предыдущее неравенство, получаем:

$$\mathbf{E} \bar{P}_e(W, M) \leq 4 \int_{\Omega^{\times n}} \operatorname{Tr} \bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)})(I - P(\omega^{(n)})) \mu(d\omega^{(n)}) \\ + 4 \int_{\Omega^{\times n}} \mathbf{E} \operatorname{Tr} S_{\alpha}(\omega^{(n)})(I - P_{\alpha}(\omega^{(n)})) \mu(d\omega^{(n)}) \\ + (N - 1) \int_{\Omega^{\times n}} \operatorname{Tr} \bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) \mathbf{E} P_{\alpha'}(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)}).$$

По свойствам типичных и условно типичных проекторов первые два слагаемых меньше ε для достаточно больших n . Для оценки третьего слагаемого заметим, что

$$\operatorname{Tr} \bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)}) \mathbf{E} P_{\alpha'}(\omega^{(n)}) \leq \|\bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)})\| \operatorname{Tr} \mathbf{E} P_{\alpha'}(\omega^{(n)}).$$

Очевидно, что справедлива оценка

$$\|\bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)})\| \leq 2^{-n[H_{\text{cq}}(\bar{S}_{\pi}) - \delta]},$$

так как собственные значения оператора $\bar{S}_{\pi}^{\otimes n}(\omega^{(n)}) P(\omega^{(n)})$ ограничены сверху величиной, стоящей в правой части.

С другой стороны,

$$\operatorname{Tr} \mathbf{E} P_{\alpha'}(\omega^{(n)}) = \mathbf{E} \operatorname{Tr} P_{\alpha'}(\omega^{(n)}) \leq \operatorname{Tr} S_{\alpha'}(\omega^{(n)}) \cdot 2^{n[\bar{H}_{\pi}(S_{(\cdot)}) + \delta]} \leq 2^{n[\bar{H}_{\pi}(S_{(\cdot)}) + \delta]}.$$

Интегрируя по $\Omega^{\times n}$ и учитывая, что $H_{\text{cq}}(\bar{S}_{\pi}) - \bar{H}_{\pi}(S_{(\cdot)}) = \chi_{\text{cq}}(\pi_{\alpha})$, имеем

$$\bar{p}_e(n, N) \leq \mathbf{E} \bar{P}_e(W, M) \leq 8\varepsilon + N \cdot 2^{-n[\chi_{\text{cq}}(\pi_{\alpha}) - 2\delta]}.$$

Теперь модифицируем вероятностную меру таким образом, чтобы ненулевые вероятности приписывались только словам, удовлетворяющим условию (9). Обозначим $\nu_n = P(\sum_{k=1}^n f(i_k) \leq nE)$ и введем меру $\tilde{P}$ следующим образом:

$$\tilde{P}(\alpha = (x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} \nu_n^{-1} \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_n}, & \text{если } \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nE, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассуждая аналогично [2], заметим, что если взять математическое ожидание $\bar{P}_e(W, M)$ относительно меры $\tilde{P}$ (обозначим его $\tilde{\mathbf{E}}$), то

$$\tilde{\mathbf{E}} \inf_M \bar{P}_e(W, M) \leq 4 \mathbf{E} \inf_M \bar{P}_e(W, M).$$

Теперь выберем распределение $\pi_\alpha = \pi_\alpha^0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\chi_{cq}(\pi_\alpha^0) \geq \bar{\chi}_{cq} - \delta$. Тогда, если $R \leq \bar{\chi}_{cq} - 4\delta$, а $N = 2^{nR}$, то

$$\mathbf{E} \bar{P}_e(W, M) \leq 8\epsilon + 2^{-n\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\tilde{\mathbf{E}} \inf_M \bar{P}_e(W, M)$ также стремится к нулю при $R < \bar{\chi}_{cq} - 4\delta$. Мера $\tilde{P}$ сконцентрирована на словах, удовлетворяющих условию (9), поэтому найдется последовательность кодов размера $N = 2^{nR}$, для которых $\bar{P}_e(W, M)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым установлено неравенство $C(\mathcal{S}) \geq \bar{\chi}_{cq}$. Теорема 1 доказана.

П р и м е ч а н и е. Доказательство теоремы 1 можно обобщить на случай, когда выполняется условие $H_{cq}(S_x) < \infty$, без предположения о конечности $H_{cq}(\bar{S})$. В этом случае классическая пропускная способность может принимать как конечные, так и бесконечные значения.

Теперь пусть $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ — гильбертовы пространства. Назовем *каналом с квантовым входом и классически-квантовым выходом* (q-cq-каналом) линейное, вполне положительное отображение из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_B)$.

Рассмотрим q-cq-канал $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_B)$. Дадим определение классической пропускной способности при аддитивном ограничении на входе.

Пусть F — самосопряженный положительный, вообще говоря неограниченный, оператор в пространстве $\mathcal{H}_A$, не пропорциональный единичному, со спектральным разложением $F = \int_0^\infty x dE(x)$, где $E(x)$ — спектральная функция оператора F . Рассмотрим множество состояний $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, удовлетворяющих условию

$$\text{Tr } SF \leq E, \tag{18}$$

где E — некоторая положительная постоянная, причем след в левой части (18) понимается в смысле $\text{Tr } SF = \int_0^\infty x d \text{Tr } SE(x)$ (более подробно см. [5]).

Пусть $\mathcal{A}$ обозначает множество состояний S , удовлетворяющих условию (18). Мы и будем рассматривать канал Φ с этим ограничением на входные состояния. В дальнейшем нам понадобится тот факт (см. [5]), что если оператор F удовлетворяет условию

$$\mathrm{Tr} \exp(-\beta F) < \infty \quad \text{для всех } \beta > 0, \quad (19)$$

то $H(S) < \infty$ для $S \in \mathcal{A}$.

Для канала $\Phi^{\otimes n}$ соответствующий оператор есть

$$F^{(n)} = F \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes F;$$

через $\mathcal{A}^{(n)}$ обозначим множество состояний $S^{(n)}$ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\otimes n})$, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Tr} S^{(n)} F^{(n)} \leq nE. \quad (20)$$

О п р е д е л е н и е 8. Кодом длины n и размера N для q-cq-канала с ограничением называется пара:

1) семейство $\Sigma^{(n)} = \{S_\alpha^{(n)}\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, удовлетворяющих ограничению (20);

2) разложение единицы $M = \{M_j, j = 0, 1, \dots, N\}$ в $\mathcal{L}^{\otimes n}$ (в смысле определения 5).

Вероятность ошибки такого кода равна

$$\lambda_e(\Sigma^{(n)}, M^{(n)}) = \max_{\alpha=1, \dots, N} \left(1 - \int_{\Omega \times n} \mathrm{Tr} [\Phi^{\otimes n}(S_\alpha^{(n)}(\omega^{(n)}))] M_\alpha(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)}) \right).$$

Минимальную вероятность ошибки по всевозможным кодам длины n и размера N обозначим $\bar{\lambda}_e(n, N)$. Классическая пропускная способность $\bar{C}_{\mathrm{cq}}(\Phi)$ такого канала есть точная верхняя грань скоростей передачи R , для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_e(n, 2^{nR}) = 0$.

Обозначим $\mathfrak{P}_n$ множество пар $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)})$, где $\pi_\alpha^{(n)}$ — вероятности состояний $S_\alpha^{(n)}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha=1}^N \pi_\alpha^{(n)} \mathrm{Tr} S_\alpha^{(n)} F^{(n)} \leq nE. \quad (21)$$

Пусть $\{\pi_\alpha^{(n)}\}$ — распределение вероятностей на входных состояниях $\{S_\alpha^{(n)}\}$ и $\pi(i|\alpha) = \int_{\Omega \times n} \mathrm{Tr} \Phi^{\otimes n}(S_\alpha^{(n)}(\omega^{(n)})) M_i(\omega^{(n)}) \mu(d\omega^{(n)})$ — переходные вероятности. Тогда можно рассмотреть шенноновскую информацию $I_n(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}, M^{(n)})$, найдя совместное распределение входа и выхода.

Определим величину

$$\bar{C}_{\mathrm{cq}}^{(n)}(\Phi) = \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathfrak{P}_n} \chi_{\mathrm{cq}}(\{\pi_\alpha^{(n)}\}, \{\Phi^{\otimes n}(S_\alpha^{(n)}(\omega^{(n)}))\}).$$

Если $\Sigma^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$, то $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathfrak{P}^{(n)}$, и в силу квантовой энтропийной границы [2]

$$I_n(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}, M^{(n)}) \leq \overline{C}_{\text{cq}}^{(n)}(\Phi).$$

Имеет место следующая теорема кодирования, доказательство которой аналогично доказательству предложения 3 в [5] с применением теоремы 1 к с-сч каналу $\tilde{\Phi}: \alpha \mapsto \Phi^{\otimes n}(S_\alpha)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ — гильбертовы пространства и канал Φ действует из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{H}_B)$. Пусть также входные состояния $S^{(n)}$ канала $\Phi^{(n)}$ удовлетворяют ограничению

$$\text{Tr } S^{(n)} F^{(n)} \leq nE,$$

а канал Φ удовлетворяет условию

$$\sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} H_{\text{cq}}(\Phi(S)) < \infty.$$

Классическая пропускная способность такого канала конечна и равна

$$\overline{C}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \overline{C}_{\text{cq}}^{(n)}\{\Phi^{\otimes n}\}. \quad (22)$$

4. Теорема о классической пропускной способности измерительного канала с использованием сцепленности. Пусть $\mathcal{H}_A$ — гильбертово пространство и Φ — квантовый канал, действующий из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'})$. Дадим определение пропускной способности с использованием сцепленности между входом и выходом канала Φ при аддитивном ограничении на входе.

Опишем протокол передачи информации с использованием сцепленного состояния. Предполагается, что передатчик A и приемник B находятся в сцепленном состоянии, описываемом вектором $|\psi\rangle = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle$, где $\{|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ и сцепленность означает, что все λ_j строго больше 0, т.е. вектор $|\psi\rangle$ не является произведением векторов в пространствах $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$. Предположим, что энтропия частичных следов состояния $S_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ конечна:

$$H_q(S_A) = H_q(S_B) < \infty.$$

Пусть $\mathcal{X}$ — конечный алфавит. Участник A кодирует классический сигнал $x \in \mathcal{X}$, появляющийся с вероятностью π_x , в кодирующий канал $\mathcal{E}_x$, действующий в $\mathcal{H}_A$. Далее $\mathcal{E}_x$ применяется к соответствующей части состояния S_{AB} , после чего совместное состояние A и B можно описать как

$$(\mathcal{E}_x \otimes \text{Id}_B)|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \mathcal{E}_x(|e_j\rangle\langle e_k|) \otimes |e_j\rangle\langle e_k|.$$

После передачи по каналу Φ состояния системы $A'B$ описываются операторами плотности

$$\sigma_x = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \Phi[\mathcal{E}_x(|e_j\rangle\langle e_k|)] \otimes |e_j\rangle\langle e_k|.$$

Предполагается, что участник B может производить измерения наблюдаемых в системе $A'B$, извлекая таким образом информацию о сигнале x .

Возможно применение блочного кодирования, тогда кодированные состояния, передаваемые через канал $\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}$, имеют вид

$$S_\alpha^{(n)} = (\mathcal{E}_\alpha^{(n)} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n})[S_{AB}^{(n)}], \quad (23)$$

где $S_{AB}^{(n)}$ — чистое сцепленное состояние для n экземпляров системы AB , удовлетворяющее условию $H(S_B^{(n)}) < \infty$, α — классическое сообщение (например, слово в алфавите $\mathcal{X}$), $\alpha \mapsto \mathcal{E}_\alpha^{(n)}$ — кодирования для n экземпляров системы A . На входные состояния канала $\Phi^{\otimes n}$ налагается ограничение (20), которое эквивалентно аналогичному ограничению для канала $\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}$ с операторами $F^{(n)} \otimes I_B^{\otimes n}$. Обозначим $\mathfrak{P}_n^{AB}$ совокупность пар $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)})$, где $\pi^{(n)} = \{\pi_\alpha^{(n)}\}$ — конечное распределение вероятностей, а $\Sigma^{(n)} = \{S_\alpha^{(n)}\}$ — множество состояний вида (23), удовлетворяющих ограничению

$$\sum_\alpha \pi_\alpha^{(n)} \text{Tr} S_\alpha^{(n)} (F^{(n)} \otimes I_B^{\otimes n}) \leq nE.$$

Для канала Φ с ограничением (18) рассмотрим величину

$$C_{\text{ea}}^{(n)}(\Phi^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}) = \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathfrak{P}_n^{AB}} \chi\left(\{\pi_\alpha^{(n)}\}; \{(\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n})S_\alpha^{(n)}\}\right), \quad (24)$$

где величина $\chi(\{\pi_x\}; \{S_x\}) = H_q(\sum_x \pi_x S_x) - \sum_x \pi_x H_q(S_x)$ — квантовый аналог информации Шеннона (см., например, [2, гл. 5]). Классическую пропускную способность с использованием сцепленности канала Φ с ограничением $\mathcal{A}$ зададим соотношением

$$C_{\text{ea}}(\Phi, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C_{\text{ea}}^{(n)}(\Phi^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}).$$

К такому определению приводит определение в терминах достижимых скоростей передачи (см. [5]).

О п р е д е л е н и е 9. Взаимной информацией канала Φ на состоянии $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называется величина

$$I(S, \Phi) = H_q(S) + H_q(\Phi(S)) - H_q(\Phi \otimes \text{Id}_R(|\psi_S\rangle\langle\psi_S|)),$$

где $|\psi_S\rangle\langle\psi_S|$ — очищение состояния S .

Для квантовых каналов, действующих в конечномерных пространствах, имеет место теорема кодирования, дающая аналитическое выражение для $C_{\text{ea}}(\Phi)$ через взаимную информацию [3]:

$$C_{\text{ea}}(\Phi) = \max_{S_A} I(S_A; \Phi).$$

В случае бесконечномерных пространств в работе [5] доказана соответствующая теорема для канала Φ с ограничением (18), а именно:

Пусть Φ — квантовый канал, удовлетворяющий условию

$$\sup_{S: \text{Tr} SF \leq E} H_q(\Phi[S]) < \infty,$$

с оператором F , удовлетворяющим условию (19). Тогда его пропускная способность с использованием сцепленного состояния при ограничении (18) конечна и равна

$$C_{\text{ea}}(\Phi, \mathcal{A}) = \sup_{S: \text{Tr} SF \leq E} I(S, \Phi).$$

Этот результат применим к случаю измерительных каналов с не более чем счетным множеством исходов, но не охватывает измерения с непрерывными исходами (такие как отмеченные выше квантовая томография в конечномерном пространстве, оптическое гетеродинамирование с ограничением на энергию входного сигнала) [4], представляющие большой интерес. Нашей целью является получение соответствующего результата для измерительных каналов с произвольным множеством исходов.

Введем понятие измерительного канала $\mathcal{M}$ для случая, когда множество исходов — некоторое измеримое пространство Ω . Рассмотрим семейство положительных ограниченных операторов $V(\omega)$, слабо измеримых относительно меры μ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega} V(\omega)^* V(\omega) \mu(d\omega) = I.$$

Зададим *эффективное измерение* $\mathfrak{M}$ (более подробное определение эффективного измерения см. в [12]), множество исходов которого — измеримое пространство Ω , как отображение, ставящее в соответствие каждому состоянию $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ распределение вероятностей с плотностью

$$\text{Tr} SM(\omega), \quad \text{где } M(\omega) = V(\omega)^* V(\omega), \quad (25)$$

относительно меры μ , и семейство *апостериорных состояний* $\hat{S}(\omega) = (\text{Tr} SM(\omega))^{-1} V(\omega) S V(\omega)^*$.

О п р е д е л е н и е 10. Измерительным каналом $\mathcal{M}$ называется отображение состояния $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в распределение вероятностей (25), где $M = \{M(d\omega)\}$ — наблюдаемая с множеством исходов Ω , отвечающая описанному выше измерению.

Протокол передачи информации с использованием сцепленности применим и для измерительного канала $\mathcal{M}$, однако при этом в распределении участника B оказывается гибридная система $A'B$, где $A' = \Omega$ — классическая система на выходе измерительного канала. Таким образом, после измерения $\mathfrak{M}$ состояние в гибридной системе описывается следующим образом:

$$\sigma_x(d\omega) = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k [\text{Tr } \mathcal{E}_x(|e_j\rangle\langle e_k|) M(d\omega)] |e_j\rangle\langle e_k|.$$

Для канала $\mathcal{M}$ с ограничением (18) на входные состояния рассмотрим величину, аналогичную (24):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\text{ea}}^{(n)}(\mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}) &= \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathfrak{P}_n^{AB}} \chi_{\text{cq}}(\{\pi_\alpha^{(n)}\}; \{(\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}) S_\alpha^{(n)}\}) \\ &= \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathfrak{P}_n^{AB}} \left[H_{\text{cq}} \left(\sum_\alpha \pi_\alpha^{(n)} (\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}) S_\alpha^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_\alpha \pi_\alpha^{(n)} H_{\text{cq}}((\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}) S_\alpha^{(n)}) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из теоремы 2 следует, что классическая пропускная способность с использованием сцепленного состояния для квантово-классического канала $\mathcal{M}$ при ограничении (18) дается соотношением

$$C_{\text{ea}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{C}_{\text{ea}}^{(n)}(\mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}).$$

Рассмотрим следующую характеристику измерения $\mathfrak{M}$:

$$\text{ER}(S, \mathfrak{M}) = H_q(S) - \int_\Omega (\text{Tr } SM(\omega)) H_q(\hat{S}(\omega)) \mu(d\omega),$$

называемую *редукцией энтропии*. В [12] показано, что для измерительных каналов с дискретным выходом $I(S, \Phi)$ совпадает с $\text{ER}(S, \mathfrak{M})$. Докажем теорему, дающую выражение для $C_{\text{ea}}(\mathcal{M})$ в случае измерительных каналов с непрерывным пространством исходов через $\text{ER}(S, \mathfrak{M})$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{M}$ — измерительный канал с ограничением на входе вида $\text{Tr } S_A F \leq E$, где S_A — входное состояние. Предположим, что оператор F удовлетворяет условию (19), а канал $\mathcal{M}$ дополнительно удовлетворяет условию

$$\sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} H_c(\mathcal{M}(S_A)) < \infty, \quad (27)$$

где $H_c(\mathcal{M}(S_A))$ — классическая дифференциальная энтропия распределения вероятностей (25). Тогда

$$C_{\text{ea}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}). \quad (28)$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$C_{\text{ea}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \leq \sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}), \quad (29)$$

для чего покажем, что $\tilde{C}_{\text{ea}}^{(1)}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \leq \sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M})$.

Пусть $\mathcal{E}_A^x$ — кодирование, используемое в системе A , и пусть S_{AB} — исходное состояние системы AB :

$$S_{AB} = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |e_i\rangle\langle e_j|,$$

где $\{|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Разделенным между системами A и B состоянием после кодирования будет

$$S_{AB}^x = (\mathcal{E}_A^x \otimes \text{Id}_B) S_{AB}$$

с частичными состояниями $S_A^x = \mathcal{E}_A^x(S_A)$ и $S_B^x = S_B$ (заметим, что состояние в системе B не изменяется).

Докажем неравенство

$$H_{\text{cq}}\left(\sum_x \pi_x(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B) S_{AB}^x\right) - \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B(S_{AB}^x)) \leq \text{ER}\left(\sum_x \pi_x S_A^x, \mathfrak{M}\right). \quad (30)$$

Заметим, что ограничения на входные состояния канала приводят к следующему ограничению на кодирования:

$$\text{Tr} \sum_x \pi_x S_A^x F \leq E.$$

Для первого слагаемого в левой части (30) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & H_{\text{cq}}\left(\sum_x \pi_x(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B) S_{AB}^x\right) \\ &= \int_{\Omega} H_{\text{q}}\left(\sum_x \pi_x \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \left[\text{Tr } M(\omega) \mathcal{E}_A^x |e_i\rangle\langle e_j|\right] |e_i\rangle\langle e_j|\right) \mu(d\omega) \\ &\leq H_c(p) + H_{\text{q}}(S_B), \end{aligned}$$

где $H_c(p)$ — энтропия распределения вероятностей с плотностью $p(\omega) = \text{Tr } V(\omega) \bar{S}_A V(\omega)^*$, $\bar{S}_A = \sum_x \pi_x S_A^x$. Заметим, что $H_c(p) = H_c(\mathcal{M}(\bar{S}_A))$ — выходная энтропия канала $\mathcal{M}$ на состоянии $\bar{S}_A$ и $H_c(\mathcal{M}(\bar{S}_A)) < \infty$.

Для остальных слагаемых в (30) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_x \pi_x \left[H_q(S_B) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B(S_{AB}^x)) \right] \\ &= \sum_x \pi_x \left[H_q(S_B) - \int_{\Omega} H_q \left(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \left[\text{Tr } M(\omega) \mathcal{E}_A^x |e_i\rangle \langle e_j| \right] |e_i\rangle \langle e_j| \right) \mu(d\omega) \right] \\ &= - \sum_x \pi_x H_{\text{cq}}(\Omega^x | B) \end{aligned}$$

в смысле определения 4. Здесь мы используем обозначение Ω^x , чтобы показать, что с-состояние $\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B(S_{AB}^x)$ зависит от x (q-состояние равно S_B для всех x).

Для каждого x рассмотрим очищающее пространство $\mathcal{H}_{R^x}$, т.е. такую систему R^x , что состояние S_{AR^x} — чистое. Например, можно положить $R^x = BE^x$, где E^x — эталонная система для $A^x B$. Тогда

$$\begin{aligned} H_q(S_A^x) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_{R^x}(S_{AR^x}^x)) &= H_q(A^x) - H_{\text{cq}}(\Omega^x R^x) \\ &= H_q(BE^x) - H_{\text{cq}}(\Omega^x BE^x) = -H_{\text{cq}}(\Omega^x | BE^x). \end{aligned}$$

По лемме 2 для любого x выполняется неравенство

$$-H_{\text{cq}}(\Omega^x | BE^x) \geq -H_{\text{cq}}(\Omega^x | B),$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \sum_x \pi_x \left(H_q(S_B) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B(S_{AB}^x)) \right) \\ & \leq \sum_x \pi_x \left(H_q(S_A^x) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_{R^x}(S_{AR^x}^x)) \right). \end{aligned}$$

Покажем, что функция $S_A \mapsto H_q(S_A) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_R(S_{AR}))$, где S_{AR} — очищение S_A , является вогнутой. Используя (1) и тот факт, что энтропии фон Неймана частичных состояний чистого состояния $(\text{Tr } V(\omega) S_A V(\omega)^*)^{-1} (V(\omega) \otimes I_R) S_{AR} (V(\omega)^* \otimes I_R)$ равны, заметим, что

$$H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_R S_{AR}) = \int_{\Omega} H_q(V(\omega) S_A V(\omega)^*) \mu(d\omega).$$

Условие вогнутости равносильно следующему:

$$- \sum_x \pi_x H_q(S_A^x \| \bar{S}_A) \leq - \sum_x \pi_x \int_{\Omega} H_q(V(\omega) S_A^x V(\omega)^* \| V(\omega) \bar{S}_A V(\omega)^*) \mu(d\omega),$$

а для каждого слагаемого неравенство « $\leq$ » имеет место в силу свойства монотонности относительной энтропии.

Получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_x \pi_x \left[H_q(S_A^x) - H_{cq}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_R^x(S_{AR^x}^x)) \right] \\ \leq H_q(\bar{S}_A) - \int_{\Omega} H_q(V(\omega) \bar{S}_A V(\omega)^*) \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть неравенства (30) не превышает

$$H_q(\bar{S}_A) - \int_{\Omega} p(\omega) H_q(\hat{S}(\omega)) \mu(d\omega) = \text{ER}(\bar{S}_A, \mathfrak{M}).$$

(Здесь $p(\omega) = \text{Tr } V(\omega) \bar{S}_A V(\omega)^*$, $\hat{S}(\omega) = p(\omega)^{-1} \text{Tr } V(\omega) \bar{S}_A V(\omega)^*$.)

Окончательно получаем, что

$$\tilde{C}_{\text{ea}}^{(1)}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \leq \sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}),$$

или, применяя рассуждения к n -кратному использованию канала,

$$\tilde{C}_{\text{ea}}^{(n)}(\mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{A}^{\otimes n}) \leq \sup_{S_A^{(n)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n}): \text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE} \text{ER}(S_A^{(n)}, \mathfrak{M}^{\otimes n}).$$

Величина $\text{ER}(S, \mathfrak{M})$ обладает свойством субаддитивности, т.е.

$$\text{ER}(S_{AB}, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}) \leq \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}) + \text{ER}(S_B, \mathfrak{N})$$

для любого состояния $S_{AB} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ с частичными состояниями S_A, S_B и эффективных измерений $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ [12, теорема 2].

Рассмотрим величину

$$\sup_{S_A^{(n)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n}): \text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE} \text{ER}(S_A^{(n)}, \mathfrak{M}^{\otimes n}).$$

Воспользовавшись субаддитивностью $\text{ER}(S, \mathfrak{M})$ и обозначив частичные состояния $S_A^{(n)}$ через S_A^j , получим, что

$$\begin{aligned} & \sup_{S_A^{(n)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n}): \text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE} \text{ER}(S_A^{(n)}, \mathfrak{M}^{\otimes n}) \\ & \leq \sup_{S_A^{(n)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n}): \text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE} \sum_{j=1}^n \text{ER}(S_A^j, \mathfrak{M}) \\ & \leq n \sup_{S_A^{(n)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n}): \text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE} \text{ER}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_A^j, \mathfrak{M}\right) \\ & \leq n \sup_{S_A \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A): \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что из условия $\text{Tr } S_A^{(n)} F^{(n)} \leq nE$ следует

$$\text{Tr } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_A^j F \leq E$$

для частичных состояний S_A^j состояния $S_A^{(n)}$. Тем самым неравенство (29) доказано.

Теперь докажем, что

$$C_{\text{ea}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \geq \sup_{S_A: \text{Tr } S_A F \leq E} \text{ER}(S_A, \mathfrak{M}).$$

Для доказательства понадобится определение *сильно типичного проектора* [5].

О п р е д е л е н и е 11. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим оператор плотности S_d ранга d , имеющий собственные числа λ_j , $j = 1, \dots, d$, и соответствующие собственные векторы $|e_j\rangle$. Тогда собственные числа оператора $S_d^{\otimes n}$ суть $\lambda_J = \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n}$, а собственные векторы — $|e_J\rangle = |e_{j_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |e_{j_n}\rangle$. Последовательность J называется *сильно типичной*, если числа $N(j|J)$ появлений символов j в последовательности J удовлетворяют условию

$$\left| \frac{N(j|J)}{n} - \lambda_j \right| < \delta, \quad j = 1, \dots, d,$$

причем $N(j|J) = 0$, если $\lambda_j = 0$. Пусть $\hat{T}_d^{n,\delta}$ обозначает совокупность всех сильно типичных последовательностей. *Сильно типичный проектор* — это спектральный проектор оператора $S_d^{\otimes n}$, определяемый формулой

$$\hat{P}^{n,\delta} = \sum_{J \in \hat{T}_d^{n,\delta}} |e_J\rangle \langle e_J|.$$

По закону больших чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(\hat{T}_d^{n,\delta}) = 1$, где P^n — распределение вероятностей, задаваемое собственными числами λ_j . Более того, для произвольной функции $g(j)$ и последовательности $J \in \hat{T}_d^{n,\delta}$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{g(j_1) + \cdots + g(j_n)}{n} - \sum_{j=1}^d \lambda_j g(j) \right| < \delta d \max g.$$

Рассмотрим канал $\mathcal{M}^{\otimes n}$, который задается семейством операторов

$$M(\omega^{(n)}) = M(\omega_1) \otimes \cdots \otimes M(\omega_n)$$

(или семейством $V(\omega^{(n)}) = V(\omega_1) \otimes \cdots \otimes V(\omega_n)$) и входное состояние $S \in \mathcal{A}$ со спектральным разложением $S = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \langle e_j|$, где $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_A$. Рассмотрим отображение $S \mapsto \text{Tr } SF$; поскольку оператор F по предположению не пропорционален единичному, образ выпуклого множества всех операторов плотности при данном отображении содержит некоторый интервал. Следуя [5],

предположим сначала, что E не является минимальным собственным значением оператора F . Тогда найдутся вещественное число E' и оператор плотности $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ такие, что $\text{Tr } SF \leq E' < E$. Рассмотрим вспомогательный оператор плотности

$$S_d = \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j |e_j\rangle\langle e_j|, \quad \text{где } \tilde{\lambda}_j = \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right)^{-1} \lambda_j,$$

тогда $\|S_d - S\|_1 \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$ и

$$\text{Tr } S_d F = \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j \|\sqrt{F} e_j\|^2 = E' + \varepsilon_d,$$

где $\varepsilon_d \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сильно типичный проектор оператора $S_d^{\otimes n}$. Положим $k_{n,\delta} = \dim \hat{P}^{n,\delta} = |\hat{T}_d^{n,\delta}|$, $\bar{S}_d^{n,\delta} = (k_{n,\delta})^{-1} \hat{P}^{n,\delta}$ и заметим, что при достаточно больших d можно выбрать δ_0 так, что при $\delta < \delta_0$

$$\text{Tr } \bar{S}_d^{n,\delta} F^{(n)} \leq nE$$

(более подробно см. [5]).

Обозначим $p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) = \text{Tr } M(\omega^{(n)}) \bar{S}_d^{n,\delta}$, $p(\omega) = \text{Tr } M(\omega) S$ и покажем сначала, что

$$\tilde{C}_{\text{ea}}^{(n)}(\mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}) \geq \text{ER}(\bar{S}_d^{n,\delta}, \mathfrak{M}^{\otimes n}). \quad (31)$$

Заметим, что для измерительных каналов $\mathcal{M}$, удовлетворяющих (27), для любого входного состояния S_A выполняется равенство

$$\text{ER}(S_A, \mathfrak{M}) = H_q(S_A) + H_c(\mathcal{M}(S_A)) - H_{\text{cq}}(\mathcal{M} \otimes \text{Id}_R(S_{AR})),$$

где S_{AR} — очищение S_A .

Зададим конкретный протокол передачи классической информации с использованием сцепленности. Пусть классический сигнал принимает значения (x, y) , $x, y = 1, \dots, k_{n,\delta}$ с равными вероятностями $\pi_{x,y} = 1/k_{n,\delta}^2$. В качестве сцепленного состояния возьмем

$$S_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|, \quad \text{где } |\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_{n,\delta}}} \sum_{J \in \hat{T}_d^{n,\delta}} |e_J\rangle \otimes |e_J\rangle.$$

Рассмотрим дискретную систему Вейля $\{W(x, y)\}$ (см. [2, раздел 8.4]) и зададим кодирования $\mathcal{E}_A^{xy}(\cdot) = W(x, y)(\cdot)W(x, y)^*$.

Тогда из определения C_{ea} следует, что

$$\begin{aligned} C_{\text{ea}}(\mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{A}^{(n)}) &\geq H_{\text{cq}}\left(\frac{1}{k_{n,\delta}^2} \sum_{x,y} (\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B)^{\otimes n}(S_{AB}^{xy})\right) \\ &\quad - \frac{1}{k_{n,\delta}^2} \sum_{x,y} H_{\text{cq}}((\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B)^{\otimes n}(S_{AB}^{xy})) \end{aligned} \quad (32)$$

(здесь $S_{AB}^{xy} = W(x, y) \otimes I_B^{\otimes n} S_{AB} (W(x, y) \otimes I_B^{\otimes n})^*$). Заметим, что при таком выборе кодирования ансамбль удовлетворяет ограничению на входе, поскольку

$$\sum_{x,y} \pi_{x,y} (W(x, y) \otimes I_B^{\otimes n}) S_{AB} (W(x, y) \otimes I_B^{\otimes n})^* = \bar{S}_d^{n,\delta} \otimes \bar{S}_d^{n,\delta}.$$

Тогда

$$H_{\text{cq}} \left(\frac{1}{k_{n,\delta}^2} \sum_{x,y} (\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B)^{\otimes n} (S_{AB}^{xy}) \right) = H_c(\mathcal{M}^{\otimes n}(\bar{S}_d^{n,\delta})) + H_q(\bar{S}_d^{n,\delta}).$$

Поскольку состояние S_{AB}^{xy} является очищением состояния $\bar{S}_d^{n,\delta}$, получаем, что правая часть (32) равна

$$\begin{aligned} \text{ER}(\bar{S}_d^{n,\delta}, \mathfrak{M}^{\otimes n}) &= H_q(\bar{S}_d^{n,\delta}) + H_c(\mathcal{M}^{\otimes n}(\bar{S}_d^{n,\delta})) - H_{\text{cq}}((\mathcal{M} \otimes \text{Id}_B)^{\otimes n}(S_{AB}^{xy})) \\ &= H_q(\bar{S}_d^{n,\delta}) - \int_{\Omega} p^{n,\delta}(\omega) H_q \left(\frac{V(\omega) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega)^*}{p^{n,\delta}(\omega)} \right) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

(здесь $p^{n,\delta}(\omega) = \text{Tr } V(\omega) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega)^*$), откуда следует неравенство (31).

Теперь обозначим $p(\omega) = \text{Tr } V(\omega) S_d V(\omega)^*$, $p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) = \text{Tr } V(\omega^{(n)}) \times \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega^{(n)})^*$ и покажем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega \times n} p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) H_q \left(\frac{V(\omega^{(n)}) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega^{(n)})^*}{p^{n,\delta}(\omega^{(n)})} \right) \mu(d\omega^{(n)}) \\ = \int_{\Omega} p(\omega) H_q \left(\frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \right) \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Отсюда будет следовать равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{ER}(\bar{S}_d^{n,\delta}, \mathfrak{M}^{\otimes n}) = \text{ER}(S_d, \mathfrak{M}).$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} n \int_{\Omega} p(\omega) H_q \left(\frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \right) \mu(d\omega) \\ - \int_{\Omega \times n} p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) H_q \left(\frac{V(\omega^{(n)}) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega^{(n)})^*}{p^{n,\delta}(\omega^{(n)})} \right) \mu(d\omega^{(n)}) \end{aligned} \quad (33)$$

и заметим, что поскольку из неотрицательности $\text{ER}(S_d, \mathfrak{M})$ следует, что

$$\int_{\Omega} p(\omega) H_q \left(\frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \right) \mu(d\omega) \leq H_q(S_d) < \infty, \quad (34)$$

то разность (33) корректно определена.

Прибавим и вычтем в (33) слагаемое

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^{\times n}} p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) \operatorname{Tr} \frac{V(\omega^{(n)}) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega^{(n)})^*}{p^{n,\delta}(\omega^{(n)})} \log \frac{V(\omega^{(n)}) S_d^{\otimes n} V(\omega^{(n)})^*}{p(\omega^{(n)})} \mu(d\omega^{(n)}) \\
& = - \frac{1}{k_{n,\delta}} \sum_{J \in \widehat{T}^{n,\delta}} \int_{\Omega^{\times n}} \operatorname{Tr} V(\omega_1) |e_{j_1}\rangle \langle e_{j_1}| V(\omega_1)^* \otimes \cdots \otimes V(\omega_n) |e_{j_n}\rangle \langle e_{j_n}| V(\omega_n)^* \\
& \quad \times \left(\log \frac{V(\omega_1) S_d V(\omega_1)^*}{p(\omega_1)} \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots \right. \\
& \quad \left. + I \otimes \cdots \otimes I \otimes \log \frac{V(\omega_n) S_d V(\omega_n)^*}{p(\omega_n)} \right) \mu(d\omega^{(n)}) \\
& = \frac{1}{k_{n,\delta}} \sum_{J \in \widehat{T}^{n,\delta}} (g(j_1) + \cdots + g(j_n)), \tag{35}
\end{aligned}$$

где

$$g(j) = - \int_{\Omega} \operatorname{Tr} V(\omega) |e_j\rangle \langle e_j| V(\omega)^* \log \frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \mu(d\omega).$$

(Здесь используется обобщение свойства логарифма $\log(A \otimes B) = \log A \otimes I + I \otimes \log B$, где в случае вырожденных A или B рассматриваются сужения на подпространства $\operatorname{supp} A$ и $\operatorname{supp} B$.) Заметим, что сумма (35) принимает только конечные значения при условии (34).

Получаем, что разность (33) равна

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{\times n}} p^{n,\delta}(\omega^{(n)}) H_q \left(\frac{V(\omega^{(n)}) \bar{S}_d^{n,\delta} V(\omega^{(n)})^*}{p^{n,\delta}(\omega^{(n)})} \parallel \frac{V(\omega^{(n)}) S_d^{\otimes n} V(\omega^{(n)})^*}{p(\omega^{(n)})} \right) \mu(d\omega^{(n)}) \\
& + \frac{1}{k_{n,\delta}} \sum_{J \in \widehat{T}^{n,\delta}} (g(j_1) + \cdots + g(j_n)) \\
& - n \int_{\Omega} p_{\omega} \operatorname{Tr} \frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \log \frac{V(\omega) S_d V(\omega)^*}{p(\omega)} \mu(d\omega). \tag{36}
\end{aligned}$$

Используя определение относительной энтропии для гибридных систем и свойство монотонности относительной энтропии, получаем оценку сверху для первого слагаемого в виде

$$H_c(p(\omega^{(n)}) \parallel p(\omega_1) \cdots p(\omega_n)) + H_q(\bar{S}_d^{n,\delta} \parallel S_d^{\otimes n}) \leq 2H_q(\bar{S}_d^{n,\delta} \parallel S_d^{\otimes n}),$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ в силу свойств сильно типичного проектора, как показано в [2, раздел 8.4.2]. Для остальных слагаемых в (36) имеет место оценка

$$\frac{n}{k_{n,\delta}} \sum_{J \in \widehat{T}_d^{n,\delta}} \left| \frac{g(j_1) + \cdots + g(j_n)}{n} - \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j g(j) \right| < nd\delta \max g.$$

Это доказывает, что $C_{\text{ea}}(\mathcal{M}) \geq \text{ER}(S_d, \mathfrak{M})$ для произвольного входного состояния S_d , удовлетворяющего условию $\text{Tr } S_d F \leq E$. Устремляя d к бесконечности, имеем

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \text{ER}(S_d, \mathfrak{M}) \geq \text{ER}(S, \mathfrak{M}),$$

так как по теореме 2 из [12] для любой последовательности состояний S_n , сходящихся к S_0 , и любого эффективного измерения $\mathfrak{M}$ из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_q(S_n) = H_q(S_0) < \infty \quad (37)$$

следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ER}(S_n, \mathfrak{M}) = \text{ER}(S_0, \mathfrak{M}) < \infty,$$

а последовательность состояний S_d такова, что условие (37) выполняется ([13, лемма 4]).

Получаем

$$C_{\text{ea}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \geq \text{ER}(S, \mathfrak{M}) \quad (38)$$

для произвольного входного состояния S такого, что $\text{Tr } SF < E$. Для операторов S с условием $\text{Tr } SF = E$ можно дополнительно рассмотреть операторы $S_\epsilon = (1-\epsilon)S + \epsilon|e\rangle\langle e|$, где $\langle e|F|e\rangle < E$, тогда $\text{Tr } S_\epsilon F < E$. Устремляя ϵ к нулю и пользуясь полунепрерывностью снизу $\text{ER}(S, \mathfrak{M})$, распространяем неравенство (38) на входные состояния с условием $\text{Tr } SF \leq E$.

Если E — минимальное собственное значение F , то благодаря условию (19) из ограничения $\text{Tr } SF \leq E$ вытекает, что носитель S конечномерен, а значит, можно принять $S_d = S$ и повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, прямое утверждение теоремы кодирования также доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нильсен М. А., Чанг И. Л. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006, 822 с.
2. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010, 327 с.
3. Bennett C. H., Shor P. W., Smolin J. A., Thaplyal A. V. Entanglement-assisted capacity of a quantum channel and the reverse Shannon theorem. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2002, v. 48, № 10, p. 2637–2655.
4. Холево А. С. Информационная емкость квантовой наблюдаемой. — Проблемы передачи информации, 2012, т. 48, № 1, с. 3–13.
5. Холево А. С. Классические пропускные способности квантового канала с ограничением на входе. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 359–374.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. М.: Мир, 1985, 357 с.
7. Barchielli A., Lupieri G. Instruments and channels in quantum information theory. — Optics and Spectroscopy, 2005, v. 99, p. 425–432.

8. *Barchielli A., Lupieri G.* Instruments and mutual entropies in quantum information. — Banach Center Publ., 2006, v. 73, p. 65–80.
9. *Кузнецова А. А.* Условная энтропия для бесконечномерных квантовых систем. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 782–790.
10. *Wehrl A.* General properties of entropy. — Rev. Modern Phys., 1978. v. 50, p. 221–260.
11. *Cover T. M., Thomas J. A.* Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991, 542 p.
12. *Shirokov M. E.* Entropy reduction of quantum measurements. — J. Math. Phys., 2011, v. 52, № 5, paper № 052202, 18 p.
13. *Lindblad G.* Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems. — Comm. Math. Phys., 1974, v. 39, p. 111–119.

Поступила в редакцию
1.XI.2012