Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Борисов, Преобразования простейших несимметричных случайных блужданий и некоторые приложения принципа инвариантности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 381–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:11:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2013 г.

БОРИСОВ И. С.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТЕЙШИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ
СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ¹⁾

Выводятся простые формулы для распределений максимума и числа пересечений прямолинейной полосы за конечный и бесконечный промежуток времени траекторией простейшего однородного случайного блуждания с произвольным двухточечным распределением скачка. С помощью принципа инвариантности для процесса частичных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в схеме серий отсюда выводится аналогичная формула для винеровского процесса со сносом. Тем самым мы уточняем и дополняем соответствующие результаты в [1]–[4].

Ключевые слова и фразы: простейшие случайные блуждания, винеровский процесс со сносом, распределение числа пересечений полосы, принцип инвариантности.

1. Метод отражения для простейших несимметричных случайных блужданий. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с двухточечным распределением $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = p$ и $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = q$. Обозначим

$$S_0 = 0, \quad S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \geq 1.$$

Мы изучаем распределение максимума случайного блуждания, а также числа пересечений полосы

$$r(M, N, n) := \{(x, y): -M \leq y \leq N, 0 \leq x \leq n\},$$

где M, N и n — произвольные натуральные числа, траекторией случайного блуждания $\{k, S_k\}_{k=0}^n$.

Пусть η_n обозначает число пересечений «сверху вниз» указанной полосы траекториями случайного блуждания до момента времени n включительно.

Различные представления для распределения случайной величины η_n были получены в [1]–[4]. В частности, в [1] была приведена формула для распределения η_n , позволяющая получить аналогичные представления для распределения числа пересечений рассматриваемой полосы траекториями броуновского процесса со сносом.

В настоящей заметке мы приводим элементарный вывод формул для распределений как η_n , так и для максимума траектории введенного случайного блуждания. Отметим, что приводимые ниже формулы представляют не только самостоятельный интерес, но и существенно упрощают по сравнению с [1] вывод формул для распределений аналогичных граничных функционалов для винеровского процесса со сносом.

* Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00285 и 13-01-00511).

Теорема. *Справедливы следующие представления:*

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq m\right) = \mathbf{P}(S_n > m) + \mathbf{P}(S_n \leq -m) \left(\frac{p}{q}\right)^m, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_n \geq m) &= \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq l_m\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{m(M+N)} \\ &= \mathbf{P}(S_n > l_m) \left(\frac{q}{p}\right)^{(l_m+M)/2} + \mathbf{P}(S_n \leq -l_m) \left(\frac{p}{q}\right)^{(l_m-M)/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m \geq 0$ и $l_m := 2m(M+N) - M$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если число $n+k$ — четное, то

$$\mathbf{P}(S_n = k) = C_n^{r^+} p^{r^+} q^{n-r^+}, \quad -n \leq k \leq n,$$

где $r^+ = (n+k)/2$, а для нечетного $n+k$ указанная вероятность равна нулю. Так что формулы (1) и (2) позволяют элементарно выписать точное выражение для интересующих нас вероятностей. В [3] приведен иной метод расчета распределения случайной величины η_n , основанный на технике так называемых факторизационных тождеств. При этом комбинаторная формула для распределения η_n в [3], на наш взгляд, более громоздкая и менее прозрачная, нежели полученная непосредственно из (2). Отметим также, что в [1] уже было доказано первое равенство в (2), но сам вывод был основан на прямом сравнении двух комбинаторных формул и был менее элементарным по сравнению с методом, предлагаемым в настоящей заметке.

Следствие 1. *Для симметричного случайного блуждания ($p = q = 1/2$) имеем*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq m\right) &= 2\mathbf{P}(S_n > m) + \mathbf{P}(S_n = m), \\ \mathbf{P}(\eta_n \geq m) &= 2\mathbf{P}(S_n > l_m) + \mathbf{P}(S_n = l_m), \end{aligned} \quad (3)$$

где l_m определено в теореме.

Если время блуждания бесконечно ($n = \infty$), то в силу свойства монотонности распределений получаем в качестве следствия теоремы следующие результаты, первый из которых хорошо известен (см., например, [5]).

Следствие 2. *Пусть для определенности $p \leq q$. Тогда*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{k \geq 1} S_k \geq m\right) &= \left(\frac{p}{q}\right)^m, \\ \mathbf{P}(\eta_\infty \geq m) &= \left(\frac{p}{q}\right)^{(l_m-M)/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где l_m определено в теореме.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq m\right) = \mathbf{P}(S_n > m) + \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq m; S_n \leq m\right).$$

Так что нам необходимо вычислить второе слагаемое правой части этого равенства. Без ограничения общности можем считать, что $m > 0$. Для любого элементарного исхода, входящего в событие $A_m := \{\max_{k \leq n} S_k \geq m\}$, положим

$$\tau := \min\{j: S_j = m\}.$$

На всех остальных исходах полагаем $\tau = \infty$. Далее определим преобразование исходного случайного блуждания

$$\tilde{S}_k = \begin{cases} 0 & \text{при всех } k \leq n, \text{ если } \tau = \infty, \\ -S_k, & \text{если } k \leq \tau < \infty, \\ S_k - 2m, & \text{если } \tau < k \leq n, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \dots, n$. Легко видеть, что

$$\left\{ \max_{k \leq n} S_k \geq m; S_n \leq m \right\} = \{\tilde{S}_n \leq -m\}.$$

Таким образом, наша задача свелась к вычислению вероятности события, стоящего в правой части этого равенства.

Отметим, что на всех элементарных исходах из A_m приведенное преобразование состоит из отражения относительно оси абсцисс траектории исходного случайного блуждания до момента первого пересечения уровня $y = m$, а также из параллельного переноса части траектории исходного блуждания после момента τ и «склеивания» ее с уже построенной частью новой траектории. Для симметричного случайного блуждания ($p = q = 1/2$) это преобразование сохраняет меру. Отметим также, что классический метод отражения для симметричных случайных блужданий несколько отличается от предложенного, а именно, в классическом методе отражается часть траектории после момента пересечения уровня $y = m$, которая к тому же в момент времени n не превышает этот уровень. Причем отражение этой части траектории осуществляется относительно указанного уровня, в то время как начальный отрезок траектории остается нетронутым (см., например, [5]). Отсюда также будет следовать первая формула следствия 1.

Зафиксируем элементарный исход $\omega_o \in A_m$. Другими словами, мы фиксируем траекторию $\{S_k(\omega_o); k \leq n\}$ рассматриваемого случайного блуждания. Пусть $\tau(\omega_o) = j$. Обозначим через $r_j^\pm$ соответственно число положительных и отрицательных случайных величин среди $\{\xi_k(\omega_o); k \leq j\}$. Ясно, что $r_j^+ - r_j^- = m$. Имеет место следующее представление:

$$P_j := \mathbf{P}(S_k = \tilde{S}_k(\omega_o) \forall k \leq n) = q^{r_j^+} p^{r_j^-} Q_j,$$

где Q_j — вероятность того, что случайный вектор $\{\xi_k; j < k \leq n\}$ совпадает с соответствующим вектором $\{\xi_k(\omega_o); j < k \leq n\}$, однозначно определяемым фиксированным элементарным исходом. Здесь мы учли, что в отраженной начальной части исходной траектории, которая как раз и образует начальный фрагмент преобразованной траектории, количество положительных и отрицательных скачков равно r_j^- и r_j^+ соответственно. Поскольку фрагменты траекторий исходного и преобразованного блужданий после марковского момента τ с точностью до параллельного переноса совпадают, то

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_k = \tilde{S}_k(\omega_o) \forall k \leq n) = p^{r_j^+} q^{r_j^-} Q_j = P_j \left(\frac{p}{q} \right)^{r_j^+ - r_j^-} = P_j \left(\frac{p}{q} \right)^m;$$

здесь было учтено, что в отраженной части траектории $\{\tilde{S}_k; k \leq \tau\}$ преобразованного случайного блуждания массы положительных и отрицательных скачков соответственно есть q и p , а не наоборот, как в исходном случайном блуждании. Отметим, что коэффициент пропорциональности между точечными массами распределений случайных процессов $\{\tilde{S}_k\}$ и $\{S_k\}$ не зависит от *конечных* значений марковского момента первого достижения уровня. Так что с помощью формулы полной вероятности можно легко получить аналогичное соотношение между вероятностями интересующих нас

событий:

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_n \leq -m) = \mathbf{P}(S_n \leq -m) \left(\frac{p}{q}\right)^m.$$

Далее мы переходим к доказательству формулы (2). Сначала вычислим вероятность $\mathbf{P}(\eta_n \geq 1)$. Обозначим

$$\tau^+ := \min\{j \leq n: S_j = N\}, \quad \tau^- := \min\{\tau^+ < j \leq n: S_j = -M\},$$

доопределяя введенные случайные величины бесконечными значениями, как и в предыдущих вычислениях, когда соответствующие множества индексов под знаком минимума будут пустыми.

Теперь на всех элементарных исходах из события $\{\eta_n \geq 1\}$ мы преобразуем случайное блуждание следующим образом:

$$\tilde{S}_k = \begin{cases} S_k, & \text{если } k \leq \tau^+, \\ 2N - S_k, & \text{если } \tau^+ < k \leq \tau^-, \\ 2N + 2M + S_k, & \text{если } \tau^- \leq k \leq n. \end{cases} \quad (5)$$

На остальных элементарных исходах полагаем $\tilde{S}_k \equiv 0$ при всех $k \leq n$. В этом построении мы отражаем средний фрагмент траектории между двумя марковскими моментами последовательного достижения уровней $y = M$ и $y = -N$ соответственно. При этом часть траектории после пересечения полосы склеивается с помощью параллельного переноса с отраженным фрагментом. После проведенного преобразования имеет место равенство

$$\{\eta_n \geq 1\} = \left\{ \max_{k \leq n} \tilde{S}_k \geq l_1 \right\},$$

где $l_1 := 2N + M$. Точно так же, как и до этого, выводим соотношение между массами исходной (из вышеупомянутого события) и преобразованной траекторий. В качестве следствия метода «частичного отражения с параллельным переносом» получаем формулу

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq 1) = \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq l_1\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{M+N}.$$

Если фрагмент исходной траектории после первого пересечения полосы содержит как минимум еще одно пересечение («сверху вниз»), то после параллельного переноса в (5) он преобразуется аналогично самой исходной траектории: средний фрагмент между двумя последовательными марковскими моментами пересечения верхнего и нижнего уровней отражается относительно верхнего уровня, а оставшийся фрагмент склеивается с отраженным с помощью параллельного переноса «вверх». При этом масса траектории после каждого отражения изменяется в одно и то же число раз, а именно в $(q/p)^{M+N}$ раз. Так что для элементарных исходов, составляющих событие $\{\eta_n \geq m\}$, применение описанного выше последовательного отражения m фрагментов между соседними марковскими моментами достижения верхнего и нижнего уровней приводит нас к формуле

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq m) = \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq l_m\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{m(M+N)},$$

где $l_m := 2m(M + N) - M$.

Таким образом, теорема доказана.

2. Распределение некоторых граничных функционалов от винеровского процесса со сносом. Пусть $w(t)$, $t \in [0, T]$, — стандартный винеровский процесс,

заданный на отрезке $[0, T]$. Рассмотрим так называемый винеровский процесс со сносом (линейным) $\tilde{w}(t) := w(t) + \beta t$, где $\beta \in \mathbf{R}$. В этом пункте в качестве возможных приложений результатов предыдущего пункта будет продемонстрирован элементарный вывод известных формул для распределений максимума $\tilde{w}(t)$, а также случайной величины $\eta(T)$ — числа пересечений полосы

$$\{(t, y): t \in [0, T], -a \leq y \leq b\},$$

где $-a < 0 < b$, «сверху вниз» (т.е. от «верхнего» уровня $y = b$ до «нижнего» уровня $y = -a$) траекторией $\tilde{w}(t)$. Более точно, мы приведем вывод следующих аналогов формул (1) и (2):

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, T]} \tilde{w}(t) > y\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{y}{\sqrt{T}} - \beta\sqrt{T}\right) + e^{2\beta y} \bar{\Phi}\left(\frac{y}{\sqrt{T}} + \beta\sqrt{T}\right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta(T) \geq k) &= \mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} \tilde{w}(t) \geq v_k\right) e^{-\beta(v_k + a)} \\ &= e^{-\beta(v_k + a)} \bar{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}} - \beta\sqrt{T}\right) + e^{\beta(v_k - a)} \bar{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}} + \beta\sqrt{T}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где k — произвольное натуральное число, $y \geq 0$, $v_k := 2k(a + b) - a$, $\bar{\Phi}(z) := (2\pi)^{-1/2} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt$ — хвост стандартного нормального распределения.

Отметим, что формула (6) содержится в [7] и представляет собой решение некоторого дифференциального уравнения. В настоящей работе мы применим принципиально иной подход, который изложен в [1]. Вкратце опишем его. Для вывода из (1) и (2) соответственно формул (6) и (7) воспользуемся принципом инвариантности для схемы серий случайных величин с двухточечным распределением

$$p := \frac{1 + \beta/\sqrt{n}}{2} \quad \text{и} \quad q := \frac{1 - \beta/\sqrt{n}}{2}; \quad (8)$$

при этом предполагается, что $n > \beta^2$, где β по-прежнему обозначает коэффициент сноса винеровского процесса $\tilde{w}(t)$. В [1] было установлено, что при $n \rightarrow \infty$ распределения случайных процессов

$$S_n^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq nt} \xi_i^{(n)} \quad (9)$$

C -сходятся в пространстве А. В. Скорохода $\mathbf{D}(0, T)$ (см. [6]) к распределению винеровского процесса $\tilde{w}(t)$. Это означает, что распределение любого измеримого функционала от процесса $S_n^{(n)}(\cdot)$, непрерывного в точках $\mathbf{C}(0, T)$ почти всюду относительно распределения $\tilde{w}(t)$, с ростом n слабо сходится к распределению этого функционала от винеровского процесса $\tilde{w}(t)$ со сносом. В частности, к таким относится функционал, равный числу пересечений «сверху вниз» полосы с параллельными прямолинейными границами за конечное время, а также классические экстремальные функционалы.

Итак, пусть $\eta_{[nT]}$ обозначает число пересечений «сверху вниз» полосы $r(M, N, [nT])$ траекторией случайного блуждания $\{k, S_k\}$ со скачками $\xi_i \equiv \xi_i^{(n)}$, имеющими распределение (8). Далее мы в точности повторяем рассуждения при доказательстве соответствующего утверждения в [1]. Принимая во внимание свойство непрерывности вероятностной меры в (6) и (7) относительно параметров y , a и b , нам достаточно ограничиться рациональными точками $y = r^0/r$, $a = r_1/r$ и $b = r_2/r$, где r^0, r_1, r_2 и r — натуральные.

Выберем теперь подпоследовательность натуральных чисел $n \equiv n_j := (rj)^2$, а также зададим целочисленные уровни введенной полосы как $M := arj \equiv a\sqrt{n}$ и $N :=$

$brj \equiv b\sqrt{n}$. Тогда, полагая в (1) $m := y\sqrt{n}$, получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} S_n^{(n)}(t) \geq y\right) = \mathbf{P}\left(S_n^{(n)}(1) > y\right) + \mathbf{P}\left(S_n^{(n)}(1) \leq y\right) \left(\frac{1 + \beta/\sqrt{n}}{1 - \beta/\sqrt{n}}\right)^{y\sqrt{n}}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}\left(\eta_{[nT]} \geq k\right) = \mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} S_n^{(n)}(t) \geq 2k(a+b) - a\right) \left(\frac{1 - \beta/\sqrt{n}}{1 + \beta/\sqrt{n}}\right)^{k(a+b)\sqrt{n}}. \quad (11)$$

В силу отмеченного выше принципа инвариантности нам остается только перейти к пределу в (10) и (11) при $n \rightarrow \infty$ (или, точнее, при $j \rightarrow \infty$).

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим задачу о числе пересечений полосы траекторией винеровского процесса $\tilde{w}(t)$, заданного на положительной полуоси (см. также [1]–[4]). Пусть $\eta(\infty)$ — число пересечений «сверху вниз» определенной выше полосы траекторией процесса $\tilde{w}(t)$ при $t \in [0, \infty)$. Принимая во внимание свойство непрерывности вероятностной меры относительно параметра T , получаем из (7) (объединяя два результата при различных знаках β), что

$$\mathbf{P}(\eta(\infty) > k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta(T) > k) = e^{-(a\beta + |\beta|v_k)}.$$

Отметим, что приведенную формулу можно получить и непосредственно из (4), но при этом надо рассматривать соответствующую функциональную предельную теорему в пространстве А. В. Скорохода $\mathbf{D}(0, \infty)$ с топологией, порожденной семейством равномерных полунорм на всех конечных отрезках.

З а м е ч а н и е 3. В [3] приведены формулы для распределения числа пересечений $\eta_0(T)$ полосы стандартным винеровским процессом за время T , откуда, в частности, следует, что

$$\mathbf{P}(\eta_0(T) \geq k) = 2 \int_{v_k}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(2T)}}{\sqrt{2\pi T}} dy = 2\bar{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}}\right),$$

что совпадает с (7) при $\beta = 0$ и согласуется с (3). При доказательстве в [3] применялся классический прием многократного отражения траектории стандартного винеровского процесса (случай $\beta = 0$) после марковских моментов первого достижения соответствующих «верхних» уровней (преобразование, сохраняющее меру, а именно распределение стандартного винеровского процесса), который в случае $\beta \neq 0$ перестает работать, поскольку зеркально отраженная относительно горизонтального уровня достижения траектория меняет направление сноса, т.е. искажается исходное распределение винеровского процесса со сносом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов И. С., Никитина Н. Н. Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 1, с. 152–158.
2. Борисов И. С. Замечание о распределении числа пересечений полосы случайным блужданием. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 345–349.
3. Лотов В. И., Орлова Н. Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. — Матем. сб., 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.
4. Androshchuk T. O. Distribution of the number of intersections of a segment by a random walk and the Brownian motion. — Theory Stoch. Process., 2001, v. 7, № 3–4, p. 3–7.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961, 406 с.
6. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980, 381 с.

7. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.

Поступила в редакцию
28.II.2012

© 2013 г.

ВАТУТИН В. А. *, ТОПЧИЙ В. А. **

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ИНДЕКС $\beta \in (0, 0.5]$ ¹⁾

В работе исследуется асимптотическое поведение приращений функций восстановления, порожденных распределениями, хвосты которых правильно меняются на $\pm\infty$ с показателем $\beta \in (0, 0.5]$.

Ключевые слова и фразы: приращения функции восстановления, бесконечное среднее, устойчивые распределения на прямой, нерешетчатое распределение, правильно меняющиеся функции.

1. Введение. Пусть $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — набор независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $G(t)$, и пусть $G^{*k}(t)$ обозначает k -кратную свертку G с собой. Если $\mathbf{P}(\xi_i > 0) = 1$, то соответствующая функция восстановления

$$U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t)$$

корректно определена, т.е. $U(t) < \infty$ для любого $t \in (-\infty, \infty)$. Если же $\mathbf{P}(\xi_i < 0) > 0$ и случайное блуждание $S_0 := 0$, $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ не стремится к бесконечности с вероятностью 1, то $U(t) = \infty$ для некоторого $t_0 < \infty$ и, следовательно, для всех $t \leq t_0$. В этом случае вместо $U(t)$ естественно для каждого фиксированного $\Delta > 0$ изучать величину

$$\partial U(t) = \partial^\Delta U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \partial G^{*k}(t),$$

где для произвольной функции $F(t)$ мы вводим оператор $\partial = \partial^\Delta$ при помощи равенства

$$\partial F(t) = \partial^\Delta F(t) := F(t + \Delta) - F(t).$$

Известно, что если S_n является невозвратным случайным блужданием, то $\partial U(t) < \infty$ для всех t и Δ . С другой стороны, если блуждание S_n возвратно и, скажем, нерешетчато, то $\partial U(t) = \infty$ при всех t и $\Delta > 0$ (см. [13, гл. VI, § 10]). Заметим, что критерий возвратности блуждания S_n для решетчатых распределений приведен в [17, гл. II, § 8]. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с невозвратными случайными блужданиями.

Имеется много результатов о поведении разностей $\partial U(t)$ для фиксированных значений $\Delta > 0$ и $t \rightarrow \pm\infty$ (см., например, [1], [2], [5], [13, гл. XI]). Случай $|\mathbf{E} \xi| \in (0, \infty)$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

** Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Новосибирск, Россия; e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00139 и программ РАН «Динамические системы и теория управления» (В. А. Ватутин) и «Развитие методов исследования стохастических моделей, ориентированных на популяционные и биомедицинские приложения» (В. А. Топчий).