Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, О методе Лапласа для гауссовских мер в банаховом пространстве,
Теория вероятн. и ее примен., 2013, том 58, выпуск 2, 325–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:49:37

© 2013 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

О МЕТОДЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКИХ МЕР
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

В статье доказаны результаты о точных асимптотиках вероятностей $P_A(uD)$, $u \rightarrow \infty$, где P_A — гауссовская мера в бесконечномерном банаховом пространстве B со средним нуль и невырожденным ковариационным оператором A , $D = \{x \in B: Q(x) \geq 0\}$ — борелевское множество в B , Q — гладкая функция. Изучен случай, когда функционал действия достигает своего минимума на D на одномерном многообразии. Методом исследования является метод Лапласа в банаховых пространствах для гауссовских мер. На основе общего результата, полученного в статье, найдена при $0 < p \leq 6$ точная асимптотика больших отклонений распределений L^p -функционалов для центрированного броуновского моста, возникающего в качестве предела при рассмотрении статистики Ватсона. Явные константы даны для случаев $p = 1$ и $p = 2$.

Ключевые слова и фразы: метод Лапласа, большие отклонения, гауссовские процессы, принцип больших отклонений, функционал действия, центрированный броуновский мост, статистика Ватсона, гипергеометрическая функция.

1. Введение и формулировка основных результатов. Во многих разделах теории вероятностей, математической статистики, статистической физики, функционального анализа возникает необходимость вычисления точной асимптотики модельного интеграла типа Лапласа

$$J_u(D) = \int_D f(x) \exp\{-u^2 F(x)\} dP_u(x) \quad (1.1)$$

при $u \rightarrow \infty$. Здесь D — борелевское множество в том или ином бесконечномерном банаховом пространстве B , f и F — действительные функции, определенные на B , P_u — семейство вероятностных мер в B , зависящих от параметра u .

*Московский государственный университет, им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория теории вероятностей; e-mail: vrfatalov@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00077, 11-01-00050).

Наиболее распространенными и важными являются следующие два класса задач, связанные с интегралом (1.1). Первый класс задач, представляющий большое значение для проблем статистической и математической физики, — это когда в качестве множества D берется все пространство B . Оказалось, что для достаточно гладких функций f , F и Q точную асимптотику интегралов $J_u(B)$ можно находить с помощью асимптотического метода в функциональном пространстве, который аналогичен методу Лапласа в $\mathbf{R}^k$. Впервые на это обратил внимание Р. Фейнман в своих работах по квантовой физике [38].

Становление метода Лапласа в бесконечномерных пространствах как строгого математического метода произошло в восьмидесятые годы прошлого века, после появления и развития асимптотического принципа больших уклонений (ПБУ) М. Д. Донскера–С. Варадана в теории вероятностей (см. [4], [7, гл. 3], [20, §12], [26, гл. 2], [46], [60]). Именно, в работах Р. Эллиса, Дж. Розена [47] (гауссовские меры), Р. Азенкотта [39], Ж. Бен Аруса [40] (диффузионные процессы с малым параметром), Э. Больтхаузена [41] (распределения сумм независимых банаховозначных случайных элементов), С. Кусуоки, Й. Тамуры [51] (распределение времени пребывания марковского симметричного процесса) был обоснован в окончательной форме асимптотический метод Лапласа в банаховых пространствах, позволивший вычислять точные асимптотики $J_u(B)$ для дважды дифференцируемых по Фреше функций $F(x)$. Этой тематике посвящены также работы А. Д. Вентцеля, М. И. Фрейдлина [7], [8] (марковские процессы) и ряд других. Систематическому изложению этих результатов посвящена первая часть обзора [26].

Второй класс задач, связанный с интегралом (1.1) и имеющий большое значение для различных областей теории вероятностей, возникает при $f(x) \equiv 1$ и $F(x) \equiv 0$. В качестве множества D , как правило, фигурирует «хорошее» множество вида

$$D = \{x: Q(x) \geq 0\}, \quad (1.2)$$

где $Q(x)$ — непрерывный функционал на B . При этом множество D должно иметь непустую внутренность и быть «близким» к выпуклому (см. условие (B2) ниже). В качестве функционала $Q(x)$ можно брать такие функционалы, как $\sup_{t \in T} x(t) - 1$, $\int_0^1 |x(t)|^p dt - 1$, а в качестве банаховых пространств — пространства $C(T)$, $L^p[0, 1]$ и т.д. (см. [26]). В этом случае задача о вычислении точной асимптотики интеграла (1.1) превращается в задачу о нахождении точной асимптотики больших уклонений для вероятностей $P_u(D)$ при $u \rightarrow \infty$.

Гауссовские меры являются одним из самых важных примеров распределений, для которых возможно вычисление точной асимптотики интеграла (1.1). В этом случае рассматриваемое семейство гауссовских

мер P_u часто строится по одной заданной гауссовской мере P и имеет простой вид: $P_u(D) \equiv P(uD)$, где $uD = \{ux: x \in D\}$, $u > u_0$.

Поведение точных асимптотик гауссовских мер $P(uD)$ существенно зависит от гладкости функционала Q . Для дифференцируемых функционалов Q точные асимптотики гауссовских мер $P(uD)$ в случае, когда так называемый функционал действия имеет конечное число точек минимума, были впервые найдены автором в результате дальнейшего развития метода Лапласа в работах [26], [29], [34]. В статье [26, §3.3] были также доказаны соответствующие теоремы и о точных асимптотиках гауссовских интегралов $J_u(D)$. При этом, наряду с использованием результатов из статьи [47], были осуществлены и оригинальные построения по переносу некоторых конечномерных результатов из [37, гл. 2] на бесконечномерные пространства. Некоторые примеры применения общих результатов из [29], [34] рассмотрены в статьях [35], [36].

В данной работе мы докажем результаты о точных асимптотиках гауссовских мер $P(uD)$ в случае, когда функционал действия имеет одномерное многообразие точек минимума.

Для непрерывных, но не дифференцируемых функционалов Q типа супремума разработана специфическая модификация метода Лапласа — так называемый метод двойных сумм [26, гл. 2], [25], [30], [31], который позволяет находить точные асимптотики вероятностей

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| > u\right\},$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t, s \in [0, 1], t \neq s} \frac{|X(t) - X(s)|}{|t - s|^\gamma} > u\right\}, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad u \rightarrow \infty,$$

для широкого класса гауссовских полей $X(t)$, заданных на компакте $T \subset \mathbf{R}^k$, $k \geq 1$.

В статьях [32], [48] было осуществлено построение метода Лапласа для вычисления точных асимптотик вероятностей $\mathbf{P}\{S_n/b_n \in D\}$, $n \rightarrow \infty$, где S_n — сумма n независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве B , D — множество вида (1.2) с гладкой функцией Q и $\{b_n\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $b_n \equiv n$ (случай больших отклонений) или $b_n/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $b_n/n \rightarrow 0$ (случай умеренных отклонений). Построение метода Лапласа для вероятностей, связанных с распределением времени пребывания марковского симметричного процесса, выполнено в работе [33].

Среди недавних работ, посвященных асимптотикам типа Лапласа для вероятностных мер и интегралов, отметим работы [20], [45], [54], [61] (гауссовские меры), [50], [52], [53] (распределения сумм независимых банаховозначных случайных элементов), [42] (марковские процессы), [58],

[59] (стохастические дифференциальные уравнения в частных производных).

Перейдем к изложению результатов, полученных в данной статье.

Пусть $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ — действительное сепарабельное банахово пространство, $(\mathbf{B}^*, \|\cdot\|_*)$ — сопряженное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — билинейная форма, устанавливающая двойственность между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$.

Пусть P_A — гауссовская мера, определенная на борелевской σ -алгебре пространства $\mathbf{B}$, со средним нуль и ковариационным оператором $A: \mathbf{B}^* \rightarrow \mathbf{B}$ (см. [6, гл. 4, §2, п. 4], [10, гл. 1]). Напомним, что ковариационный оператор A является: *симметричным*, т.е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in \mathbf{B}^*$, *положительным*, т.е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in \mathbf{B}^*$, *ядерным*, т.е. для некоторой последовательности $\{x_k\}$ элементов $\mathbf{B}$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$, верно представление $Ax^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x^* \rangle x_k$, $x^* \in \mathbf{B}^*$ (см. [6, гл. 3, §2, п. 3]).

Будем обозначать первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$ (см. определение 1 в [2, п. 2.2.1]), при этом мы предполагаем, что эти производные можно рассматривать соответственно как элемент пространства $\mathbf{B}^*$ и как линейный оператор из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^*$. Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть U — открытое множество в $\mathbf{B}$ и $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $\text{Hol}_\alpha^2(U)$ множество дважды дифференцируемых по Фреше на U числовых функций $S: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}$, для которых

$$\|S''(x) - S''(y)\| = O(\|x - y\|^\alpha), \quad \|x - y\| \rightarrow 0, \quad x, y \in U$$

(вторая производная удовлетворяет на U условию непрерывности по Гёльдеру порядка α).

Здесь операторная норма также обозначена символом $\|\cdot\|$. Пусть $\text{Dom}(C)$ обозначает область определения оператора C . Придерживаясь работ [26, §3.3], [32], [47, ч. II], введем в рассмотрение следующие условия.

(B1) Ковариационный оператор A инъективен, т.е. $\langle Ay, y \rangle \equiv \int_{\mathbf{B}} \langle x, y \rangle^2 P_A(dx) > 0$ для всех $0 \neq y \in \mathbf{B}^*$.

Отметим, что, согласно следствию из предложения 1.3 в [26, гл. 3, §1], ковариационный оператор A инъективен тогда и только тогда, когда множество его значений $R(A) := \{Ay: y \in \mathbf{B}^*\}$ всюду плотно в $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$.

(B2) Множество D замкнуто и имеет вид

$$D = \{x \in \mathbf{B}: Q(x) \geq 0\}, \tag{1.3}$$

где $Q(x)$ — непрерывная действительная функция такая, что одно из множеств D , $\mathbf{B} \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из $\mathbf{B}$. Пусть D имеет непустую внутренность и не содержит нулевого элемента в $\mathbf{B}$.

(В3) Квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума $\sigma^{-2} > 0$ на $D \cap R(A)$ на одномерном дважды дифференцируемом компактном многообразии M , лежащем на границе ∂D множества D .

Таким образом,

$$\langle m, A^{-1}m \rangle =: \sigma^{-2} > 0 \quad \text{для всех } m \in M. \quad (1.4)$$

Ниже тождественные операторы в различных пространствах обозначаются одним и тем же символом $\mathcal{I}$.

Обозначим через $n_x \in \mathbf{B}$ единичный касательный вектор к кривой M в точке x , через $\widehat{M}_x$ — одномерное аффинное пространство, натянутое на вектор n_x и содержащее точку x (т.е. одномерное касательное пространство к M в точке x), см. [2, гл. 2, п. 2.3.5], [22, гл. 3, §3]. Тогда $M_x := \widehat{M}_x - x$ представляет собой одномерное подпространство в $\mathbf{B}$, содержащее точку 0. Как это принято, мы будем рассматривать единичные касательные векторы как свободные векторы, поэтому выходящий из точки 0 единичный вектор, на который натянуто подпространство M_x , мы также будем обозначать через n_x .

Согласно общей теории банаховых пространств (см. [12, гл. 6, §3 и §9, упр. 18]), для одномерного подпространства M_x в $\mathbf{B}$ существует дополнение — замкнутое подпространство N_x такое, что верно представление $\mathbf{B} = M_x \oplus N_x$. Это означает, что каждый элемент $y \in \mathbf{B}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in M_x$, $y_2 \in N_x$. При этом существует проектор Π_{M_x} на подпространство M_x такой, что $M_x = \Pi_{M_x} \mathbf{B}$, $N_x = \Pi_{N_x} \mathbf{B}$, здесь $\Pi_{N_x} := \mathcal{I} - \Pi_{M_x}$ является оператором проектирования на подпространство N_x .

Очевидно, что $\widehat{N}_x := N_x + x$ есть аффинная гиперплоскость коразмерности 1, проходящая через точку x .

(В4) Функция Q дважды дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности U_0 многообразия M , принадлежит классу $\text{Hol}_\alpha^2(U_0)$ для некоторого $\alpha > 0$ и удовлетворяет условию невырожденности: для всех $x \in M$ имеет место неравенство

$$\langle y, [A^{-1} - \lambda Q''(x)]y \rangle > 0, \quad 0 \neq y \in N_x \cap \text{Dom}(A^{-1}) \cap \text{Dom}(Q''(x)),$$

где $\lambda = \langle x, A^{-1}x \rangle / \langle x, Q'(x) \rangle > 0$ (множитель Лагранжа, см. лемму 1 в разделе 2).

Пересечение $S_x := \widehat{N}_x \cap \partial D$ является гладкой поверхностью коразмерности 2, которую можно задать в виде

$$S_x = \{y \in \widehat{N}_x : F(y) = 0\}, \quad (1.5)$$

здесь, в силу условия (В4), функция $F(y)$ дважды дифференцируема по Фреше в окрестности $U_0 \cap \widehat{N}_x$. В наших условиях, вследствие формул (1.3), (1.5), функция $F(y)$ определяется единственным образом из

уравнения

$$S_x = \{y \in \mathbf{B}: Q(y) = 0, y - x \in N_x\}.$$

Напомним (см. лемму 3 из [12, гл. 6, §3]), что оператор $\Pi_{M_x}^*$, сопряженный к проектору Π_{M_x} , является проекционным оператором в банаховом пространстве $\mathbf{B}^*$, причем

$$\Pi_{M_x}^* \mathbf{B}^* = \{y^*: \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y \in N_x\}.$$

Последнее множество есть одномерное подпространство в $\mathbf{B}^*$, поэтому мы можем отождествить его с пространством M_x^* — сопряженным пространством одномерного подпространства M_x . Таким образом,

$$M_x^* \equiv \Pi_{M_x}^* \mathbf{B}^* = \{y^*: \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y \in N_x\}.$$

Отсюда и из леммы 3 книги [12, гл. 6, §3] вытекает, что

$$N_x^* \equiv \Pi_{N_x}^* \mathbf{B}^* = \{y^*: \langle n_x, y^* \rangle = 0\}, \quad (1.6)$$

где $\Pi_{N_x}^* := \mathcal{J} - \Pi_{M_x}^*$ является оператором проектирования на подпространство N_x^* . Следовательно, $\Pi_{M_x}^* \equiv \Pi_{M_x^*}$, $\Pi_{N_x}^* \equiv \Pi_{N_x^*}$.

Мы будем рассматривать подпространство N_x как банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, при этом определенное выше подпространство N_x^* является его сопряженным пространством, двойственность между N_x и N_x^* будем по-прежнему обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определим оператор $F''(x): N_x \rightarrow N_x^*$. Введем функцию $\tilde{F}(z) := F(z + x)$, $z \in N_x$. В силу наложенных условий, существует вторая производная по Фреше $\tilde{F}''(0) = F''(x)$, которую мы можем рассматривать как линейный оператор, действующий из N_x в N_x^* .

Введем также линейный оператор $A^{N_x} := \Pi_{N_x} A \Pi_{N_x}^*$. Область значений этого оператора есть пространство N_x . Пусть $n_x^* \in \mathbf{B}^*$ обозначает единичный вектор, на который натянуто одномерное пространство M_x^* .

Теорема 1. Пусть выполнены сформулированные выше предположения, включая условия (B1)–(B4). Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_M c(x) dV_M(x) (1 + o(1)), \quad (1.7)$$

где

$$c(x) := \left[\langle A n_x^*, n_x^* \rangle |\det B_x \langle B_x^{-1} A^{N_x} a_x, a_x \rangle| \right]^{-1/2}, \quad (1.8)$$

$$B_x := \mathcal{J} - \lambda A^{N_x} F''(x) \quad (1.9)$$

— линейный оператор, отображающий N_x в N_x ,

$$a_x := A^{-1}x, \quad (1.10)$$

и dV_M — элемент длины на кривой M , справедливо при условии, что конечен детерминант оператора B_x :

$$\det B_x := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \beta_k),$$

здесь β_k , $k = 1, 2, \dots$, являются собственными значениями оператора $\lambda A^{N_x} F''(x): N_x \rightarrow N_x$.

Заметим, что в формуле (1.8) в качестве элемента a_x можно брать $\Pi_{N_x^*} A^{-1}x$. Напомним (см. [27, гл. 27]), что для ядерного оператора C в банаховом пространстве B определен детерминант

$$\det(\mathcal{J} + C) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \nu_k), \quad (1.11)$$

где $\{\nu_k\}$ — последовательность собственных чисел оператора C . Для ядерных операторов в хороших пространствах (например, в пространствах L^p) произведение (1.11), как правило, конечно см. [32], [34], [36]. Довольно сложный вопрос о конечности произведения (1.11) в случае ядерных операторов в общих банаховых пространствах рассмотрен в книгах [27], [56] (см. также замечание 1 в [34]).

Если оператор $C: B \rightarrow B$ может быть записан в матричном виде $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,\infty}}$ (например, относительно некоторого базиса Шаудера), то для вычисления детерминанта (1.11) можно брать конечномерные аппроксимации:

$$\det(\mathcal{J} + C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(\mathcal{J} + C_k),$$

где $C_k = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Свойства детерминантов операторов $\mathcal{J} + C$ в гильбертовом пространстве приведены в книге [11].

З а м е ч а н и е 1. Пусть любые элементы y и y^* банаховых пространств $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$ допускают представление в виде последовательностей

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in \mathbf{B}, \quad y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*, \dots) \in \mathbf{B}^*,$$

а рассматриваемые линейные операторы допускают представление в виде бесконечных матриц. Такая ситуация естественно возникает в двух случаях. Первый, общеизвестный случай — когда в обоих пространствах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$ существуют базисы Шаудера (см. [15, гл. 13, §7, п. 7.2], [18, гл. 1, §6]). Второй, менее известный случай — когда осуществляется переход от исходной гауссовской меры P_A на $\mathbf{B}$ к ее эквивалентному варианту — гауссовской мере $P_{\hat{A}}$, заданной на банаховом пространстве последовательностей $\hat{\mathbf{B}}$ (см. [26, §3.3]).

При таком подходе, если выполнены условия $n_x^* = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, $x = (0, x_2, \dots, x_n, \dots)$, то для вычислений может оказаться более удобной следующая формула для функции $c(x)$:

$$c(x) = |\det \Lambda(x)|^{-1/2}, \quad x \in M, \quad (1.12)$$

где $\Lambda(x)$ — линейный оператор, имеющий матричное представление

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A^{-1}x \\ 0 & 0 & n_x^* \\ An_x^* & x & \mathcal{J} - \lambda A Q''(x) \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) понимается в следующем координатном смысле. Элементы $A^{-1}x \in \mathbf{B}^*$, $n_x^* \in \mathbf{B}^*$, записываются в виде вектор-строки своих координат, элементы $An_x^* \in \mathbf{B}$, $x \in \mathbf{B}$, — в виде вектор-столбцов, а оператор $\mathcal{J} - \lambda A Q''(x): \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ — в матричном виде. Матрица $\Lambda(x)$ состоит из этих блоков и двумерной нулевой матрицы, стоящей в верхнем левом углу.

Для упрощения вычислений по формулам (1.12), (1.13) удобно брать матричное представление оператора $\mathcal{J} - \lambda A Q''(x)$ в диагональном виде.

З а м е ч а н и е 2. Довольно часто оператор A , множества D и M обладают некоторыми свойствами симметрии (подробное определение для случая гильбертова пространства имеется в [47, ч. II, с. 156]). В такой ситуации значение функции $c(x)$ равно одному и тому же числу c для всех точек $x \in M$ и $\int_M c(x) dV_M(x) = c \operatorname{mes}(M)$, где $\operatorname{mes}(M)$ — длина кривой M . Два подобных примера даны ниже, в следствии 1.

З а м е ч а н и е 3. Условие дифференцируемости функционала $Q(x)$ из (B4) можно заменить на следующее, более слабое. Пусть существуют окрестность U_1 многообразия M и всюду плотное множество $T \subset U_1$ такие, что функция Q дважды дифференцируема по Фреше в точках множества T и Q принадлежит классу $\operatorname{Hol}_\alpha^2(T)$ для некоторого $\alpha > 0$. Напомним, что в определении производной по Фреше, данном в [17, §2, п. 2.2], допускается, чтобы рассматриваемый оператор был определен лишь на некотором всюду плотном подмножестве банахова пространства.

П р и м е р. Точные асимптотики больших уклонений распределений L^p -функционалов для централизованного броуновского моста, $p > 0$. L^p -функционалом мы называем функционал

$$G(x) := \int_0^1 |x(t)|^p dt, \quad p > 0, \quad (1.14)$$

определенный на том или ином пространстве функций на $[0, 1]$. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс и $w_0(t) = w(t) - tw(1)$, $t \in [0, 1]$, — броуновский мост. Определим гауссовский процесс

$$\xi(t) := w_0(t) - \int_0^1 w_0(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

который называется централизованным броуновским мостом (см. [57]). Этот процесс возникает в качестве слабого предела эмпирического процесса при рассмотрении *статистики Ватсона* (см. [21, гл. 2, §9], [24, гл. 2, §2.1, §2.5], [44], [49], [62]).

Гауссовский процесс $\xi(t)$ имеет п.н. непрерывные траектории, среднее ноль и ковариационную функцию

$$r(t, s) := \frac{1}{2} \left[(t-s)^2 - |t-s| + \frac{1}{6} \right], \quad t, s \in [0, 1]. \quad (1.15)$$

Очевидно, что $\int_0^1 \xi(t) dt = 0$. Пусть $\mu \equiv \mu_\xi$ обозначает распределение процесса $\xi(t)$ в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций, снабженном нормой супремума (см. [9, гл. 5], [10], [20]). Применяя теорему 1, получаем следующий результат.

На протяжении всей статьи $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию.

Теорема 2. Для $0 < p \leq 6$ при $u \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} &= \mu_\xi \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p dt > u^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2(p)} \right\} \frac{K(p)}{2\pi} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\sigma^{-2}(p) = \frac{8\pi}{p} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{(2-p)/p} \left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)} \right]^2, \quad (1.17)$$

$0 < K(p) < \infty$.

Константу $K(p)$ можно вычислять по формулам (1.7), (1.12), (1.13) с $M = M_0$, где M_0 определено ниже в соотношении (3.14).

Ограничение сверху на p в теореме 2 вытекает из того факта, что множество точек минимума из условия (В3) при $0 < p \leq 6$ качественно отличается от множества точек минимума из этого условия при $p > 6$ (см. пример 1 в статье [55] и замечание 4 в разделе 3 ниже).

В двух наиболее простых случаях, при $p = 1$ и $p = 2$, найдены точные значения константы $K(p)$.

Следствие 1. При $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\xi(t)| dt > u \right\} &= \mu_\xi \left\{ \int_0^1 |x(t)| dt > u \right\} \\ &= \exp\{-24u^2\} (1 + o(1)); \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 \xi^2(t) dt > u^2 \right\} &= \mu_\xi \left\{ \int_0^1 x^2(t) dt > u^2 \right\} \\ &= 2 \exp\{-2\pi^2 u^2\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Логарифмическая асимптотика вероятности из формулы (1.18) была ранее вычислена в работе [57], показатель $2\pi^2$ был найден в статье [62] (см. также [24, с. 75]). Соотношение (1.19) можно получить также еще двумя разными способами: применяя последнюю формулу из §9 главы 2 книги [21, с. 75] и используя формулу В. М. Золотарева [13], [26, §3] (см. теорему 3 в п. 4.2).

2. Основные положения метода Лапласа. Доказательство теоремы 1. Изложим основные положения метода Лапласа для гауссовских мер, следуя той же схеме, что и в работах [26, §3.3], [32, §2], и уделяя при этом особое внимание условию (В3). Мы также будем учитывать результаты статьи [47, ч. II], где исследована точная асимптотика гауссовского интеграла $J_u(H)$ (см. (1.1)) в случае, когда функционал действия имеет конечномерное многообразие точек минимума. В [47, ч. II] подробно рассмотрен случай гильбертова пространства $\mathbf{B} \equiv H$, основной результат доказан также и для банахова пространства $C[0, 1]$ (см. [47, ч. II, §6, теорема 5]). Метод работы [47, ч. II] допускает обобщение на общие банаховы пространства (см. также [41, ч. II, §6]), поэтому мы будем использовать некоторые утверждения из [47, ч. II], справедливые и в нашем случае гауссовской меры P_A в пространстве $\mathbf{B}$.

Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с оператором A , т.е. пополнение области значений $R(A)$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ay\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in \mathbf{B}^*$ (см. предложение 1.6 в [6, гл. 3]).

Определим *функционал действия* гауссовской меры P_A следующим образом:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|_A^2, & \text{если } x \in H_A \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что $I(x)$, рассматриваемая как функция на H_A , бесконечно дифференцируема по Фреше на $(H_A, \|\cdot\|_A)$. Однако $I(x)$ недифференцируема на $(H, \|\cdot\|)$. Свойства функционала $I(x)$ описаны, например, в работе [26, §2]. Отметим, что

$$I(x) = \frac{1}{2} \langle x, A^{-1}x \rangle, \quad x \in R(A). \quad (2.2)$$

Перейдем к изложению основных лемм метода Лапласа, полагая выполненными условия (В1)–(В4).

Лемма 1 (решение экстремальной задачи в D). (i) *Функционал действия $I(x)$ достигает своего минимума на множестве D на одномерной кривой M , причем для каждой точки $m \in M$ выполнены равенства*

$$Q(m) = 0, \quad (2.3)$$

$$A^{-1}m - \lambda Q'(m) = 0, \quad (2.4)$$

где $\lambda > 0$ — число из условия (В4).

(ii) *Для каждой точки $m \in M$ имеет место неравенство (условие второго порядка)*

$$\langle y, [A^{-1} - \lambda Q''(m)]y \rangle \geq 0, \quad 0 \neq y \in N_m \cap \text{Dom}(A^{-1}) \cap \text{Dom}(Q''(m)).$$

Доказательство леммы проводится при помощи метода множителей Лагранжа [2, гл. 3, пп. 3.2.1, 3.4.1], дающего необходимые условия (первого и второго порядка) минимума функции $I(x)$ при ограничении $Q(x) \geq 0$. В случае, когда множество минимума M состоит из одной точки x^0 , аналог леммы 1 подробно доказан в [32, §2, лемма 1]. Наш случай одномерного многообразия M рассматривается совершенно аналогично.

Отметим, что в условии невырожденности из (B4) мы требуем выполнения *строгого неравенства* из утверждения (ii) леммы 1.

Лемма 2 (о логарифмической асимптотике). *При выполнении условий (B1)–(B3) имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln P_A(uD) &= - \inf_{x \in D} I(x) = -\frac{1}{2} \langle m, A^{-1}m \rangle \\ &= -\sigma^{-2} \quad \text{для всех } m \in M. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первое, наиболее важное, соотношение в формуле (2.5) доказано в [43, с. 34, утверждение (iv)], оно имеет в своей основе уже упоминавшийся фундаментальный принцип больших отклонений для гауссовских мер в банаховых пространствах (см. также [26, пример 2.4]). Два последних равенства в формуле (2.5) следуют непосредственно из леммы 1 и соотношений (1.4), (2.2).

Отметим, что условие выпуклости из (B2) существенно для справедливости леммы 2. Лемма 2 составляет основу метода Лапласа и позволяет ограничиться исследованием асимптотики гауссовской меры малой окрестности множества M . Следуя [47, ч. II, с. 161, 175], для $\delta > 0$ введем *трубчатую окрестность* $M(\delta)$ множества M :

$$M(\delta) := \left\{ x \in \mathbf{B}: \inf_{m \in M} \|x - m\| < \delta \right\},$$

и положим

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\delta) := M(\delta) \cap D = \left\{ x \in D: \inf_{m \in M} \|x - m\| < \delta \right\}. \quad (2.6)$$

Как указано в [47, ч. II, с. 161, 176], для достаточно малых $\delta < \delta_0$ трубчатая окрестность $M(\delta)$ обладает рядом хороших свойств, в частности,

$$\begin{aligned} \text{каждая точка } y \in M(\delta) \text{ может быть записана единственным} \\ \text{образом в виде } y = x + z, \text{ где } x \in M, z \in \hat{N}_x, \|z\| < \delta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ниже мы считаем, что δ выбрано достаточно малым.

Лемма 3 (о выделении малой окрестности множества минимума). *Для любого $\delta > 0$ найдется такое $\kappa = \kappa(\delta) > 0$, что при $u \rightarrow \infty$ имеет место соотношение*

$$P_A(uD) = P_A(u\mathcal{V})(1 + O(e^{-u^2\kappa})). \quad (2.8)$$

Доказательство леммы стандартно; оно основано на лемме 2 и полунепрерывности снизу функционала действия $I(x)$ и проводится так же, как доказательство леммы 3 в [32], где рассмотрен случай одноточечного множества M . Соотношением, аналогичным (2.8), является формула (3.5) из [47, ч. II, с. 162].

Для простоты дальнейшего изложения мы будем считать без ограничения общности, что *многообразие M представляет собой кривую*

$$M = \{x_s: 0 \leq s \leq \ell\} \quad (2.9)$$

на поверхности ∂D , причем в качестве параметра используется длина дуги.

Согласно свойству (2.7) трубчатой окрестности, для точек $y = x + z \in M(\delta)$, $x = x_s$, определена функция

$$I_M(x, z) := 1 - \left\langle \frac{d^2 x_s}{ds^2}, z \right\rangle, \quad z \in \hat{N}_x, \quad (2.10)$$

здесь, напомним, $\langle d^2 x_s/ds^2, z \rangle$ — кривизна кривой M в направлении z (см. [47, ч. II, с. 156]).

Положим

$$\hat{R}_x := \hat{N}_x \cap \mathcal{V}(\delta), \quad R_x := \hat{R}_x - x, \quad x \in M, \quad (2.11)$$

таким образом, R_x — это малая полуокрестность нуля в подпространстве N_x . Пусть P_{N_x} обозначает гауссовскую меру на подпространстве N_x со средним нуль и ковариационным оператором A^{N_x} , $x \in M$.

Лемма 4. *Для любого $u > 0$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} dP_A(uy) &= \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\times \int_M \left[\int_{R_x} I_M(x, z) \exp \left\{ -u^2 \langle z, A^{-1}x \rangle \right\} dP_{N_x}(uz) \right] \\ &\times [\langle An_x^*, n_x^* \rangle]^{-1/2} dV_M(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Утверждение леммы 4 представляет собой переформулировку в наших условиях важной леммы 3 из [47, ч. II, с. 162], которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} dP_A(uy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \left[\int_{R_x} I_M(x, z) \right. \\ &\times \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \langle x, A^{-1}x \rangle - u^2 \langle z, A^{-1}x \rangle \right\} dP_{N_x}(uz) \Big] \\ &\times [\langle An_x^*, n_x^* \rangle]^{-1/2} dV_M(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Формула (2.13) представляет собой некоторое обобщение известной формулы Камерона–Мартина о сдвиге гауссовской меры (ср. с леммой 3.7 из [26] в случае одноточечного множества M). Из (2.13) легко получаем (2.12), учитывая, что $dV_M(ux) = u dV_M(x)$. Отметим, что одномерная гауссовская мера A_{M_x} из работы [47, ч. II], заданная на подпространстве M_x , в нашем случае является одномерной гауссовской мерой со средним нуль и дисперсией $\langle An_x^*, n_x^* \rangle$.

Лемма 5 (о точной асимптотике внутреннего интеграла в (2.12)).
При $u \rightarrow \infty$ следующее асимптотическое соотношение выполнено равномерно по $x \in M$:

$$\begin{aligned} T_u(x) &:= \int_{R_x} I_M(x, z) \exp \left\{ -u^2 \langle z, A^{-1}x \rangle \right\} dP_{N_x}(uz) \\ &= \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \left[\left| \det B_x \langle B_x^{-1} A^{N_x} a_x, a_x \rangle \right| \right]^{-1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.14)$$

здесь использованы обозначения (1.9), (1.10).

Доказательство. Несложно убедиться, что для фиксированного $x \in M$ к интегралу $T_u(x)$, взятому по малой окрестности нуля R_x в банаховом пространстве N_x , применима теорема 3.4 из [26].

В самом деле, пусть функционал действия $I_0(z)$ гауссовской меры P_{N_x} определяется формулой (2.1), записанной для пространства N_x . Евклидово действие $G_0(z)$, определенное в [26, формула (3.2)], в нашем случае имеет вид

$$G_0(z) := \langle z, A^{-1}x \rangle + I_0(z), \quad z \in N_x. \quad (2.15)$$

Покажем, что функция $G_0(z)$ достигает своего минимума на множестве R_x в единственной точке $z = 0$ и при этом $G_0(0) = 0$.

Из формул (2.6), (2.7), (2.11) следует, что для точки $z \in R_x$ выполнено неравенство $Q(z+x) \geq 0$, $\|z\| < \delta$. Используя разложение Тейлора гладкой функции $Q(z+x)$ в окрестности точки x (см. [2, п. 2.2.5]), получаем:

$$0 \leq Q(z+x) = Q(x) + \langle z, Q'(x) \rangle + O(\|z\|^2), \quad z \in R_x.$$

Отсюда, с учетом соотношений (2.3), (2.4) и того, что $\lambda > 0$, приходим к неравенству

$$\langle z, A^{-1}x \rangle \geq 0, \quad z \in R_x. \quad (2.16)$$

Поскольку $I_0(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$, то из (2.15), (2.16) следует сформулированное выше утверждение о единственности точке минимума функции $G_0(z)$. Применяя формулу (3.12) из [26], получаем соотношение (2.14) для фиксированного $x \in M$, так как, согласно (2.10), $I_M(x, 0) = 1$.

Утверждение о равномерности по $x \in M$ асимптотического соотношения (2.14) получается посредством аккуратного оценивания остаточных членов по схеме работ [47, ч. I, с. 460], [47, ч. II, с. 164], с учетом компактности множества M и условия типа Гёльдера из (B4). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку асимптотическое соотношение (2.14) выполнено равномерно по $x \in M$, то допустимо его почленное интегрирование, следовательно, из формул (2.12) и (2.14) получаем

$$P_A(u\mathcal{V}) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_M c(x) dV_M(x) (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Отсюда, в силу (2.8) вытекает искомая формула (1.7). Теорема 1 доказана.

Доказательство замечания 1 основано на координатной записи формулы (1.8), конечномерных аппроксимациях и достаточно элементарных преобразованиях возникающих конечномерных определителей. Это доказательство довольно длинное и потому здесь опущено.

Приведем один полезный результат, который нам понадобится ниже.

Лемма 6. Пусть x — фиксированная точка кривой M . Тогда ковариационный оператор A^{N_x} гауссовской меры P_{N_x} имеет вид

$$A^{N_x} z = Az - \frac{\langle An_x^*, z \rangle}{\langle An_x^*, n_x^* \rangle} An_x^*, \quad z \in N_x^*. \quad (2.17)$$

Доказательство леммы имеется в [32, лемма 6].

3. Большие отклонения распределений L^p -функционалов для централизованного броуновского моста. Доказательство теоремы 2. Пусть $L^p = L^p[0, 1]$, $p \geq 1$, — обычное банахово пространство функций $x(t)$ на $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\|_{L^p} := [G(x)]^{1/p} \equiv \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (3.1)$$

Для $0 < p < 1$ обозначим через L^p множество измеримых функций $x(t)$ на $[0, 1]$, для которых конечен интеграл $G(x) \equiv \int_0^1 |x(t)|^p dt$ (см. [17, §1, п. 1.1]). Используя неравенство Гёльдера [17, §1, п. 1.1], несложно получить включение: $L^{r_2} \subset L^{r_1}$, если $0 < r_1 < r_2 < \infty$.

При работе с L^p -функционалом (1.14) выбор подходящего банахова функционального пространства, на котором удобно рассматривать гауссовскую меру μ_ξ , следует проводить в зависимости от того, будут ли выполнены неравенства $p > 1/2$, или $0 < p \leq 1/2$.

Положим

$$\tilde{p} := \begin{cases} 2, & \text{если } p > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{p} + \varepsilon_0, & \text{если } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — любое фиксированное число. Пусть $\tilde{q} > 1$ обозначает число, сопряженное к $\tilde{p} > 1$, т.е. $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$.

Для числа $a > 1$ определим

$$L_0^a := \left\{ x \in L^a: \int_0^1 x(t) dt = 0 \right\} \quad (3.3)$$

— собственное подпространство пространства L^a , и пусть $C_0[0, 1] := \{x \in C[0, 1]: \int_0^1 x(t) dt = 0\}$.

Мы будем рассматривать гауссовскую меру μ_ξ , считая ее заданной в пространстве $L_0^{\tilde{p}}$, имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C_0[0, 1]$.

В этом случае мера μ_ξ имеет нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор $A = A_\mu: L_0^{\tilde{q}} \rightarrow L_0^{\tilde{p}}$ интегрального типа:

$$Ax(t) = \int_0^1 r(t, s)x(s) ds, \quad x \in L_0^{\tilde{q}}, \quad (3.4)$$

где $r(t, s)$ задана формулой (1.15).

Будем полагать, что функционал G из (1.14) определен на $L_0^{\tilde{p}}$, и возьмем в качестве множества D множество

$$D = \{x \in L_0^{\tilde{p}}: G(x) \geq 1\}. \quad (3.5)$$

Пусть $C_0^2 \equiv C_0^2[0, 1]$ — множество функций из $C_0[0, 1]$, дважды дифференцируемых всюду на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 7. Область значений ковариационного оператора A_μ , определенного формулой (3.4), имеет вид

$$R(A_\mu) = \{x \in C_0^2: x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\}, \quad (3.6)$$

для $y \in R(A_\mu)$ обратный оператор задается формулой

$$[A_\mu^{-1}y](t) = -y''(t) \quad \text{для всех } t \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Доказательство. Утверждения леммы получаются в результате двукратного дифференцирования по t равенства

$$y(t) = Ax(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(t-s)^2 - |t-s| + \frac{1}{6} \right] x(s) ds, \quad x \in L_0^{\tilde{q}}.$$

Отметим, что формулы (3.6), (3.7) фактически доказаны также в [57, с. 5]. Укажем, что условия типа равенств в формуле (3.6) представляют собой периодические граничные условия.

Решение экстремальной задачи. Для $0 < p \leq 6$ определим числа

$$C_0 := 1 + \frac{p}{2}, \quad \lambda_0 := \frac{1}{p\sigma^2(p)} = \frac{8\pi}{p^2} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{2/p-1} \left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p + 1/2)} \right]^2, \quad (3.8)$$

здесь величина $\sigma^2(p)$ задана формулой (1.17).

Пусть $F(\cdot, \cdot; \cdot; z)$ обозначает гипергеометрическую функцию (см. [1, гл. 15], [3, гл. 2]). Зададим функцию $x_0(t)$ на отрезке $[0, 1]$ следующим образом.

На отрезке $[0, 1/4]$ функция $x_0(t)$ определяется как единственное положительное решение уравнения

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C_0}\right) = \sqrt{2\lambda_0 C_0} t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \quad (3.9)$$

Уравнение типа (3.9) ранее было получено и исследовано в [34, п. 3], [32, п. 4.1]. Известно, что $x_0(0) = 0$, функция $x_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, строго возрастает на отрезке $[0, 1/4]$, достигает своего максимума в точке $t = 1/4$, $x_0(1/4) = C_0^{1/p}$ и при этом $x'_0(1/4) = 0$.

На отрезке $[1/4, 1]$ функция $x_0(t)$ определяется равенствами

$$x_0(t) = x_0\left(\frac{1}{2} - t\right), \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad (3.10)$$

$$x_0(t) = -x_0(1 - t), \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (3.11)$$

График функции $x_0(t)$ на отрезке $[0, 1]$ (похожий на график функции $\sin(2\pi t)$, ср. с предложением 3 ниже) имеет центр симметрии в точке $t = 1/2$, а на отрезке $[0, 1/2]$ он имеет ось симметрии в точке $t = 1/4$. Из определения (3.9)—(3.11) следует, что

$$\int_0^1 x_0(t) dt = 0, \quad x_0(0) = x_0\left(\frac{1}{2}\right) = x_0(1) = 0, \quad x'_0(0) = x'_0(1). \quad (3.12)$$

Таким образом, согласно формулам (3.6) и (3.12), функции x_0 принадлежит $R(A_\mu)$. Отметим, что $|x_0(t)| \leq C_0^{1/p}$, $t \in [0, 1]$. Учитывая соотношения (3.12), продолжим периодически функцию $x_0(t)$ на всю ось $\mathbf{R}$, полученную периодическую функцию с периодом 1 обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Для числа $0 \leq \gamma \leq 1$ определим функцию

$$\hat{x}_\gamma(t) := \hat{x}_0(t - \gamma), \quad t \in \mathbf{R},$$

— сдвиг функции $\hat{x}_0(t)$ на γ вправо, и положим

$$x_\gamma(t) := \hat{x}_\gamma(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

Очевидно, что $x_\gamma \in R(A_\mu)$. Введем множество

$$M_0 := \{x_\gamma: 0 \leq \gamma \leq 1\} \subset R(A_\mu) \quad (3.14)$$

(ср. с (2.9)). Отметим, что в (3.14) элементы x_0 и x_1 отождествлены, так что многообразие M_0 является замкнутой компактной кривой.

Лемма 8. (i) При $t \rightarrow 0$ выполнено соотношение

$$x_0(t) = \sqrt{2\lambda_0 C_0} t(1 + o(1)). \quad (3.15)$$

При любом $\gamma \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\int_0^1 p|x_\gamma(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_\gamma(t) dt = 0. \quad (3.16)$$

Доказательство. Из определения гипергеометрической функции следует соотношение $F(1/2, 1/p; 1 + 1/p; 0) = 1$ (см. формулу 15.1.1 в [1, гл. 15]). Отсюда и из формулы (3.9), с учетом равенства $x_0(0) = 0$, получаем соотношение (3.15).

Поскольку $p > 0$, то в силу (3.15) функция $|x_0(t)|^{p-1}$ принадлежит L^1 . При $\gamma = 0$ равенство (3.16) получаем вследствие указанной выше симметрии функции $x_0(t)$. Для общего $0 < \gamma < 1$ равенство (3.16) следует из свойства периодичности, использованного в определении функции x_γ . Лемма 8 доказана.

Напомним, что множество D определено формулой (3.5).

Лемма 9. При $0 < p \leq 6$ минимум в экстремальной задаче

$$\langle x, A_\mu^{-1}x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D, \quad (3.17)$$

равен $\sigma^{-2}(p)$ и достигается на одномерном дважды дифференцируемом компактном многообразии M_0 , лежащем на границе ∂D .

З а м е ч а н и е 4. (i) Из результатов примера 1 статьи [55] и теоремы 1 работы [23] вытекает, что семейство экстремалей, доставляющих минимум в задаче (3.17) при $0 < p \leq 6$, отличается от семейства экстремалей, доставляющих минимум в этой задаче при $p > 6$. В частности, доказано, что при $0 < p \leq 6$ среди экстремалей, доставляющих минимум в задаче (3.17), присутствует центрально-симметричная функция, в наших обозначениях, это функция $x_0(t)$.

(ii) В случае оператора (3.7), как правило, для широкого класса множеств D , $0 \notin D$, минимум в экстремальной задаче типа (3.17) достигается на функциях, меняющих знак минимально возможное число раз. Это обстоятельство объясняется осцилляционной теоремой типа Штурма (см. [14, ч. 2, п. 9.2], [16, гл. 8]). В [32, п. 4.1], [34, §3] экстремальными были *знакопостоянные* функции. Учитывая, что теперь мы

рассматриваем пространство функций $x(t)$, для которых $\int_0^1 x(t) dt = 0$, несложно убедиться, что среди функций, доставляющих минимум в экстремальной задаче (3.17), должна быть функция, *имеющая ровно два нуля на интервале $[0, 1]$* (ср. с теоремой 3.1 из [16, гл. 8]). Принимая во внимание это обстоятельство, а также упомянутые результаты из [23], [55], ниже мы особое внимание уделяем поиску и описанию минимизирующей центрально-симметричной функции с одной переменной знака.

Несложно видеть, что утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1 и леммы 9, формула (1.16) получается из соотношения (1.7).

Мы проведем доказательство леммы 9 в более сложном случае, когда $0 < p \leq 1/2$. Более простой случай $p > 1/2$ связан с гильбертовым пространством и исследуется аналогично. В частности, отметим, что, в силу (3.15), выполнено важное включение

$$G'(x_0)(t) \equiv p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_0(t) \in L_0^2, \quad p > \frac{1}{2}$$

(ср. с формулой (3.22) ниже).

Далее до конца этого раздела мы полагаем, что $0 < p \leq 1/2$. Таким образом, согласно (3.2), $\tilde{p} = 1/p + \varepsilon_0 > \max(2, 1/p)$.

Для нас важно последнее неравенство. Легко проверить, что сопряженное число $\tilde{q}$ удовлетворяет неравенству $1 < \tilde{q} < \min(2, 1/(1-p))$. Определим следующий класс функций:

$$\mathcal{X} := \left\{ x \in C_0[0, 1]: \frac{1}{x(t)} \in L_0^{\tilde{q}(1-p)} \right\}. \quad (3.18)$$

Пусть также

$$\mathcal{N}(x) := \{t \in [0, 1]: x(t) = 0\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Отметим, что множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C_0[0, 1]$, а следовательно, и в $L_0^{\tilde{p}}$. Очевидно также, что функция $y(t)$, для которой $\operatorname{mes} \mathcal{N}(y) > 0$, не принадлежит классу $\mathcal{X}$, здесь mes — мера Лебега. В частности, $0 \notin \mathcal{X}$.

Предложение 1. *Функционал G дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x_0 \in \mathcal{X}$ с производными*

$$G'(x_0)[h] = \int_0^1 p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_0(t) h(t) dt, \quad h \in L_0^{\tilde{p}}, \quad (3.19)$$

$$G''(x_0)[h, g](t) = \int_0^1 p(p-1)|x_0(t)|^{p-2} h(t) g(t) dt, \quad h, g \in L_0^{\tilde{p}}. \quad (3.20)$$

Доказательство. Утверждение предложения получаем на основе общих теорем о дифференцируемости интегральных функционалов в пространствах Лебега L^a (см. [17, §20]).

Как известно, каноническая билинейная форма между пространствами $L_0^{\tilde{p}}$ и $L_0^{\tilde{q}}$ имеет интегральный вид:

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t)g(t) dt, \quad h \in L_0^{\tilde{p}}, \quad g \in L_0^{\tilde{q}}. \quad (3.21)$$

З а м е ч а н и е 5. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}$. Тогда, в силу соотношений (3.19), (3.20), мы вправе использовать далее следующую форму записи: $G'(x_0)[h] = \langle h, G'(x_0) \rangle$, где справа стоит

$$G'(x_0)(t) = p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_0(t) \quad (3.22)$$

— элемент пространства $L_0^{\tilde{q}}$ (см. (3.18)), и

$$G''(x_0)[h, g](t) = \langle h, G''(x_0)g \rangle, \quad h, g \in L_0^{\tilde{p}}, \quad (3.23)$$

справа в (3.23) стоит линейный оператор умножения $G''(x_0): L_0^{\tilde{p}} \rightarrow L_0^{\tilde{q}}$, действующий по правилу

$$[G''(x_0)g](t) = p(p-1)|x_0(t)|^{p-2}g(t), \quad g \in L_0^{\tilde{p}}. \quad (3.24)$$

Лемма 10. Для каждого $\gamma \in [0, 1]$ функция x_γ принадлежит $\mathcal{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $x_0 \in \mathcal{X}$ вытекает из определения функции x_0 , формул (3.15), (3.18) и неравенства $\tilde{q}(1-p) < 1$. Отсюда, учитывая определение (3.13) функции x_γ , получаем утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 9. Нахождение функций $x(t) \in \partial D$, минимизирующих квадратическую форму $\langle x, A_\mu^{-1}x \rangle$, проводится на основе равенств (2.3) и (2.4) леммы 1 и замечания 4.

Используя эту лемму и формулы (3.4), (3.22), убеждаемся, что уравнение для минимизирующей центрально-симметричной функции $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \frac{p}{2} \lambda \int_0^1 \left[(t-s)^2 - |t-s| + \frac{1}{6} \right] |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad (3.25)$$

где $\lambda > 0$, при этом должно быть выполнено условие связи

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt = 1. \quad (3.26)$$

Поскольку $x \in \operatorname{Dom}(A_\mu^{-1})$, то, с учетом (3.7), минимизирующая центрально-симметричная функция дважды дифференцируема всюду на $[0, 1]$ и нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна (3.25) сводится к следующей граничной задаче с периодическими граничными условиями:

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \\ \int_0^1 x(t) dt = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

при этом должно быть выполнено условие нормировки (3.26).

Исследуя граничную задачу (3.27) вместе с условием (3.26) методом работы [32, п. 4.1], убеждаемся, что эта задача имеет в качестве решения однопараметрическое семейство функций. Докажем, что это семейство функций и есть многообразие (3.14).

Покажем, как возникает в качестве экстремальной функция $x_0(t)$, определенная в (3.9)—(3.11).

Решим частный случай задачи (3.27), а именно следующую задачу:

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(0) = x(1) = 0, & x'(0) = x'(1), \\ \int_0^1 x(t) dt = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Задача типа (3.28) была решена в [32, п. 4.1], мы применим тот же метод. Записывая первое уравнение из (3.28) в виде $d(x'(t))^2 = -2\lambda d|x(t)|^p$, получаем

$$(x'(t))^2 = 2\lambda(C - |x(t)|^p), \quad (3.29)$$

где $C \in \mathbf{R}$ — постоянная. Пусть для определенности $x'(0) = x'(1) > 0$, т.е. искомая функция $x(t)$ возрастает в окрестности нуля. Учитывая замечание 4, будем искать функцию $x(t)$ с одной переменной знака.

Так как $x(0) = x(1) = 0$, то из (3.29) и последнего условия в (3.28) следует, что найдутся точки $0 < t_0 < t_1 < t_2 < 1$ такие, что $x'(t_0) = x'(t_2) = 0$, $x(t_1) = 0$, $x(t_0) > 0 > x(t_2)$, причем точка t_0 является единственной точкой максимума функции $x(t)$, точка t_2 — единственной точкой минимума функции $x(t)$, точка t_1 — единственным нулем этой функции внутри интервала $(0, 1)$.

Рассмотрим решение уравнения (3.29) на отрезке $[0, t_1]$, где функция $x(t)$ является неотрицательной. Извлекая квадратный корень, из уравнения (3.29) получаем, что

$$x'(t) = \begin{cases} \sqrt{2\lambda}(C - x^p(t))^{1/2}, & \text{если } t \in [0, t_0], \\ -\sqrt{2\lambda}(C - x^p(t))^{1/2}, & \text{если } t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (3.30)$$

Из (3.30) видно, что экстремальная функция $x(t)$ положительна внутри интервала $(0, t_1)$, строго монотонно возрастает на отрезке $[0, t_0]$, строго монотонно убывает на отрезке $[t_0, t_1]$, причем

$$C = x^p(t_0) = \frac{(x'(0))^2}{4\lambda}. \quad (3.31)$$

Решим граничную задачу на отрезке $[0, t_0]$:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, & t \in [0, t_0] \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Из (3.32) получаем для $t \in [0, t_0]$:

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{C - x^p}} = \sqrt{2\lambda}t.$$

Отсюда, используя определение неполной бета-функции и ее связь с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, см. [3, п. 2.5.3] (или формулу 3 из п. 1.2.4 главы 1 книги [28]), приходим к следующему функциональному уравнению для экстремальной функции $x(t)$ на отрезке $[0, t_0]$:

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}t, \quad t \in [0, t_0]. \quad (3.33)$$

Рассмотрим теперь граничную задачу на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{2\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Из (3.34) получаем для $t \in [t_0, t_1]$:

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{C - x^p}} = \sqrt{2\lambda}(t_1 - t).$$

Отсюда, действуя аналогично предыдущему, получаем функциональное уравнение для экстремальной функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}(t_1 - t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.35)$$

Положив в уравнениях (3.33) и (3.35) $t = t_0$, находим $t_1 = 2t_0$.

Таким образом, из формул (3.33) и (3.35) следует, что решение $\tilde{x}_0(t)$ уравнения (3.29) на отрезке $[0, t_0]$ удовлетворяет уравнению (3.33), а на отрезке $[0, 2t_0]$ симметрично относительно точки $t = t_0$: $\tilde{x}_0(t) = \tilde{x}_0(2t_0 - t)$ для $t \in [0, 2t_0]$.

Совершенно аналогично решается уравнение (3.29) на отрезке $[2t_0, 1]$, где функция $x(t)$ является неположительной. Здесь также можно доказать, что точка t_2 находится посередине отрезка $[2t_0, 1]$, т.е. $t_2 = t_0 + 1/2$. При этом решение $\tilde{x}_0(t)$ уравнения (3.29) на отрезке $[t_2, 1]$ удовлетворяет уравнению

$$|x(t)|F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{|x(t)|^p}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}(1 - t), \quad t \in [t_2, 1],$$

с той же самой постоянной C , заданной в (3.31), а на отрезке $[2t_0, 1]$ решение $\tilde{x}_0(t)$ симметрично относительно точки $t = t_2$.

Вывод. Таким образом, из соображений симметрии и непрерывности получаем $t_0 = 1/4$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 3/4$. Следовательно, единственным решением задачи (3.28), которое возрастает в окрестности нуля и имеет одну переменную знака, является экстремальная функция $\tilde{x}_0(t)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{cases} x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}t, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ x(t) = x\left(\frac{1}{2} - t\right), & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ x_0(t) = -x_0(1 - t), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.36)$$

Единственным решением задачи (3.28), которое убывает в окрестности нуля и имеет также одну переменную знака, является, очевидно, функция $-\tilde{x}_0(t)$, $t \in [0, 1]$.

Используя условие нормировки (3.26), докажем, что в формуле (3.36) значения постоянных C и λ определяются по формуле (3.8), т.е. что $C = C_0$, $\lambda = \lambda_0$.

Умножая почленно первое уравнение в (3.28) на $x(t)$ и интегрируя полученное равенство по t от 0 до 1, находим с учетом (3.26)

$$\langle \tilde{x}_0, A_\mu^{-1} \tilde{x}_0 \rangle = - \int_0^1 \tilde{x}_0(t) \tilde{x}_0''(t) dt = \lambda p. \quad (3.37)$$

Интегрируя по частям и используя симметрию функции $\tilde{x}_0(t)$ и равенства $\tilde{x}_0(0) = \tilde{x}_0(1) = 0$, из формулы (3.37) получаем

$$\int_0^{1/4} (\tilde{x}_0'(t))^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^1 (\tilde{x}_0'(t))^2 dt = -\frac{1}{4} \int_0^1 \tilde{x}_0(t) \tilde{x}_0''(t) dt = \lambda \frac{p}{4}. \quad (3.38)$$

С учетом симметрии функции $\tilde{x}_0(t)$, условие (3.26) принимает вид

$$\int_0^{1/4} \tilde{x}_0^p(t) dt = \frac{1}{4}. \quad (3.39)$$

Интегрируя почленно первое уравнение в (3.30) по t от 0 до $t_0 = 1/4$ и используя (3.38) и (3.39), получаем равенства

$$C = 4 \int_0^{1/4} \tilde{x}_0^p(t) dt + \frac{2}{\lambda} \int_0^{1/4} (\tilde{x}_0'(t))^2 dt = 1 + \frac{p}{2}. \quad (3.40)$$

Таким образом, равенство $C = C_0$ доказано.

Положив в первом уравнении в (3.36) $t = 1/4$ и учитывая, что $\tilde{x}_0(1/4) = C^{1/p}$ (см. (3.31)), имеем:

$$C^{1/p-1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; 1\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}. \quad (3.41)$$

Используя формулу 15.1.20 из справочника [1, гл. 15], находим

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; 1\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)}. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.40) и (3.42) в (3.41), получаем $\lambda = \lambda_0$.

Итак, мы доказали, что экстремальная функция $\tilde{x}_0(t)$ тождественно равна функции $x_0(t)$, определенной в (3.9)–(3.11).

Из равенства (3.37) с $\lambda = \lambda_0$ и формулы (1.17) следует соотношение $\langle x_0, A_\mu^{-1} x_0 \rangle = \sigma^{-2}(p)$. Таким образом, минимум в экстремальной задаче (3.17) достигается на функции $x_0(t)$ и равен $\sigma^{-2}(p)$.

Несложно показать, что, в силу симметрии, для остальных функций $x_\gamma \in M_0$ выполнены равенства $\langle x_\gamma, A_\mu^{-1} x_\gamma \rangle = \sigma^{-2}(p)$, $\int_0^1 |x_\gamma(t)|^p dt = 1$, $0 < \gamma < 1$.

Также можно доказать, что минимум в экстремальной задаче (3.17) достигается только на функциях из M_0 . В частности, укажем, что функция $x_\gamma \in M_0$, $0 < \gamma < 1$, является решением граничной задачи (3.27) с $\lambda = \lambda_0$ и дополнительным условием $x(0) = x(1) = h_\gamma \neq 0$, где $|h_\gamma| \leq (1 + p/2)^{1/p}$. Лемма 9 доказана.

Применение теоремы 1 и леммы 9 дает нам утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Предложение 2. (i) *Справедливо равенство для норм экстремальных функций, заданных в (3.13):*

$$\|x_\gamma\|_{L^2} = \|x_0\|_{L^2} \quad \text{для любого } \gamma \in [0, 1]. \quad (3.43)$$

(ii) *Многообразие M_0 , заданное в (3.14) и рассматриваемое в гильбертовом пространстве L_0^2 , представляет собой плоскую кривую — окружность радиуса $\|x_0\|_{L^2}$, центр которой совпадает с нулем пространства L_0^2 . Длина кривой M_0 выражается формулой*

$$\text{mes}(M_0) = 2\pi \|x_0\|_{L^2}. \quad (3.44)$$

(iii) *Справедливо равенство для норм производных функций:*

$$\|x'_\gamma\|_{L^2} = \|x'_0\|_{L^2} \quad \text{для любого } \gamma \in [0, 1]. \quad (3.45)$$

Доказательство. Согласно формуле (3.13), каждая экстремальная функция $x_\gamma \in M_0$ определяется посредством сдвига периодической функции $\hat{x}_0(t)$ на число $\gamma \in [0, 1]$. Поскольку $\hat{x}_0(t)$ имеет период 1, то отсюда следует равенство (3.43) для норм в L_0^2 . Утверждение (i) предложения 2 доказано.

Докажем второе утверждение. Используя определения (3.10), (3.11), (3.13), несложно убедиться, что для всех $\gamma \in [0, 1/2]$ выполнено равенство

$$x_\gamma(t) = -x_{\gamma+1/2}(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.46)$$

Из формул (3.43), (3.46) вытекают равенства

$$\|x_\gamma - x_{\gamma+1/2}\|_{L^2} = 2\|x_\gamma\|_{L^2} = \|x_0\|_{L^2} \quad \text{для всех } \gamma \in [0, 1/2]. \quad (3.47)$$

Учитывая формулу (3.47), заключаем, что для любого $\gamma \in [0, 1/2]$ точки x_γ , $\mathbf{0}$, и $x_{\gamma+1/2}$ лежат на одной прямой, причем x_γ и $x_{\gamma+1/2}$ лежат на одинаковом расстоянии от $\mathbf{0}$ по разные стороны от $\mathbf{0}$. Таким образом, в силу (3.43), (3.47), замкнутая компактная кривая M_0 представляет собой центрально-симметричное множество, расположенное на сфере радиуса $\|x_0\|_{L^2}$ в гильбертовом пространстве L_0^2 .

Используя это свойство M_0 и учитывая тот факт, что многообразие M_0 построено в результате сдвигов на числа $\gamma \in [0, 1]$ одной и той же периодической функции $\hat{x}_0(t)$, можно показать, что M_0 является плоской кривой, а именно, окружностью радиуса $\|x_0\|_{L^2}$, центр которой совпадает с $\mathbf{0}$. Отсюда непосредственно вытекает формула (3.44). Утверждение (ii) доказано.

Докажем утверждение (iii). Производная непрерывно дифференцируемой периодической функции $\hat{x}_0(t)$ с периодом 1 является периодической непрерывной функцией $\hat{x}_0'(t)$ с периодом 1. Отсюда и из (3.13) следует формула (3.45). Предложение 2 доказано.

4. Случай $p = 1$ и $p = 2$. Доказательство следствия 1.

4.1. Доказательство формулы (1.18). На протяжении данного пункта $p = 1$. Таким образом, согласно разделу 3, основным банаховым пространством, на котором рассматривается гауссовская мера μ_ξ , является гильбертово пространство $(L_0^2, \|\cdot\|_{L^2})$, см. (3.1)–(3.3); в качестве сопряженного пространства берется также пространство $L_0^2, \langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в L_0^2 , см. (3.21).

Предложение 3. Экстремаль x_0 состоит из двух параболических кривых и задается формулой

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 12t - 24t^2, & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ x_0(t) &= -x_0(1-t), & \text{если } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

при этом

$$\lambda_0 = \sigma^{-2}(1) = 48, \quad C_0 = \frac{3}{2}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Формулы (4.2) следуют непосредственно из соотношений (1.17) и (3.8). Докажем (4.1). Положив $a = 1/2$ в формуле 15.1.13 из [1, гл. 15], находим

$$F\left(\frac{1}{2}, 1; 2; z\right) = \frac{2}{1 + \sqrt{1-z}}, \quad |z| \leq 1. \quad (4.3)$$

Используя формулы (4.2), (4.3) и уравнение (3.9), записанное при $p = 1$, убеждаемся, что экстремальная функция x_0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$x(t) = 6t \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}x(t)} \right], \quad t \in \left[0, \frac{1}{4} \right]. \quad (4.4)$$

Решая уравнение (4.4), находим $x_0(t) = 24t(1/2 - t)$, $t \in [0, 1/4]$. Отсюда, с учетом определения (3.10), (3.11), получаем формулу (4.1). Предложение 3 доказано.

Пусть функции x_γ , $\gamma \in [0, 1]$, и многообразие M_0 , заданные в (3.13), (3.14), построены по функции (4.1). Вычислим значения $c(x_\gamma)$ функционала, определенного в (1.8)–(1.10).

Лемма 11. Для каждого $\gamma \in [0, 1]$ выполнено равенство

$$c(x_\gamma) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}. \quad (4.5)$$

Доказательство леммы 11 основано на нескольких вспомогательных утверждениях.

Ради краткости обозначим $n_\gamma := n_{x_\gamma}$, $n_\gamma^* := n_{x_\gamma}^*$, $B_\gamma := B_{x_\gamma}$, $N_\gamma := N_{x_\gamma}$, $M_\gamma := M_{x_\gamma}$ и т.д. Вычисления в гильбертовом пространстве L_0^2 проводить легче. Здесь можно отождествить $n_\gamma^* \equiv n_\gamma$ и положить

$$N_\gamma \equiv N_\gamma^* = \{y \in L_0^2: \langle y, n_\gamma \rangle = 0\} \quad (4.6)$$

(см. (1.6)). Напомним, что в теореме 1 $n_\gamma \in L_0^2$ — это единичный касательный вектор к кривой M_0 в точке x_γ . Таким образом, теперь, в силу (4.6), вектор n_γ ортогонален подпространству N_γ .

Лемма 12. Для каждого $\gamma \in [0, 1]$ справедливы следующие утверждения.

(i) $F''(x_\gamma) \equiv 0$ есть нулевой оператор; $B_\gamma \equiv \mathcal{I}$ есть единичный оператор и $\det B_\gamma = 1$.

(ii) Выполнены равенства

$$\langle An_\gamma, n_\gamma \rangle = \frac{1}{40}, \quad (4.7)$$

$$\langle A^{N_\gamma} A^{-1} x_\gamma, A^{-1} x_\gamma \rangle = \langle x_\gamma, A^{-1} x_\gamma \rangle = \sigma^{-2}(1) = 48. \quad (4.8)$$

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in [0, 1]$. Известно, что при $p = 1$ вторая производная по Фреше функционала (1.14) есть нулевой оператор, поэтому $G''(x_\gamma) \equiv 0$ (ср. с (3.24)). Отсюда, в силу (1.5), получаем, что $F''(x_\gamma) \equiv 0$ есть нулевой оператор. Используя формулу (1.9), заключаем, что $B_\gamma \equiv \mathcal{I}$ есть единичный оператор, детерминант которого равен 1 по определению. Утверждение (i) доказано.

Формулы (4.7), (4.8) докажем только для $\gamma = 0$, случай общего γ рассматривается аналогично с учетом предложения 2.

Согласно определению (см. [22, гл. 3, §3, п. 2]), касательный вектор к кривой (3.14) в точке x_0 имеет вид $\left. \frac{dx_\gamma}{d\gamma} \right|_{\gamma=0}$. Используя тот факт, что параметр γ в формулах (3.13), (3.14) является параметром сдвига, находим $\left. \frac{dx_\gamma}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = x'_0(t)$, $t \in [0, 1]$. Согласно формуле (4.1), получаем

$$\begin{aligned} x'_0(t) &= 12 - 48t, & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ x'_0(t) &= x'_0(1 - t), & \text{если } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Как видим, $x'_0(t) \in L_0^2$; учитывая (4.9), несложно подсчитать, что $\|x'_0(t)\|_{L^2} = \sqrt{48}$. Таким образом, единичный касательный вектор n_0 к кривой M_0 в точке x_0 имеет вид

$$n_0(t) = \frac{x'_0(t)}{\sqrt{48}}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Легко непосредственно проверить, что (как и должно быть в силу (4.6) при $\gamma = 0$) выполнено равенство

$$\langle x_0, n_0 \rangle = 0. \quad (4.11)$$

Используя соотношения (3.6), (3.7) и (4.10), находим

$$y_0(t) := An_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{48}} \int_0^t x_0(s) ds. \quad (4.12)$$

Учитывая формулы (4.10), (4.12) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \langle An_0, n_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{48}} \int_0^1 y_0(t) x'_0(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{48}} \int_0^1 x_0(t) y'_0(t) dt \\ &= \frac{1}{48} \int_0^1 x_0^2(t) dt = \frac{1}{40}, \end{aligned}$$

так как, в силу (4.1), $\int_0^1 x_0^2(t) dt = 6/5$. Равенство (4.7) доказано для $\gamma = 0$.

Согласно формулам (2.17) и (4.11), находим

$$A^{N_0} A^{-1} x_0 = x_0 - \frac{\langle n_0, x_0 \rangle}{\langle An_0, n_0 \rangle} An_0 = x_0.$$

Отсюда, с учетом леммы 9, получаем равенства (4.8) при $\gamma = 0$. Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 11. Из леммы 12 и соотношений (1.8)–(1.10) находим

$$c(x_\gamma) = [\langle An_\gamma, n_\gamma \rangle \langle x_\gamma, A^{-1}x_\gamma \rangle]^{-1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Формула (4.5) доказана.

Доказательство формулы (1.18). Используя теоремы 1, 2 и лемму 11, получаем соотношение (1.18), поскольку в силу предложения 2 и формулы $\|x_0\|_{L^2} = \sqrt{6}/\sqrt{5}$ выполнено равенство $\text{mes}(M_0) = 2\pi\sqrt{5}/\sqrt{6}$.

4.2. Доказательство формулы (1.19). На протяжении данного пункта $p = 2$. Здесь также гауссовская мера μ_ξ рассматривается на гильбертовом пространстве L_0^2 .

Предложение 4. Экстремаль x_0 задается формулой

$$x_0(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.13)$$

при этом

$$\lambda_0 = 2\pi^2, \quad \sigma^{-2}(2) = 4\pi^2, \quad C_0 = 2. \quad (4.14)$$

Доказательство. Формулы (4.14) следуют непосредственно из соотношений (1.17) и (3.8). Докажем (4.13). Согласно формуле 15.1.6 из [1, гл. 15], находим

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{\arcsin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad |z| \leq 1. \quad (4.15)$$

Используя формулы (4.14), (4.15) и уравнение (3.9), записанное при $p = 2$, убеждаемся, что экстремальная функция x_0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\arcsin\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \quad (4.16)$$

Из (4.16) находим $x_0(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi t)$, $t \in [0, 1/4]$. Отсюда, с учетом определения (3.10), (3.11), получаем формулу (4.14). Предложение 4 доказано.

Дальнейшие вычисления можно провести так же, как в случае $p = 1$, но ради краткости изложения мы используем следующий результат (см. [13] или теорему 3.8 при $r = 2$ в [26]).

Теорема 3. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots)$ — гауссовский элемент в координатном гильбертовом пространстве $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ со средним нуль и невырожденным ковариационным оператором $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$. Пусть ядерный оператор A имеет собственные значения

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 > \sigma_3^2 \geq \sigma_4^2 \geq \dots > 0.$$

Тогда минимум выражения $\langle x, A^{-1}x \rangle$ на множестве $\{x \in \ell^2: \|x\|_2 \geq 1\}$ равен σ_1^{-2} и достигается на одномерном многообразии $\{y \in \ell^2: y_1^2 + y_2^2 = 1, y_3 = y_4 = \dots = 0\}$. Справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\|X\|_2 > u\} = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right\} \prod_{j=3}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_j^2}{\sigma_1^2}\right)^{-1/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Учитывая формулы (3.6), (3.7) и результат пункта (г) из [14, ч. 3, гл. 2, № 2.9], убеждаемся, что все собственные значения ковариационного оператора $A_\mu: L_0^2 \rightarrow L_0^2$ двукратны и имеют вид

$$\sigma_{2n+1}^2 = \sigma_{2n+2}^2 = \frac{1}{4\pi^2(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Используя (4.18) и формулу 7 из [28, гл. 6, п. 6.2.1], находим

$$\prod_{j=3}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_j^2}{\sigma_1^2}\right) = \left[\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.17) и учитывая, что $\sigma_1^{-2} = 4\pi^2$, получаем формулу (1.19). Следствие 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1978, 429 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973, 294 с.
4. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших отклонений в топологических пространствах, I, II. Сибир. матем. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26.
5. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных операторов. М.: Наука, 1972, 416 с.
6. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобаян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 369 с.
7. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
8. Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986, 175 с.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1. М., Наука, 1971, 664 с.
10. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979, 176 с.
11. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965, 448 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: УРСС, 2004, 895 с.

13. Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 2, с. 219–222.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965, 703 с.
15. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 741 с.
16. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2007, 474 с.
17. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966, 499 с.
18. Крейн С. Г. (ред.). Функциональный анализ. М.: Наука, 1972, 544 с.
19. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982, 269 с.
20. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995, 246 с.
21. Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978, 79 с.
22. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980, 439 с.
23. Назаров А. И. О точной константе в обобщенном неравенстве Пуанкаре. — Проблемы математического анализа, 2002, в. 24, с. 155–179.
24. Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. М.: Наука, 1995, 238 с.
25. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 175 с.
26. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 6, с. 57–150.
27. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982, 536 с.
28. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
29. Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве. — Изв. НАН Армении, 1992, т. 27, № 5, с. 43–57.
30. Фаталов В. Р. Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей. — Изв. НАН Армении, 1992, т. 27, № 6, с. 59–81; 1993, т. 28, № 5, с. 32–55.
31. Фаталов В. Р. Большие уклонения для гауссовских процессов в гильбертовской норме. — Изв. РАН, 2003, т. 67, № 5, с. 207–224.
32. Фаталов В. Р. Точные асимптотики типа Лапласа для умеренных уклонений распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов, Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, № 4, с. 720–744; исправления: 2006, т. 51, № 3, с. 634–636.
33. Фаталов В. Р. Метод Лапласа для малых уклонений гауссовских процессов типа винеровского. — Матем. сб., 2005, т. 196, № 4, с. 135–160.
34. Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 682–689; исправления: 2006, т. 51, в. 3, с. 634–636.
35. Фаталов В. Р. Асимптотики больших уклонений винеровских полей в L^p -норме, нелинейные уравнения Хаммерштейна и гиперболические краевые задачи высокого порядка. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 710–726; исправления: 2006, т. 51, в. 3, с. 634–636.
36. Фаталов В. Р. Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова. — Теорет. и матем. физ., 2011, т. 168, № 2, с. 299–340.
37. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.
38. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям, М.: Мир, 1968, 382 с.
39. Azencott R. Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman. — Lecture Notes in Math., 1982, v. 921, p. 237–285.
40. Ben Arous G. Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener. — Stochastics, 1988, v. 25, № 3, p. 125–153.
41. Bolthausen E. Laplace approximations for sums of independent random vectors. I, II. — Probab. Theory Related Fields, 1986, v. 72, № 2, p. 305–318; 1987, v. 76, № 2, p. 167–206.

42. Bolthausen E., Deuschel J.-D., Tamura Y. Laplace approximations for large deviations of nonreversible Markov processes. The nondegenerate case. — *Ann. Probab.*, 1995, v. 23, № 1, p. 236–267.
43. Chevet S. Gaussian measures and large deviations. — *Lecture Notes in Math.*, 1983, v. 990, p. 30–46.
44. Darling D. A. On the supremum of a certain Gaussian process. — *Ann. Probab.*, 1983, v. 11, № 3, p. 803–806.
45. Davies I. M. Laplace asymptotic expansions for Gaussian functional integrals. — *Electron. J. Probab.*, 1998, v. 3, № 13, p. 1–19.
46. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I, II, III, IV. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1975, v. 28, p. 1–47; 1975, v. 28, p. 279–301; 1976, v. 29, p. 389–461; 1983, v. 36, p. 525–565.
47. Ellis R. S., Rosen J. S. Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I: Isolated minimum points. II: Manifold of minimum points. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, v. 273, № 2, p. 447–481; *Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 82, № 2, p. 153–181.
48. Fatalov V. R. The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics. — *Math. Methods Statist.*, 1999, v. 8, № 4, p. 510–535.
49. Henze N., Nikitin Ya. Yu. Watson-type goodness-of-fit tests based on the integrated empirical process. — *Math. Methods Statist.*, 2002, v. 11, № 2, p. 183–202.
50. Kuelbs J. Large deviation probabilities and dominating points for open convex sets: nonlogarithmic behavior. — *Ann. Probab.*, 2000, v. 28, № 3, p. 1259–1279.
51. Kusuoka S., Tamura Y. Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type. — *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, 1991, v. 38, № 3, p. 533–565.
52. Kusuoka S., Liang S. Laplace approximations for sums of independent random vectors. — *Probab. Theory Related Fields*, 2000, v. 116, № 2, p. 221–238.
53. Liang S. Laplace approximations for sums of independent random vectors: The degenerate case. — *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 2000, v. 7, № 2, p. 195–220.
54. Lifshits M. A. Gaussian large deviations of a smooth seminorm. — *Proceedings of the Sixth USSR–Japan Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics*, River Edge, World Scientific, 1992, p. 193–201.
55. Lifshits M. A., Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu. Tail behavior of anisotropic norms for Gaussian random fields. — *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2003, v. 336, № 1, p. 85–88.
56. Pietsch A. Eigenvalues and s -Numbers. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 360 p.
57. Podkorytova O. A. On tail asymptotics for L^1 -norm of centered Brownian bridge. — *Matematiche (Catania)*, 1998, v. 53, № 1, p. 3–9.
58. Rovira C., Tindel S. Sharp Laplace asymptotics for a parabolic SPDE. — *Stochastics Stochastics Rep.*, 2000, v. 69, № 1–2, 11–30.
59. Rovira C., Tindel S. Sharp Laplace asymptotics for a hyperbolic SPDE. — *Stochastic Analysis and Related Topics, VII (Kusadasi, 1998)*. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 225–244. (*Progr. Probab.*, v. 48.)
60. Simon B. *Functional Integration and Quantum Physics*. New York: Academic Press, 1979, 296 p.
61. Talagrand M. Small tails for the supremum of a Gaussian processes. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1988, v. 24, № 2, p. 307–315.
62. Watson G. S. Goodness-of-fit tests on a circle. — *Biometrika*, 1961, v. 48, № 1, p. 109–114.

Поступила в редакцию
18.XII.2012