Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Соколов, Поправки классических оценок вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 2, 398–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:04:53

Из этой оценки и из неравенства (4) следует (2). Действительно, достаточно подставить оценки величин $J_1(2x)$ и $J_2(2x)$ в следующих неравенствах:

$$\mathbf{P}\{|S_n| < x\} \leq \frac{1}{x} \int_x^{2x} \mathbf{P}\{|S_n| < \lambda\} d\lambda \leq \frac{1}{x} (J_1(2x) + J_2(2x)).$$

Теорема доказана.

Следствие 1 (F. Spitzer). *Если независимые симметричные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют общее абсолютно непрерывное распределение, то существует постоянная $C > 0$, зависящая только от общего распределения упомянутых случайных величин такая, что*

$$\mathbf{P}\{|S_n| < x\} \leq \frac{Cx}{\sqrt{n}}.$$

для любого $x > 1$.

Доказательство. По лемме Римана–Лебега характеристическая функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, случайной величины с абсолютно непрерывным распределением стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому найдется $b > 0$ такое, что $|\varphi(t)| \leq c = 1/2$ для $|t| \geq b$. Из (2) следует, что в качестве постоянной C можно взять

$$\frac{8b}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \frac{8b}{\sqrt{\pi}} + 2.$$

Следствие доказано.

Обратим внимание, что предположение о симметричности случайных величин не понадобилось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spitzer F.* The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. — *Duke Math. J.*, 1957, v. 24, № 3, p. 327–343.
2. *Барсегян А. Г.* О распределении сумм одинаково распределенных случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, т. 57, в. 1, с. 155–158.
3. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
5.VII.2012

© 2013 г.

СОКОЛОВ Н. В.*

ПОПРАВКИ КЛАССИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Из обобщения прохоровского многомерного аналога неравенства Чебышёва выведены поправки классических оценок вероятностей А. Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова и П. Л. Чебышёва.

Ключевые слова и фразы: неравенство Чебышёва, неравенство Колмогорова, неравенство Прохорова, уточненные верхние и нижние оценки вероятностей, разрыв функции, дискретность случайного аргумента, дискретность вероятности.

* Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия;
e-mail: uminosi@rambler.ru; uminosi@mail.ru

В хорошо известные классические выражения оценок вероятностей А. Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова и П. Л. Чебышёва внесем поправки при помощи следствий обобщения прохоровского многомерного аналога неравенства Чебышёва [1]. Из обобщенного соотношения произвольной размерности вытекает, что [2]:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}{\sup_{\omega \in \Omega} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}. \quad (1)$$

Отсюда следуют три поправки нижней оценки вероятностей А. Н. Колмогорова [3]

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0)}{K}, \quad (2)$$

где X — случайная величина, a_0 — положительное число, неотрицательная функция $f_1(x)$ ограничена ($f_1(x) \leq K$) и является четной и неубывающей при $x \geq 0$, $\mathbf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание.

1-я поправка — поправка знаменателя (при положительном числителе):

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0)}{K - f_1(a_0)} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0)}{K}. \quad (3)$$

2-я поправка — поправка разрыва функции (при положительном числителе):

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0 - 0)}{K - f_1(a_0 - 0)} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0)}{K - f_1(a_0)}. \quad (4)$$

3-я поправка — поправка дискретности случайной величины (при положительном числителе):

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}{\sup_{\omega \in \Omega} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)} \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - f_1(a_0 - 0)}{K - f_1(a_0 - 0)}. \quad (5)$$

Заметим, что вероятность может меняться дискретно. Это обстоятельство приводит к 4-й поправке оценки Колмогорова — поправке дискретности вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} &\geq \frac{\inf_{P_i \geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}{\sup_{\omega \in \Omega} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}} P_i}{\frac{\mathbf{E} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}{\sup_{\omega \in \Omega} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}}, \\ &\geq \frac{\mathbf{E} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}{\sup_{\omega \in \Omega} f_1(X) - \sup_{\omega: |X| < a_0} f_1(X)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где P_i — возможные значения вероятностей.

Отметим, что при $f_1(a_0) < \mathbf{E} f_1(X)$ и $f_1(a_0) = K/2$ первая поправка — поправка знаменателя — приводит к увеличению нижней оценки вероятностей Колмогорова в два раза.

Заметим, что поправка разрыва функции также может существенно улучшить оценку Колмогорова.

Из обобщения прохоровского многомерного аналога неравенства Чебышёва [1] следует также поправка дроби (при числителе, меньшем знаменателя) в неравенстве Чебышёва [2]:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \leq \frac{\mathbf{E} X^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2}{a_0^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2} \leq \frac{\mathbf{E} X^2}{a_0^2}. \quad (7)$$

Как уже отмечалось, вероятность может меняться дискретно. Возможность дискретного изменения вероятности приводит ко второй поправке неравенства Чебышёва — поправке дискретности вероятности:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a_0\} \leq \frac{\sup_{P_i \leq \frac{\mathbf{E} X^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2}{a_0^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2}} P_i}{\frac{\mathbf{E} X^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2}{a_0^2 - \inf_{\omega \in \Omega} X^2}}. \quad (8)$$

Ю. В. Прохоров установил многомерный аналог неравенства П. Л. Чебышёва [4], используя неотрицательно определенные квадратичные формы [5]:

$$\mathbf{P}\{Z \notin D\} \leq \mathbf{E} \tilde{Q}(Z). \quad (9)$$

Здесь Z — случайный вектор, D — прямоугольная область, $\tilde{Q}(Z)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма при всех $Z \notin D$, принимающая значения, не меньшие единицы.

Их обобщения прохоровского многомерного аналога неравенства П. Л. Чебышёва [1] также следует поправка его выражения

$$\mathbf{P}\{Z \notin D\} \leq \frac{\mathbf{E} \tilde{Q}(Z) - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)}{1 - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)}. \quad (10)$$

Принимая во внимание возможности дискретного изменения вероятности, для случая $\mathbf{E} \tilde{Q}(Z) < 1$ запишем последовательность для двух уточнений неравенства Ю. В. Прохорова

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z \notin D\} &\leq \sup_{P_i \leq \frac{\mathbf{E} \tilde{Q}(Z) - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)}{1 - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)}} P_i \\ &\leq \frac{\mathbf{E} \tilde{Q}(Z) - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)}{1 - \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{Q}(Z)} \leq \mathbf{E} \tilde{Q}(Z). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что поправка прохоровского многомерного аналога вытекает также из суммы двух неравенств

$$\mathbf{P}\{Z \notin D\} \leq \int_{\omega: Z \notin D} \tilde{Q}(Z(\omega)) d\mathbf{P}(\omega)$$

и

$$\left[1 - \mathbf{P}\{Z \notin D\}\right] \inf_{\omega: Z \in D} \tilde{Q}(Z(\omega)) \leq \int_{\omega: Z \in D} \tilde{Q}(Z(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) \quad (12)$$

после ее преобразования без отбрасывания части суммарного выражения.

Таким образом, из обобщения многомерного прохоровского аналога неравенства Чебышёва получены и проанализированы поправки классических оценок вероятностей А. Н. Колмогорова, П. Л. Чебышёва и Ю. В. Прохорова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов Н. В. Обобщение прохоровского многомерного аналога неравенства Чебышёва. — Укр. матем. журн., 2006, т. 58, № 4, с. 573–576.
2. Соколов Н. В. Расширение возможностей неравенств чебышевского типа. — Докл. РАН, 2002, т. 384, № 3, с. 308–311.
3. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: ФАЗИС, 1998, 129 с.
4. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985.
5. Прохоров Ю. В. Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы. — Итоги науки и техники, Теория вероятн., Матем. статист., Теорет. кибернет., т. 10. М.: ВИНТИ, 1972, с. 5–24.

Поступила в редакцию
1.XI.2012