Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Основная теорема восстановления для распределений с тяжелыми хвостами, имеющими индекс $\beta \in (0, 0.5]$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 387–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:04:20

7. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.

Поступила в редакцию
28.II.2012

© 2013 г.

ВАТУТИН В. А. *, ТОПЧИЙ В. А. **

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ИНДЕКС $\beta \in (0, 0.5]$ ¹⁾

В работе исследуется асимптотическое поведение приращений функций восстановления, порожденных распределениями, хвосты которых правильно меняются на $\pm\infty$ с показателем $\beta \in (0, 0.5]$.

Ключевые слова и фразы: приращения функции восстановления, бесконечное среднее, устойчивые распределения на прямой, нерешетчатое распределение, правильно меняющиеся функции.

1. Введение. Пусть $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — набор независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $G(t)$, и пусть $G^{*k}(t)$ обозначает k -кратную свертку G с собой. Если $\mathbf{P}(\xi_i > 0) = 1$, то соответствующая функция восстановления

$$U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t)$$

корректно определена, т.е. $U(t) < \infty$ для любого $t \in (-\infty, \infty)$. Если же $\mathbf{P}(\xi_i < 0) > 0$ и случайное блуждание $S_0 := 0$, $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ не стремится к бесконечности с вероятностью 1, то $U(t) = \infty$ для некоторого $t_0 < \infty$ и, следовательно, для всех $t \leq t_0$. В этом случае вместо $U(t)$ естественно для каждого фиксированного $\Delta > 0$ изучать величину

$$\partial U(t) = \partial^\Delta U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \partial G^{*k}(t),$$

где для произвольной функции $F(t)$ мы вводим оператор $\partial = \partial^\Delta$ при помощи равенства

$$\partial F(t) = \partial^\Delta F(t) := F(t + \Delta) - F(t).$$

Известно, что если S_n является невозвратным случайным блужданием, то $\partial U(t) < \infty$ для всех t и Δ . С другой стороны, если блуждание S_n возвратно и, скажем, нерешетчато, то $\partial U(t) = \infty$ при всех t и $\Delta > 0$ (см. [13, гл. VI, § 10]). Заметим, что критерий возвратности блуждания S_n для решетчатых распределений приведен в [17, гл. II, § 8]. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с невозвратными случайными блужданиями.

Имеется много результатов о поведении разностей $\partial U(t)$ для фиксированных значений $\Delta > 0$ и $t \rightarrow \pm\infty$ (см., например, [1], [2], [5], [13, гл. XI]). Случай $|\mathbf{E} \xi| \in (0, \infty)$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

** Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Новосибирск, Россия; e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00139 и программ РАН «Динамические системы и теория управления» (В. А. Ватутин) и «Развитие методов исследования стохастических моделей, ориентированных на популяционные и биомедицинские приложения» (В. А. Топчий).

хорошо исследован как для решетчатых, так и для нерешетчатых распределений и носит имя «Основная теорема восстановления». Например, если $\mathbf{E} \xi > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \partial U(t) = \frac{\Delta}{\mathbf{E} \xi}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \partial U(t) = 0$$

для нерешетчатых распределений [13, гл. XI, § 9]. Ситуация становится более сложной, если математическое ожидание случайной величины ξ равно бесконечности или не существует. Наиболее содержательные утверждения в этом случае установлены в предположении, что функция распределения $G(t)$ имеет вид (см. [1])

$$G(0) = 0, \quad 1 - G(t) = l(t)t^{-\beta}, \quad (1)$$

где функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности, а $\beta \in (0, 1]$, или, более общо, в предположении, что (см. [2]) при $t \geq 0$

$$G(-t) + 1 - G(t) = l(t)t^{-\beta} \quad (2)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(-t)}{1 - G(t)} = \frac{q}{p}, \quad (3)$$

где $p + q = 1$ и, как и прежде, функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности, а $\beta \in (0, 1]$.

Для дальнейших ссылок мы сформулируем необходимые результаты из работ [1] и [2] в виде следующего утверждения, близкого по виду к теореме 8.6.6 на с. 365 монографии [3].

Положим $m(t) := \int_0^t (G(-u) + 1 - G(u)) du$ при $t > 0$ и введем символ $\lim_{t \rightarrow \infty}^*$ для обозначения предела $\lim_{t \rightarrow \infty, t \notin E}$ по параметру t , избегающему некоторое множество E нулевой относительной меры, т.е. избегающему измеримое множество E такое, что $\lim_{x \rightarrow \infty} |E \cap [0, x]|/x = 0$. Введем величину $C_\beta := (\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta))^{-1}$. Заметим, что $C_\beta = (\sin \pi \beta)/(\pi(1-\beta))$, если $\beta \in (0, 1)$.

Теорема 1 (см. [3]). Пусть $G(t)$ — нерешетчатое распределение такое, что $m(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если выполнены условия (2) и (3), то при $\beta \in (0.5, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) \partial U(t) = \Delta \frac{pC_\beta}{p^2 + 2pq \cos(\pi\beta) + q^2}, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} m(t) \partial U(t) = \Delta \frac{qC_\beta}{p^2 + 2pq \cos(\pi\beta) + q^2}. \quad (5)$$

Кроме того, если $G(t)$ — нерешетчатое распределение, удовлетворяющее условию (1), то при $\beta \in (0, 0.5]$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} l(t)t^{1-\beta} \partial U(t) = \Delta \frac{\sin \pi \beta}{\pi},$$

причем для любого $\beta \in (0, 1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty}^* m(t) \partial U(t) = \frac{\Delta}{1-\beta} \frac{\sin \pi \beta}{\pi}.$$

З а м е ч а н и е. Ясно, что условия (2) и (3) в сочетании с классическими результатами из монографии В. Феллера [13, гл. VIII, § 9] влекут

$$m(t) \sim \frac{1}{1-\beta} l(t)t^{1-\beta}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (6)$$

для $\beta \in (0, 1)$ и

$$m(t) \sim l_1(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad (7)$$

для $\beta = 1$, где функция $l_1(t)$ медленно меняется на бесконечности, причем так, что $l(t) = o(l_1(t))$ (см. [7]).

Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо и для решетчатых распределений (см., например, [6]). Однако в последнем случае метод доказательства существенно отличается от ситуации с нерешетчатыми распределениями. Стоит напомнить, что имеются примеры, показывающие, что при $\beta \in (0, 0.5]$ утверждения вида (4) и (5) не выполняются, вообще говоря, без дополнительных ограничений на функцию распределения $G(t)$. Простой пример такого рода может быть построен при помощи следующих соображений. Если бы соотношения (4) или (5) были всегда справедливы для некоторого $\beta \in (0, 0.5]$, то при $|t| \rightarrow \infty$ мы имели бы

$$\partial G(t) = O(1)\partial U(t) = O(1)\Delta l^{-1}(|t|)|t|^{\beta-1}. \quad (8)$$

Однако условия (1) и (2) влекут при $|t| \rightarrow \infty$ лишь оценку

$$\partial G(t) = o(1)\Delta l(|t|)|t|^{-\beta}. \quad (9)$$

Теперь, в предположении $1 - \beta > \beta$, нетрудно построить функцию распределения $G(t)$, для которой (9) противоречит (8). Читатель может найти в работе [8, § 5] опровергающие примеры такого типа для решетчатого случая.

Следует упомянуть некоторые достаточные условия для справедливости соотношения (5) при $\beta \in (0, 1/2]$. Например, К. В. Эрикссон, основываясь на решетчатых аналогах из работ [4], [5] и [8] и предполагая, что $m(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, сформулировал в работе [2] следующее утверждение, сопроводив его замечанием, что доказательство этих результатов требует большого объема черновой работы.

Теорема 2. *Предположим, что функция распределения $G(t)$ удовлетворяет условиям (2) и (3) и является абсолютно непрерывной с ограниченной плотностью $g(t) = G'(t)$. Допустим далее, что выполнено хотя бы одно из приводимых ниже условий:*

- i) *функция $g(|t|) = O(L(|t|)|t|^{-1-\beta})$ при всех t ;*
- ii) *функция $g(t)$ монотонна для достаточно больших значений $|t|$;*
- iii) *функция $g(t)$ абсолютно непрерывна при $|t| \geq b$, причем $g'(t) = O(L(|t|)|t|^{-2-\beta})$.*

Тогда при выполнении условия i) утверждения (4) и (5) справедливы при $1/4 < \beta \leq 1$, а при выполнении условия ii) или (и) условия iii) — при всех $\beta \in (0, 1]$.

В данной работе мы приводим простое достаточное условие справедливости соотношений (4) и (5) в нерешетчатом случае, которые для $\beta \in (0, 1/2]$ слабее упомянутых в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (2) и (3) и, кроме того, найдутся положительные константы C и T_0 такие, что при $|t| \geq T_0$*

$$\partial^\Delta G(|t|) \leq \Delta C l(|t|)|t|^{-\beta-1}. \quad (10)$$

Тогда для любых $\beta \in (0, 0.5]$ и $\Delta > 0$ справедливы соотношения (4) и (5).

Заметим, что условие (10) выполнено для всех распределений, удовлетворяющих хотя бы одной из гипотез i)–iii), и, более того, не требует абсолютной непрерывности функции $G(t)$. В частности, это подтверждает гипотезу Эриксона из работы [2] о том, что при справедливости предположений (2) и (3) условие i) достаточно для того, чтобы равенство (4) было выполнено при всех $\beta \in (0, 1/2]$. Мы хотели бы напомнить читателю, что В. А. Топчий доказал в [11] справедливость первоначальной гипотезы Эриксона для распределений с $\beta \in (0, 0.5]$, сосредоточенных на положительной полуоси, показав, что условие i) достаточно даже для правильного изменения функции $U'(t)$. Он также предложил в [12] более сильную версию условия iii), обеспечивающую правильное изменение функции $U''(t)$. Отметим также, что аналог теоремы 3 для решетчатых распределений, сосредоточенных на положительной полуоси, получил Р. Доней [6].

Ясно, что, установив справедливость (5) для любого распределения $G(t)$, удовлетворяющего условию (10), мы тем самым докажем и (4), используя отображение $G(t) \mapsto 1 - G(-t)$. В силу этого в дальнейшем мы рассматриваем лишь случай $t > 0$ и $t \rightarrow \infty$ и предполагаем, что $p \in (0, 1]$.

При доказательстве теоремы 3 мы будем использовать следующие тождества, справедливые при всех $t > 0$ и любом $\Delta \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(2t + \Delta) &= \int_{-\infty}^t F_1(2t + \Delta - u) dF_2(u) + \int_{-\infty}^t F_2(2t + \Delta - u) dF_1(u) \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta} F_2(2t + \Delta - u) dF_1(u) - F_1(t + \Delta)F_2(t) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \partial F_1 * F_2(2t) &= \int_{-\infty}^t \partial F_1(2t - u) dF_2(u) + \int_{-\infty}^t \partial F_2(2t - u) dF_1(u) \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta} F_2(2t + \Delta - u) dF_1(u) - F_2(t)\partial F_1(t) \\ &:= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{11}$$

где I_1 и I_2 обозначают первые два интеграла, а сумма двух последних членов обозначена символом I_3 .

В силу монотонности,

$$I_3 \leq (F_2(t + \Delta) - F_2(t))(F_1(t + \Delta) - F_1(t)) = \partial F_1(t)\partial F_2(t). \tag{12}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, все соотношения типа

$$a(t) \sim b(t), \quad a(t) = O(b(t)), \quad a(t) = o(b(t))$$

будут считаться выполненными при $t \rightarrow \infty$. Например, первое из них означает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)/b(t) = 1$. Кроме того, символами $C, C_1, C_2, \dots$ будут обозначаться положительные константы, не всегда одинаковые в разных формулах.

Обозначим $L(t)$ функцию, медленно меняющуюся на бесконечности, такую, что

$$L'(t) = o\left(\frac{L(t)}{t}\right), \quad L(t) \sim l(t) \tag{13}$$

и отношение $L(t)/t^\beta$ монотонно убывает при всех достаточно больших значениях t . В возможности такого выбора можно убедиться, взяв константу в качестве множителя перед экспонентой в представлении Карамата для медленно меняющихся функций [13, гл. VIII, § 9, формула (9.9)], а также обратившись к разделу 5.1 монографии Сенеты [9].

Перепишем условие (10) в эквивалентном виде: существует константа $C_1 > 1$ такая, что при $|t| \geq T_0$

$$\partial G(t) \leq \Delta C_1 L(|t|)|t|^{-\beta-1}, \quad \beta \in (0, 0.5]. \tag{14}$$

Наше доказательство основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Существуют константы $H > 1$ и $T_1 = T_1(\beta) > 0$ такие, что для $t \geq T_1$ и всех $u \in [0, 0.5t]$*

$$0 \leq L(t-u)(t-u)^{-\beta-1} - L(t)t^{-\beta-1} \leq HuL(t)t^{-\beta-2}$$

и

$$\int_{-\infty}^{0.5t} \partial G(t-u) dG^{*k}(u) \leq \Delta H C_1 L(t)t^{-\beta-1}.$$

Доказательство. Необходимые утверждения следуют из (2), (13), (14) и свойств правильно меняющихся функций (см., например, [13, гл. VIII, §§ 8, 9]).

Лемма 2. Пусть выполнены условия (1) и (10) (в виде (14)). Тогда найдутся положительные константы C_2 и ε такие, что при $t \geq T = T(C_2, \varepsilon)$ и всех $k \leq \varepsilon t^\beta / L(t)$

$$\partial G^{*k}(t) \leq \Delta k C_2 L(t) t^{-\beta-1}. \quad (15)$$

Доказательство. Используя соотношения (11) и (12), имеем для $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \partial G^{*(k+1)}(t) &\leq \int_{-\infty}^{0.5t} \partial G(t-u) dG^{*k}(u) + \int_{-\infty}^{0.5t} \partial G^{*k}(t-u) dG(u) \\ &\quad + \partial G^{*k}(0.5t) \partial G(0.5t) := J_1(k) + J_2(k) + J_3(k). \end{aligned} \quad (16)$$

Из неравенства (14) следует, что при $t \geq T_2$

$$J_3(k) \leq \partial G(0.5t) \leq \Delta 2^{\beta+1} C_1 L(0.5t) t^{-\beta-1} \leq 8 \Delta C_1 L(t) t^{-\beta-1}. \quad (17)$$

В силу леммы 1 и оценки (17) при $t \geq T_3$

$$J_1(k) + J_3(k) \leq \Delta C_1 (H + 8) L(t) t^{-\beta-1}. \quad (18)$$

Зафиксируем теперь число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon H < 1/2$, и положим $C_2 = 2C_1(H+8)$. Будем использовать индукцию для доказательства справедливости неравенства (15) для всех k таких, что $k+1 \leq \varepsilon t^\beta / L(t)$.

В силу (14) оценка (15) справедлива при $k = 1$.

Допустим, что неравенство (15) верно для некоторого $k \geq 1$ такого, что $k+1 \leq \varepsilon t^\beta / L(t)$. Покажем, что оно верно при замене k на $k+1$. Из (2), (3) и теоремы 2 [13, гл. VIII, § 9] следует, что

$$\int_0^t u dG(u) = p(1-\beta)\beta^{-1} L(t) t^{1-\beta} (1 + o(1)).$$

Выберем величину T_1 в лемме 1 таким образом, чтобы при $t > T_1$ последнюю оценку можно было записать в виде

$$\int_0^{0.5t} u dG(u) \leq H L(t) t^{1-\beta}. \quad (19)$$

Принимая во внимание (19), оценки, установленные в лемме 1, и предположение индукции, имеем при всех $t \geq T_4$

$$\begin{aligned} J_2(k) &\leq \Delta k C_2 \int_{-\infty}^{0.5t} L(t-u) (t-u)^{-\beta-1} dG(u) \\ &\leq \Delta k C_2 L(t) t^{-\beta-1} + \Delta k C_2 L(t) t^{-\beta-2} \int_0^{0.5t} u dG(u) \\ &\leq \Delta k C_2 L(t) t^{-\beta-1} (1 + H L(t) t^{-\beta}). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (16), (18) и нашего выбора $\varepsilon > 0$ и C_2 , получаем

$$\begin{aligned} \partial G^{*(k+1)}(t) &\leq \Delta L(t) t^{-\beta-1} ((k+0.5)C_2 + (H+8)C_1) \\ &= \Delta(k+1)C_2 L(t) t^{-\beta-1}, \end{aligned}$$

что оправдывает шаг индукции и доказывает лемму 2.

Зададим последовательность $B_k \uparrow \infty$ формулой

$$B_k := \inf\{x > 0: 1 - G(x) + G(-x) \leq k^{-1}\}.$$

В частности,

$$k(1 - G(B_k) + G(-B_k)) = k B_k^{-\beta} l(B_k) \rightarrow 1 \quad (20)$$

при $k \rightarrow \infty$. Последнее при $k \rightarrow \infty$ может быть записано в виде

$$B_k \sim k^{1/\beta} h(k) \sim k^{1/\beta} l^{1/\beta}(B_k) \quad (21)$$

для некоторой медленно меняющейся функции $h(k)$ (см. [14, (B.16)]). Ясно, что

$$\begin{aligned} 1 - G(B_{[ct^\beta/l(t)]}) + G(-B_{[ct^\beta/l(t)]}) &\sim \frac{l(t)}{ct^\beta} \\ &\sim \frac{l(c^{1/\beta}t)}{(c^{1/\beta}t)^\beta} = 1 - G(c^{1/\beta}t) + G(-c^{1/\beta}t). \end{aligned}$$

Эта эквивалентность и условие (2) ведут к представлениям

$$B_{[(ct)^\beta/l(t)]} \sim ct \quad \text{и} \quad B_{[ct^\beta/l(t)]} \sim c^{1/\beta}t \quad (22)$$

для любого $c > 0$.

Используя теорему 3 [13, гл. XVII, § 5] и представление (3.18) из [13, гл. XVII, § 3], нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $G(t)$, удовлетворяющим условиям (2) и (3) с $\beta \in (0, 1)$. Тогда для любого $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n} \leq t \right) = \int_{-\infty}^t g_\beta(y) dy,$$

где плотность $g_\beta(t)$ устойчивого распределения с показателем β имеет характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} g_\beta(z) dz \\ &= \exp \left\{ -\Gamma(1-\beta)|t|^\beta \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p-q) \frac{t}{|t|} \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Согласно локальной теореме Стоуна для нерешетчатых распределений [10],

$$\partial G^{*k}(t) = \frac{\Delta q_\beta(t/B_k)}{B_k} + \frac{\delta_k}{B_k}, \quad (23)$$

где $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq 0$. Оставшаяся часть доказательства является, по существу, повторением рассуждений, использовавшихся в разделе 1° параграфа 7 работы [1] с единственным отличием: распределение в [1] было сконцентрировано на положительной полуоси, в то время как в нашем случае плотность распределения $G(t)$ является, вообще говоря, положительной в каждой конечной точке действительной прямой. Полагая $n := [At^\beta/l(t)]$ и $r := [Bt^\beta/l(t)]$ для $B > A > 0$, имеем

$$t^{1-\beta}l(t) \sum_{k=n}^r \partial G^{*k}(t) \sim \Delta \int_A^B x^{-1/\beta} q_\beta(x^{-1/\beta}) dx. \quad (24)$$

Согласно первой части теоремы 2.2.1 монографии [14] и следствию 2 упомянутой теоремы, $q_\beta(0) \in [0, \infty)$ при $\beta < 1$, причем функция $q_\beta(x)$ непрерывна в нуле. Это означает, что $q_\beta(t/B_k) \rightarrow q_\beta(0)$ при $k \geq r$ и $t, B \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (23), получаем, что для достаточно больших значений t и всех $k \geq r$

$$\partial G^{*k}(t) < \frac{1 + q_\beta(0)}{B_k}. \quad (25)$$

В силу теоремы 1 из [13, гл. XVII, § 9] и оценок (21) и (22), имеем

$$\sum_{k=r}^{\infty} B_k^{-1} \sim \frac{\beta r^{-1/\beta+1}}{(1-\beta)h(r)} \sim \frac{\beta r}{(1-\beta)B_r} \sim \frac{\beta B t^\beta}{(1-\beta)tl(t)B^{1/\beta}},$$

или

$$\sum_{k=r}^{\infty} B_k^{-1} = o\left(\frac{t^{\beta-1}}{l(t)}\right) \quad (26)$$

при $B \rightarrow \infty$.

Применяя лемму 2 для $A < \varepsilon$, мы видим, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \partial G^{*k}(t) \leq \frac{\Delta L(t)}{t^{\beta+1}} \sum_{k=1}^{n-1} k C_2 = O(1) \frac{\Delta L(t)}{t^{\beta+1}} n^2 = AO\left(\frac{t^{\beta-1}}{l(t)}\right),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n-1} \partial G^{*k}(t) = o\left(\frac{t^{\beta-1}}{l(t)}\right), \quad (27)$$

при $A \rightarrow +0$. Вспоминая соотношения (24) и (6), заключаем, что

$$t^{1-\beta} l(t) \partial U(t) \sim t^{1-\beta} l(t) \sum_{k=0}^{\infty} \partial G^{*k}(t) \rightarrow \Delta \int_0^{\infty} x^{-1/\beta} q_{\beta}(x^{-1/\beta}) dx := \Delta I_{\beta}, \quad (28)$$

если вначале $t \rightarrow \infty$, а затем $B \rightarrow \infty$ и $A \rightarrow +0$.

Вычислим теперь значение интеграла I_{β} в соотношении (28). Заметим сначала, что по лемме 3

$$g_{\beta}(x^{-1/\beta}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\Gamma(1-\beta) |t|^{\beta} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p-q) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \right\} e^{-itx^{-1/\beta}} dt. \quad (29)$$

Полагая $u = itx^{-1/\beta}$ и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.2.1 в [15, гл. II, § 2.2] и следствий из нее, получаем

$$\begin{aligned} g_{\beta}(x^{-1/\beta}) &= \frac{1}{\pi} x^{-1/\beta} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-u} \exp \left\{ -x \Gamma(1-\beta) |u|^{\beta} e^{-i\pi\beta/2} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p-q) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \right\} du \\ &= \frac{1}{\pi} x^{1/\beta} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-u} \exp \{ -x K_{\beta} u^{\beta} \} du, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_{\beta}} &:= \frac{e^{i\pi\beta/2}}{\Gamma(1-\beta)(\cos(\pi\beta/2) - i(p-q) \sin(\pi\beta/2))} \\ &= \frac{e^{i\pi\beta/2}(\cos(\pi\beta/2) + i(p-q) \sin(\pi\beta/2))}{\Gamma(1-\beta)(p^2 + 2pq \cos(\pi\beta) + q^2)}. \end{aligned}$$

После очевидных преобразований мы видим, что

$$\begin{aligned} I_{\beta} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-u} du \int_0^{\infty} \exp \{ -x K_{\beta} u^{\beta} \} dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{K_{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\beta} du \\ &= \frac{1}{\pi(p^2 + 2pq \cos(\pi\beta) + q^2)} \operatorname{Im} e^{i\pi\beta/2} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} + i(p-q) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \\ &= \frac{p}{p^2 + 2pq \cos(\pi\beta) + q^2} \frac{\sin \pi\beta}{\pi}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы 3.

2. Асимптотики некоторых интегралов. В этом пункте мы докажем некоторые утверждения, связанные с вычислением асимптотического поведения интегралов, полученных при интегрировании некоторых функций относительно функций восстановления, сосредоточенных на положительной полуоси. Мы рассматриваем общую ситуацию и в силу этого вместо функции восстановления $U(t)$ будем использовать положительную монотонную функцию $V(t)$ такую, что при всех $\Delta > 0$

$$\partial V(t) = \Delta t^{\beta-1} l_V(t), \quad (30)$$

где $l_V(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Пусть $l_P(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Следующее утверждение дополняет теорему 3 работы [1] и теорему 1 из [18] при $\beta \in (0, 1/2]$.

Теорема 4. Пусть $V(t)$ — монотонная функция, удовлетворяющая условию (30) с $\beta \in (0, 1]$. Если $P(t) := t^{-\gamma} l_P(t)$ с $\gamma \in [0, 1)$, а $p(t)$ — функция, непосредственно интегрируемая по Риману на $[0, \infty]$, то

$$\int_0^t P(t-u) dV(u) \sim t^{\beta-\gamma} l_P(t) l_V(t) \int_0^1 (1-u)^{-\gamma} u^{\beta-1} du, \quad (31)$$

$$\int_0^t p(t-u) dV(u) \sim t^{\beta-1} l_V(t) \int_0^\infty p(u) du. \quad (32)$$

Если $P(t) = t^{-1} l_P(t)$, то

$$\int_0^t P(t-u) dV(u) \sim t^{\beta-1} l_V(t) \int_0^t u^{-1} l_P(u) du. \quad (33)$$

Доказательство. Представления (31) и (32) легко следуют из определений правильно меняющихся и непосредственно интегрируемых по Риману функций (см., например, [13, гл. XI, § 1]).

Для доказательства соотношения (33) зафиксируем $\varepsilon \in (0, 0.5)$ и разобьем промежуток интегрирования на три части: $[0, \varepsilon t]$, $[\varepsilon t, (1-\varepsilon)t]$ и $[(1-\varepsilon)t, t]$. В результате получаем

$$\int_0^t P(t-u) dV(u) = (\varepsilon^\beta + 1) O(t^{\beta-1} l_V(t) l_P(t)) + t^{\beta-1} l_V(t) (1 + o(1)) \int_0^{\varepsilon t} P(u) du.$$

Аналогично (7) функция $l_{PI}(t) := \int_0^t P(u) du$ является медленно меняющейся и $l_P(t) = o(l_{PI}(t))$. Эти факты влекут $l_{PI}(\varepsilon t) \sim l_{PI}(t)$ и доказывают (33).

Следствие 1. Пусть условие (1) выполнено при $\beta = 1$, и пусть $p(t)$ — функция, непосредственно интегрируемая по Риману на $[0, \infty]$. Тогда (см. (7))

$$\int_0^t p(t-u) dU(u) \sim l_1^{-1}(t) \int_0^\infty p(u) du.$$

Наш заключительный результат связан с интегралами вида $V * F(t)$, где $F(t)$ — функция распределения.

Теорема 5. Пусть $V(t)$ — функция восстановления, удовлетворяющая условию (30) с $\beta \in (0, 1]$, и пусть $F(t)$ — функция распределения такая, что либо $\partial F(t) = o(t^{-1})$, либо

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t) - F(t(1-\varepsilon))}{\partial V(t)} = 0.$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\partial(V * F)(t) \sim \partial V(t). \quad (34)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $N = N(t) = o(t)$ имеем

$$\partial V(t-u) \sim \partial V(t), \quad F(N) \rightarrow 1 \quad \text{при } u \in [0, N]$$

$$\partial V(t-u) = O(\partial V(t)), \quad 1 - F(N) = o(1) \quad \text{при } u \in [N, t(1-\varepsilon)].$$

Кроме того,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\partial V(t)} \int_{t(1-\varepsilon)}^t \partial V(t-u) dF(u) = 0$$

и

$$\int_t^{t+\Delta} V(t+\Delta-u) dF(u) \leq C \partial V(t) = o(\partial V(t)).$$

Комбинируя доказанные выше оценки, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial(V * F)(t)}{\partial V(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\partial V(t)} \int_0^N \partial V(t-u) dF(u) \\ &\quad + \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\partial V(t)} \int_N^{t(1-\varepsilon)} \partial V(t-u) dF(u) \\ &\quad + \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\partial V(t)} \int_{t(1-\varepsilon)}^t \partial V(t-u) dF(u) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\partial V(t)} \int_t^{t+\Delta} V(t+\Delta-u) dF(u) = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erickson K. B.* Strong renewal theorems with infinite mean. — Trans. Amer. Math. Society, 1970, v. 151, p. 263–291.
2. *Erickson K. B.* A renewal theorem for distributions on $\mathbf{R}^1$ without expectation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1971, v. 77, p. 406–410.
3. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 494 p. (Encyclopedia Math. Appl., v. 27.)
4. *De Bruijn N. G., Erdős P.* On a recursion formula and some Tauberian theorems. — J. Res. Natl. Bur. Stand., 1953, v. 50, p. 161–164.
5. *Garsia A., Lamperti J.* A discrete renewal theorem with infinite mean. — Comment. Math. Helv., 1963, v. 37, p. 221–234.
6. *Doney R. A.* One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. — Probab. Theory Related Fields, 1997, v. 107, p. 451–465.
7. *Parameswaran S.* Partition functions whose logarithms are slowly oscillating. — Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 100, p. 217–240.
8. *Williamson J. A.* Random walks and Riesz kernels. — Pacific J. Math., 1968, v. 25, p. 393–415.
9. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 144 с.
10. *Stone C. J.* A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 546–551.
11. *Топчий В.* Renewal measure density for distributions with regularly varying tails of order $\alpha \in (0, 1/2]$. — Lecture Notes in Statist., 2010, v. 197, p. 109–120.
12. *Топчий В.* Производная плотности восстановления с бесконечным моментом при $\alpha \in (0, 1/2]$. — Сиб. электрон. матем. изв., 2010, т. 7, с. 340–349.
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
14. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
15. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М.: Наука, 1970, 800 с.
17. Спичер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
18. Anderson K. K., Athreya K. B. A renewal theorem in the infinite mean case. — Ann. Probab., 1987, v. 15, p. 388–393.

Поступила в редакцию
29.II.2012

© 2013 г.

КРУГЛОВ В. М.*

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

В одной из своих статей за 1957 год среди прочего Ф. Спичер опубликовал оценку функции распределения суммы независимых симметричных случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением. Оценка построена с помощью одного тождества для распределения суммы упомянутых случайных величин, доказательство которого не приведено. В настоящей заметке доказано тождество Спичера для любых независимых случайных величин и с его помощью построена оценка функции распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Оценка Спичера получается в качестве частного случая предлагаемой оценки.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, характеристическая функция, формула обращения.

В статье Ф. Спичера [1] среди прочего доказана лемма (см. следствие в этой заметке). Она нужна Ф. Спичеру для доказательства основного результата в его статье. Эта лемма также представляет самостоятельный интерес. А. Г. Барсегян в своей статье [2] критикует оригинальное доказательство леммы и ставит под сомнение основной результат статьи [1]. В частности автор указывает, что в оригинальном доказательстве используется равенство (равенство (3) в этой заметке), справедливость которого не установлена, и ей кажется, что оно отсутствует в доступной литературе. А. Г. Барсегян предлагает корректные доказательства леммы и равенства Спичера при дополнительном условии на случайные величины. В предлагаемой заметке доказано равенство (1), частным случаем которого является равенство Спичера. В заметке также доказывается оценка (2) функции распределения суммы независимых случайных величин. Оценка Спичера получается из оценки (2) в качестве частного случая.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$ и $\varphi_k(t) = \mathbf{E} \exp\{itX_k\}$, $t \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $k = 1, \dots, n$, где $i = \sqrt{-1}$.

Теорема 1. Для любого числа $x > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < \lambda\} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) dt. \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: krugvictor@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00515-а.