Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Об одном тождестве для распределения суммы независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 396–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:09:53

16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М.: Наука, 1970, 800 с.
17. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
18. *Anderson K. K., Athreya K. B.* A renewal theorem in the infinite mean case. — Ann. Probab., 1987, v. 15, p. 388–393.

Поступила в редакцию
29.II.2012

© 2013 г.

КРУГЛОВ В. М.*

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

В одной из своих статей за 1957 год среди прочего Ф. Спицер опубликовал оценку функции распределения суммы независимых симметричных случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением. Оценка построена с помощью одного тождества для распределения суммы упомянутых случайных величин, доказательство которого не приведено. В настоящей заметке доказано тождество Спицера для любых независимых случайных величин и с его помощью построена оценка функции распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Оценка Спицера получается в качестве частного случая предлагаемой оценки.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, характеристическая функция, формула обращения.

В статье Ф. Спицера [1] среди прочего доказана лемма (см. следствие в этой заметке). Она нужна Ф. Спицеру для доказательства основного результата в его статье. Эта лемма также представляет самостоятельный интерес. А. Г. Барсегян в своей статье [2] критикует оригинальное доказательство леммы и ставит под сомнение основной результат статьи [1]. В частности автор указывает, что в оригинальном доказательстве используется равенство (равенство (3) в этой заметке), справедливость которого не установлена, и ей кажется, что оно отсутствует в доступной литературе. А. Г. Барсегян предлагает корректные доказательства леммы и равенства Спицера при дополнительном условии на случайные величины. В предлагаемой заметке доказано равенство (1), частным случаем которого является равенство Спицера. В заметке также доказывается оценка (2) функции распределения суммы независимых случайных величин. Оценка Спицера получается из оценки (2) в качестве частного случая.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$ и $\varphi_k(t) = \mathbf{E} \exp\{itX_k\}$, $t \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $k = 1, \dots, n$, где $i = \sqrt{-1}$.

Теорема 1. Для любого числа $x > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < \lambda\} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) dt. \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: krugvictor@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00515-а.

Доказательство. Обозначим Y_ε нормальную случайную величину с параметрами $\mathbf{E} Y_\varepsilon = 0$ и $\mathbf{E} Y_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 > 0$. Ее можно выбрать независимой от случайной величины S_n . Характеристическая функция $\prod_{k=1}^n \varphi_k(t) \exp\{-\varepsilon^2 t^2/2\}$, $t \in \mathbf{R}$, суммы $S_n + Y_\varepsilon$ абсолютно интегрируема. По формуле обращения (см., например, [3, с. 24]) выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{|S_n + Y_\varepsilon| < \lambda\} = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt dx.$$

По теореме Фубини порядок интегрирования в повторном интеграле можно поменять местами. В результате мы получим равенство

$$\mathbf{P}\{|S_n + Y_\varepsilon| < \lambda\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt.$$

Проинтегрируем это равенство по переменному $\lambda \in [0, x]$, $x > 0$. Воспользовавшись еще раз теоремой Фубини, мы получим

$$\int_0^x \mathbf{P}\{|S_n + Y_\varepsilon| < \lambda\} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt.$$

Равенство (1) получится в результате предельного перехода $\varepsilon = 1/m$, $m \uparrow \infty$. Предельный переход под знаками интегралов правомерен по теореме об ограниченной сходимости. Теорема доказана.

Теорема 2. *Предположим, что независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены и их общая характеристическая функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяет неравенству $|\varphi(t)| \leq c$ для всех $|t| \geq b$ и для некоторых чисел $c \in (0, 1)$ и $b > 0$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\{|S_n| < x\} \leq \frac{4\sqrt{2}bx}{\sqrt{n\pi(1-c)}} + \frac{2c^n}{\pi} \int_{|t| \geq 2bx} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt. \quad (2)$$

для любого $x > 0$.

Доказательство. По предположению случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют общую характеристическую функцию $\varphi(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Из (1) следует, что для любого $x > 0$ выполняется равенство

$$\int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < \lambda\} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} \varphi^n(t) dt. \quad (3)$$

По условию выполняется неравенство $|\varphi(t)| \leq c$ для $|t| \geq b$. Отсюда вытекает (см. [3, лемма 3, с. 22]) оценка $|\varphi(t)| \leq 1 - (1-c)t^2/8b^2$ для $|t| < b$. Нам понадобится более грубая оценка $|\varphi(t)| \leq \exp\{-(1-c)t^2/8b^2\}$ для $|t| < b$. Интеграл справа в (3) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathbf{P}\{|S_n| < \lambda\} d\lambda &\leq J_1(x) + J_2(x), \\ J_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| < b} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-n(1-c)t^2/8b^2} dt, \\ J_2(x) &= \frac{c^n}{\pi} \int_{|t| \geq b} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt = \frac{c^n x}{\pi} \int_{|t| \geq bx} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся неравенством $1 - \cos(tx) \leq t^2 x^2/2$, чтобы оценить $J_1(x)$:

$$J_1(x) \leq \frac{x^2}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(1-c)t^2/8b^2} dt = \frac{\sqrt{2}bx^2}{\sqrt{n\pi(1-c)}}.$$