Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Грибкова, Р. Хэлмерс, Аппроксимация второго порядка для слабо усеченных средних, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 417–453

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:44:15

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука

Том 58

Выпуск 3, 2013 год

июль, август, сентябрь

© 2013 г.

ГРИБКОВА Н. В.^{*}, ХЭЛМЕРС Р.^{**}

АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СЛАБО УСЕЧЕННЫХ СРЕДНИХ¹⁾

Мы исследуем асимптотические свойства второго порядка распределений статистик $T_n = (\sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n})/n$, где k_n, m_n — последовательности целых чисел, $0 \leq k_n < n - m_n \leq n$, $r_n := \min(k_n, m_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $X_{i:n}$ — порядковые статистики, соответствующие выборке $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F . В частности, мы заостряем внимание на случае слабо усеченных средних, когда $\max(k_n, m_n)/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и предполагаем, что распределение F имеет тяжелые хвосты, т.е. что дисперсия F бесконечна.

В работе получены оценки типа Берри–Эссеена оптимального порядка $O(r_n^{-1/2})$ для нормальной аппроксимации T_n и найдены разложения типа Эджворта для слабо усеченных средних и их студентизованных версий.

Наши результаты дополняют работу Ш. Чёргё, Э. Хейслера и Д. Мейсона [8] по асимптотике первого порядка для слабо усеченных сумм и наши предшествующие работы [14], [15] по аппроксимации второго порядка для (студентизованных) сильно усеченных средних.

Ключевые слова и фразы: слабо усеченное среднее, асимптотическая нормальность, аппроксимация второго порядка, неравенство Берри–Эссеена, разложение Эджворта.

1. Введение и основные результаты. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных вещественнозначных случайных величин с функцией распределе-

^{*}С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Старый Петергоф, С.-Петербург, Россия; e-mail: nv.gribkova@gmail.com

^{**}CWI, Amsterdam, The Netherlands; e-mail: r.helmerts@cwi.nl

¹⁾ Работа первого автора выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1216.2012.1).

ния F , и для каждого натурального n пусть $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ обозначают порядковые статистики, соответствующие выборке $X_1, \dots, X_n$. Введем непрерывную слева инверсию F^{-1} , определенную равенством $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$, $0 < u \leq 1$, $F^{-1}(0) = F^{-1}(0^+)$, и пусть F_n и F_n^{-1} обозначают эмпирическую функцию распределения и ее инверсию соответственно.

Определим генеральное усеченное среднее и дисперсионную функцию:

$$\begin{aligned}\mu(u, 1-v) &= \int_u^{1-v} F^{-1}(s) ds, \\ \sigma^2(u, 1-v) &= \int_u^{1-v} \int_u^{1-v} (s \wedge t - st) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t),\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $0 \leq u < 1-v \leq 1$, $s \wedge t = \min(s, t)$. Заметим, что $\sigma^2(0, 1)$ равно дисперсии X_1 , если существует конечный второй момент $\mathbf{E} X_1^2$.

Пусть k_n, m_n — последовательности целых чисел, $0 \leq k_n < n - m_n \leq n$ и $r_n := k_n \wedge m_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Положим $\alpha_n = k_n/n$, $\beta_n = m_n/n$.

Рассмотрим усеченное среднее

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F_n^{-1}(u) du. \quad (1.2)$$

Асимптотические свойства первого порядка усеченных и слабо усеченных (когда $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$) сумм и средних исследовались многими авторами (см., например, [26], [8], [9], [18]). В частности, в [8] получены необходимые и достаточные условия существования последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ таких, что распределение соответствующим образом нормированной статистики $a_n^{-1}(T_n - b_n)$ стремится к стандартному нормальному закону. Используя другой подход, Ф. Гриффин и У. Приутт [18] нашли несколько иные по форме, но эквивалентные полученным в [8] необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности T_n . В [18] характеризуется класс всех частичных предельных законов для подпоследовательностей слабо усеченных сумм $a_n^{-1}(T_n - b_n)$ и даны достаточные условия для того, чтобы распределение F находилось в области частичного притяжения конкретного закона из этого класса. Элементы этого класса имеют вид $\tau \mathcal{N}_1 + f(\mathcal{N}_2) - g(\mathcal{N}_3)$, где $\mathcal{N}_k$, $k = 1, 2, 3$, — независимые стандартные нормальные случайные величины, $\tau \geq 0$, а f и g — произвольные неубывающие выпуклые функции. Как в [8], так и в [18] классический результат С. М. Стиглера [26] для усеченного среднего (с фиксированными урезающими процентилями α_n и β_n) обобщен на случай, когда доли отсекаемых данных зависят от n и могут стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отметим также работу [16], в которой дано более

короткое доказательство результата С. М. Стиглера [26] и доказана его $m \ll n$ -бутстреп версия.

В случае сильного усечения (фиксированных α_n, β_n) асимптотические свойства второго порядка распределений T_n были исследованы в работах [14] и [15], где, в частности, доказана справедливость разложений Эджворта для (студентизованного) усеченного среднего, бутстрепированного усеченного среднего и найдены простые явные формулы первых членов этих разложений. Отметим, что в работе [20] для распределения усеченного среднего (с фиксированными α_n, β_n) была получена седловая аппроксимация — совершенно иной тип аппроксимации.

В этой статье мы обобщаем результаты [14] по аппроксимации второго порядка для (студентизованного) усеченного среднего с фиксированными урезающими процентлями на случай, когда α_n и β_n являются последовательностями, которые могут стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Единственной известной нам работой, в которой в этой общей ситуации получены некоторые оценки скорости сходимости сумм порядковых статистик к нормальному закону, является работа В. А. Егорова и В. Б. Невзорова [10], опубликованная в 1974 г. Найденные в этой работе оценки не были оптимальными по порядку и по условиям. Что касается асимптотических разложений в случае, когда доли усечения зависят от объема выборки n и могут стремиться к нулю, то, насколько нам известно, такие разложения получены в настоящей работе впервые.

В этой статье мы заостряем внимание на случае распределений с тяжелыми хвостами, понимая под этим то, что $\mathbf{E} X_1^2 = \infty$. В замечании 1.1 мы детально обсуждаем различие в поведении наших аппроксимаций второго порядка в случае тяжелых хвостов у распределения и случае, когда F имеет легкие хвосты.

Сначала мы получаем оценки типа Берри–Эссеена для нормальной аппроксимации T_n при мягких условиях гладкости, налагаемых на плотность, которая предполагается существующей на хвостах распределения F . Мы показываем, что эти оценки при определенных условиях регулярности плотности на хвостах имеют порядок $O(r_n^{-1/2})$ и что этот порядок является наилучшим в отсутствие дополнительных моментных предположений.

Затем мы дополняем наши результаты по скорости сходимости к нормальному закону получением разложений типа Эджворта для слабо усеченных средних и их студентизованных версий, мы находим простые явные формулы этих разложений. Тем самым, в частности, мы уточняем асимптотические результаты первого порядка работы [8], снабжая их аппроксимациями второго порядка.

Мы доказываем, что первый ведущий член наших разложений (в отсутствие симметрии распределения) имеет точный порядок $r_n^{-1/2}$ (см. (1.27), замечание 1.1), если плотность правильно меняется на хво-

стах с показателем $\rho = -(1 + \gamma)$, $0 < \gamma < 2$ (см., например, монографию [5], посвященную правильному изменению, а также работу [6], где используются условия, аналогичные нашему условию [R], с. 427), откуда непосредственно следует оптимальность наших оценок типа Берри–Эссеена. (Если исходное распределение имеет конечный второй момент, то порядок оценок можно улучшить до $O(n^{-3(1/2-1/\gamma)})$, когда $2 < \gamma < 3$, и до $O(n^{-1/2})$, когда $3 \leq \gamma$; $-(1 + \gamma)$ — показатель регулярности плотности на хвостах, см. условие [R]. Авторы планируют рассмотреть эти вопросы в случае конечного второго момента в другой работе.)

Так же, как в [14], [15], наш метод доказательства основан на стохастической аппроксимации (слабо) усеченного среднего U -статистикой второго порядка с ядром, зависящим от n . Для построения аппроксимирующей U -статистики мы используем уинсоризацию исходных случайных величин и специальные имеющие форму статистик фон Мизеса представления типа Бахадура–Кифера для (крайних) выборочных квантилей, полученные в [17].

В завершение введения заметим, что случай тяжелых хвостов у F , на котором мы в основном заостряем внимание в этой работе, интересен, в частности, из-за следующей статистической проблемы: предположим, что $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ и что нас интересуют оценки $\mathbf{E}X_1$ в ситуации, когда $\mathbf{E}X_1^2 = \infty$. Усеченное среднее с фиксированными долями усечения (робастная оценка) не состоятельно, если нет симметрии у исходного распределения, однако слабо усеченное среднее T_n сходится Р-п.н. к $\mathbf{E}X_1$. Нашей следующей целью может быть построение интервальных оценок. Мы знаем [8], что должным образом нормированное слабо усеченное среднее сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Однако скорость сходимости в случае тяжелых хвостов у F может быть довольно медленной (см. теорему 1.2 и следствие 1.1). Однако, если мы знаем асимптотические разложения типа Эджворта нормированной (см. теорему 1.5) и студентизованной (см. теорему 1.7) статистики T_n , корректирующие смещение и асимметрию, мы можем улучшить нормальную аппроксимацию, заменяя ее аппроксимацией, имеющей меньший остаток (конечно, в этой связи интерес представляют и вероятности больших отклонений, которые не рассматриваются в данной работе).

Статья организована следующим образом: в оставшейся части п. 1 мы вводим и обсуждаем условия, а также формулируем основные результаты. В п. 2 мы строим стохастические U -статистические аппроксимации для статистики T_n и для оценки подстановки ее асимптотической дисперсии. Доказательства результатов приведены в п. 3.

Определим $\xi_\nu = F^{-1}(\nu)$ — квантиль распределения F уровня $0 < \nu < 1$, и пусть $W_i(n)$, $i = 1, \dots, n$, обозначают X_i , уинсоризованные вне

$(\xi_{\alpha_n}, \xi_{1-\beta_n}]$, т.е.

$$W_i(n) = \xi_{\alpha_n} \vee (X_i \wedge \xi_{1-\beta_n}), \quad (1.3)$$

где $s \vee t = \max(s, t)$. Определим квантильную функцию $W_i(n)$:

$$Q_n(u) = \xi_{\alpha_n} \vee (F^{-1}(u) \wedge \xi_{1-\beta_n}), \quad (1.4)$$

и ее два первых кумулянта

$$\mu_{W(n)} = \int_0^1 Q_n(u) du, \quad \sigma_{W(n)}^2 = \int_0^1 (Q_n(u) - \mu_{W(n)})^2 du. \quad (1.5)$$

Нетрудно проверить, что $\sigma_{W(n)}^2 = \sigma^2(\alpha_n, 1 - \beta_n)$ (см. (1.1)), причем $\sigma_{W(n)}$ является надлежащим параметром масштаба для нормировки случайных величин T_n при установлении их асимптотической нормальности [8]. Будем предполагать всюду в этой статье, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{W(n)} > 0$ (т.е. что $\xi_{\alpha_n} \neq \xi_{1-\beta_n}$ для всех достаточно больших n).

Определим четыре числа:

$$\begin{aligned} a_1 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, & a_2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, \\ b_1 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n), & b_2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n), \end{aligned} \quad (1.6)$$

и предположим, что $a_2 < b_1$.

Также всюду в этой статье будем предполагать, что выполнено следующее условие гладкости.

[A₁]. Существуют два открытых множества $U_a, U_b \subset (0, 1)$ такие, что функция F^{-1} дифференцируема в $U = U_a \cup U_b$, причем

$$\begin{aligned} (0, \epsilon), & \quad \text{если } 0 = a_1 = a_2, & (1 - \epsilon, 1), & \quad \text{если } b_1 = b_2 = 1, \\ U_a \supset (0, a_2], & \quad \text{если } 0 = a_1 < a_2, & U_b \supset [b_1, 1), & \quad \text{если } b_1 < b_2 = 1, \\ [a_1, a_2], & \quad \text{если } 0 < a_1 \leq a_2, & [b_1, b_2], & \quad \text{если } b_1 \leq b_2 < 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

(с некоторым $0 < \epsilon < 1$ в случаях, соответствующих первой строке (1.7)), т.е. плотность $f = F'$ существует и положительна в $F^{-1}(U)$.

Определим две последовательности:

$$q_{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} \frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})}, \quad q_{\beta_n} = \frac{1}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})}. \quad (1.8)$$

Заметим, что условие [A₁] гарантирует, что эти величины определены при всех достаточно больших n . То же замечание применимо и к другим последовательностям величин, которые вводятся далее.

Второе предположение, которое будет использоваться в формулировках, следующее:

[A₂]. $q_{\alpha_n} \vee q_{\beta_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что $[A_2]$ выполняется, если

$$\sigma^2 = \sigma^2(0, 1) < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} \vee \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} = o(\sqrt{n}).$$

Кроме того, $[A_2]$ выполнено, если

$$\sigma^2 = \infty \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{\alpha_n}}{|\xi_{\alpha_n}|f(\xi_{\alpha_n})} \vee \frac{\sqrt{\beta_n}}{|\xi_{1-\beta_n}|f(\xi_{1-\beta_n})} = o(\sqrt{n}),$$

— эта импликация следует из леммы 2.1 работы [8], в которой доказано, что для любой квантильной функции F^{-1}

$$\limsup_{u, v \downarrow 0} \frac{u(F^{-1}(u))^2 + v(F^{-1}(1-v))^2}{\sigma^2(u, 1-v)} < \infty. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) будет играть существенную роль в наших доказательствах. Отметим также, что в частном случае, когда второй момент F конечен, верхний предел в (1.9) не только конечен, но фактически равен нулю. Этот простой факт лежит в основе получения несколько лучшей скорости сходимости, даваемой в теореме 1.3, в сравнении со скоростью, устанавливаемой в более общей теореме 1.2.

Пусть h — вещественнозначная функция, определенная на множестве $F^{-1}(U)$ (см. (1.7)). Для произвольного $0 < B < \infty$ определим величины

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha_n, h}(B) &= \sup_{|t| \leq B} \left| h \circ F^{-1} \left(\alpha_n + t \sqrt{\frac{\alpha_n \ln k_n}{n}} \right) - h \circ F^{-1}(\alpha_n) \right|, \\ \Psi_{1-\beta_n, h}(B) &= \sup_{|t| \leq B} \left| h \circ F^{-1} \left(1 - \beta_n + t \sqrt{\frac{\beta_n \ln m_n}{n}} \right) - h \circ F^{-1}(1 - \beta_n) \right|, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $h \circ F^{-1}(u) = h(F^{-1}(u))$. Заметим, что $\alpha_n + t \sqrt{(\alpha_n \ln k_n)/n} = \alpha_n(1 + t \sqrt{(\ln k_n)/k_n}) = \alpha_n(1 + o(1))$ и $1 - \beta_n + t \sqrt{(\beta_n \ln m_n)/n} = 1 - \beta_n(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$. В частности, отсюда следует, что величины, введенные в (1.10), определены при всех достаточно больших n .

Мы будем использовать далее следующие вспомогательные функции: $\Psi_{\nu_n, x}(B)$, $\Psi_{\nu_n, 1/f(x)}(B)$ и $\Psi_{\nu_n, x/f(x)}(B)$, $\nu_n = \alpha_n, 1 - \beta_n$, соответствующие $h(x) = x$, $1/f(x)$ и $x/f(x)$ в (1.10).

Легко проверить справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha_n, x/f(x)}(B) &\leq \alpha_n B \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} + \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) \right)^2 \\ &\quad + |\xi_{\alpha_n}| \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B), \\ \Psi_{1-\beta_n, x/f(x)}(B) &\leq \beta_n B \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} + \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) \right)^2 \\ &\quad + |\xi_{1-\beta_n}| \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B), \end{aligned} \quad (1.11)$$

которые будут полезны при доказательстве леммы 2.2 в п. 2.

Сформулируем третье предположение, используемое в формулировках.

[A₃]. Для любого $0 < B < \infty$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) \rightarrow 0, \quad \frac{\beta_n}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) \rightarrow 0.$$

Определим функцию распределения нормированного усеченного среднего T_n :

$$F_{T_n}(x) = \mathbf{P}\left(\sigma_{W(n)}^{-1} n^{1/2}(T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)) \leq x\right). \quad (1.12)$$

Сначала мы покажем, что условия [A₁]–[A₃] влекут за собой

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

где Φ — стандартная нормальная функция распределения. Чтобы установить это, проверим, что в условиях [A₁]–[A₃] выполнены необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности T_n (см. [8, теорема 4, с. 677]). Рассмотрим первую вспомогательную функцию, определенную на с. 674 в [8], которая соответствует отсечению k_n наименьших наблюдений нашей выборки объема n ; проверка условия для второй вспомогательной функции на с. 674, соответствующей усечению m_n наибольших наблюдений, полностью аналогична, поэтому мы ее опускаем. Для того чтобы установить справедливость (1.13), мы должны проверить, что для любого $c \in \mathbf{R}$

$$Q_{1,n}(c) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где

$$Q_{1,n}(c) = \begin{cases} \frac{\alpha_n^{1/2}}{\sigma_{W(n)}} \left\{ F^{-1}\left(\alpha_n + c \sqrt{\frac{\alpha_n}{n}}\right) - F^{-1}(\alpha_n) \right\}, & |c| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n n}, \\ Q_{1,n}\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n n}\right), & -\infty < c < -\frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n n}, \\ Q_{1,n}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n n}\right), & \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n n} < c < \infty, \end{cases}$$

(см. [8]). Заметим, что $\alpha_n n = k_n \rightarrow \infty$, и для любого $c \in \mathbf{R}$ и всех достаточно больших n мы имеем $|c| < \sqrt{\alpha_n n}/2$, причем $\alpha_n + c\sqrt{\alpha_n/n} = \alpha_n(1 + c\sqrt{1/k_n})$ принадлежит множеству U_a (см. (1.7)). Поэтому

$$Q_{1,n}(c) = \frac{\alpha_n^{1/2}}{\sigma_{W(n)}} c \sqrt{\frac{\alpha_n}{n}} \frac{1}{f(F^{-1}(\alpha_n + \theta c \sqrt{\alpha_n/n}))} \quad (1.15)$$

для некоторого $0 < \theta < 1$, и величина (1.15) по абсолютной величине меньше, чем

$$|c| \frac{\alpha_n}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} \left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} + \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(\theta|c|) \right),$$

что стремится к нулю в силу предположений $[A_2]$ и $[A_3]$, откуда следует (1.14).

Наши условия $[A_1]$ – $[A_3]$ являются несколько более строгими, чем необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности работы [8], но эти условия позволяют нам установить границу ошибки нормальной аппроксимации для функции распределения T_n , определенной в (1.12). Отметим попутно, что Л. Пенг [23] показал, что в общем случае нельзя заменить генеральное усеченное среднее $\mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)$, используемое в (1.12), обычным средним $\mathbf{E} T_n$ (которое существует, например, если F и $1 - F$ правильно меняются на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно); центрирование генеральным усеченным средним действительно нужно, чтобы получить стандартный нормальный предел в (1.12).

Следующая теорема — наш основной результат по скорости сходимости распределения нормированной статистики T_n к стандартному нормальному закону.

Теорема 1.1. *Предположим, что условия $[A_1]$ и $[A_2]$ выполнены. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A}{\sqrt{n}} (\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + \delta_{3,n} + \delta_{4,n}) + C r_n^{-c}, \quad (1.16)$$

$$\delta_{1,n} = \frac{\mathbf{E} |W_1(n)|^3}{\sigma_{W(n)}^3}, \quad \delta_{2,n} = \frac{1}{\sigma_{W(n)}} \left(\frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \right),$$

$$\delta_{3,n} = \alpha_n^{1/3} \left(\frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}} \right)^{5/3} + \beta_n^{1/3} \left(\frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n}) \sigma_{W(n)}} \right)^{5/3},$$

$$\delta_{4,n} = \frac{1}{\sigma_{W(n)}} \left(\alpha_n \ln k_n \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) + \beta_n \ln m_n \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) \right),$$

для любого $c > 0$, где $A, B, C > 0$ — постоянные, зависящие только от c .

Отметим, что в правой части (1.16) мы имеем: $(1/\sqrt{n})\delta_{1,n} = O(r_n^{-1/2})$ в силу соотношения (1.9) (см. доказательство теоремы 1.2 в п. 3); $(1/\sqrt{n})\delta_{2,n} = o(1)$ ввиду $[A_2]$; $(1/\sqrt{n})\delta_{3,n} = o(1)$, если мы дополнительно предположим, что $q_{\alpha_n} = o(k_n^{-1/5})$, $q_{\beta_n} = o(m_n^{-1/5})$; и наконец, $(1/\sqrt{n})\delta_{4,n} = o(1)$, если $(\alpha_n/(\sqrt{n}\sigma_{W(n)}))\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) = o(1/\ln k_n)$, $(\beta_n/(\sqrt{n}\sigma_{W(n)}))\Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) = o(1/\ln m_n)$.

Пример 1.1. Рассмотрим пример, в котором исходное распределение F имеет сверхтяжелые хвосты. Пусть функция распределения F такова, что $F(x) = 1 - F(x) = 1/(2(\ln|x|)^\rho)$, $\rho > 0$, для всех x таких,

$|x| > x_0 > 0$. Этот пример рассматривался также в [18] в контексте изучения асимптотической нормальности (но не точности нормальной аппроксимации). Простые вычисления величин $\delta_{i,n}$ (оказывается, что слабое, соответствующее $i = 3$, является в этом случае самым большим) показывают, что в правой части (1.16) мы имеем оценку порядка $O(r_n^{-d})$ с некоторым $0 < d \leq 1/2$, когда $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} n^{5/(5+3\rho(1/2-d))} < \infty$, и оценка порядка $O(r_n^{-1/2})$ возможна в том и только том случае, когда $k_n \asymp n$ и $m_n \asymp n$. Однако мы можем получить оценку порядка скажем $O(r_n^{-1/3})$, если возьмем $k_n, m_n \sim n^{10/(10+\rho)}$.

Для того чтобы привести более простые и явные по форме оценки, чем (1.16), нам потребуются несколько более сильные ограничения.

Следующее предположение является усилением условия $[A_2]$.

$[A'_2]$. *Предположим, что*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{\alpha_n})} < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{1-\beta_n})} < \infty.$$

Если выполнено $[A'_2]$, то

$$q_{\alpha_n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}}\right), \quad q_{\beta_n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Заметим, что ввиду (1.9) условие $[A'_2]$ выполняется, если выполнено следующее немного более сильное условие.

$[A''_2]$. *Предположим, что*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{|\xi_{\alpha_n}| f(\xi_{\alpha_n})} < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{|\xi_{1-\beta_n}| f(\xi_{1-\beta_n})} < \infty.$$

В случае слабо усеченного среднего, когда $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$, условие $[A''_2]$ выполнено, если $\limsup_{x \rightarrow -\infty} F(x)/(|x|f(x)) < \infty$ и $\limsup_{x \rightarrow +\infty} (1 - F(x))/(xf(x)) < \infty$, последнее справедливо, например, если функция распределения F имеет плотность $f = F'$ для всех достаточно больших $|x|$, регулярно меняющуюся на бесконечности с показателем $\rho < -1$ (см. условие $[R]$ ниже, используемое в следствии 1.1 и теоремах 1.5 и 1.7).

Следующее условие $[A'_3]$ является усилением условия $[A_3]$.

$[A'_3]$. *Для любого $B > 0$*

$$\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) = O\left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n}) \ln k_n}\right), \quad \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) = O\left(\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n}) \ln m_n}\right).$$

Теперь мы сформулируем наш второй результат типа Берри-Эссеена, дающий гораздо более простую по форме верхнюю оценку.

Теорема 1.2. *Предположим, что условия $[A_1]$, $[A'_2]$ и $[A'_3]$ выполнены. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq Cr_n^{-1/2}, \quad (1.18)$$

где C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от n .

Теорему 1.2 можно сравнить с результатом работы [10], где при несколько более сильных ограничениях были получены оценки порядка $O((\ln r_n)/\sqrt{r_n})$. Оценка (1.18) имеет оптимальный порядок (при отсутствии конечного второго момента у F) и справедлива, в частности, для слабо усеченных средних, когда F есть, например, распределение Коши. Неулучшаемость порядка этой оценки следует из наших разложений типа Эджворта и вычислений, приведенных в замечании 1.1 (см. (1.27)).

Наше следующее утверждение касается случая слабо усеченного среднего, когда $\mathbf{E} X_1^2 < \infty$, т.е. случая легких хвостов у F .

Теорема 1.3. *Предположим, что $\mathbf{E} X_1^2 < \infty$, $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и выполнены условия $[A_1]$, $[A'_2]$. Кроме того, предположим, что для любого $B > 0$*

$$\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) = o\left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n}) \ln k_n}\right), \quad \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) = o\left(\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n}) \ln m_n}\right) \quad (1.19)$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| = o(r_n^{-1/2}) \quad (1.20)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Этот результат (оценка (1.20)) применим, например, к функции распределения F с регулярно меняющейся на хвостах плотностью f , которая ведет себя на бесконечности как $|x|^{-(3+\varepsilon)}$ (с некоторым $\varepsilon > 0$), так что дисперсия F конечна. Если мы возьмем, например, $k_n = m_n = [n^{1/2}]$, то вместо оценки $O(n^{-1/4})$, которую дает теорема 1.2, получим оценку порядка $o(n^{-1/4})$. Более того, если предполагать существование конечных моментов более высокого порядка, чем 2, то возможно получение лучших оценок точности нормальной аппроксимации, чем (1.20), эти оценки могут быть даны в терминах степени n , т.е. в виде $O(n^{-d})$, $d \leq 1/2$, вместо $o(r_n^{-1/2})$, как в (1.20). Авторы планируют рассмотреть случай легких хвостов у F в другой работе.

Теперь мы сформулируем некоторые следствия теорем 1.1, 1.2 и 1.3. Первое следствие касается случая слабо усеченного среднего, когда функция распределения F принадлежит области притяжения устойчивого закона.

Обозначим RV_ρ^∞ класс регулярно меняющихся на бесконечности функций: $g \in RV_\rho^\infty$ тогда и только тогда, когда $g(x) = |x|^\rho L(x)$ для

$|x| > x_0$ с некоторыми $x_0 > 0$, $\rho \in \mathbf{R}$ и положительной медленно меняющейся на бесконечности функцией $L(x)$. Нам понадобится следующее условие регулярности плотности f на хвостах.

[R]. Предположим, что $f \in RV_\rho^\infty$, где $\rho = -(1 + \gamma)$, $\gamma > 0$, и что

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = O\left(f(x) \left|\frac{\Delta x}{x}\right|^{1/2}\right), \quad (1.21)$$

когда $\Delta x = o(|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Заметим, что (1.21) справедливо для f , если $|L(x + \Delta x)/L(x) - 1| = O(|(\Delta x)/x|^{1/2})$ при $|x| \rightarrow +\infty$, где L есть соответствующая медленно меняющаяся функция, и оно выполнено (причем с показателем степени, равным 1 вместо 1/2), если L непрерывно дифференцируема для достаточно больших $|x|$ и $|L'(x)| = O(L(x)/|x|)$ при $|x| \rightarrow +\infty$, что имеет место, например, когда L есть некоторая степень логарифма. Близкое к (1.21) условие регулярности второго порядка встречается также у А. А. Боровкова и А. А. Могульского (см. [6]).

Следующее утверждение справедливо для слабо усеченных средних в случае правильно меняющейся на бесконечности плотности.

Следствие 1.1. Предположим, что $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, условие $[A_1]$ выполнено с некоторым $\epsilon > 0$, и плотность f удовлетворяет условию [R] с $0 < \gamma \leq 2$ на множестве $F^{-1}(U)$. Тогда:

- (i) оценка (1.18) справедлива;
- (ii) кроме того, если $\gamma = 2$ и $\mathbf{E} X_1^2 < \infty$, то оценка (1.20) также имеет место.

Из доказательства наших теорем (см. п. 3.) следует, что последнее утверждение справедливо также и в случае, когда показатели регулярности γ плотности f различны на $-\infty$ и на $+\infty$. (В частности, эти показатели могут принимать значения большие, чем 2, но в этом случае, как уже отмечалось, оценки (1.18) и (1.20) не оптимальны.) Мы полагаем показатели одинаковыми для простоты. Кроме того, эта ситуация соответствует важному частному случаю, когда F принадлежит области притяжения устойчивого закона.

Второе следствие касается классического случая усечения на уровне центральных порядковых статистик. Пусть a_1 , b_2 , U_a и U_b определены как в (1.6), (1.7).

Следствие 1.2. Предположим, что $0 < a_1 < b_2 < 1$ и выполняется условие $[A_1]$. Кроме того, предположим, что плотность f удовлетворяет условию Гёльдера степени $d > 0$ на множествах $F^{-1}(U_c)$, $c = a, b$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (1.22)$$

где $C > 0$ — не зависящая от n постоянная.

Отметим, что предположение гладкости в следствии 1.2 соответствует задаче получения асимптотических разложений, которые сформулированы и доказаны ниже, и оно несколько избыточно для оценок типа Берри–Эссеена (см., например, [13], где с использованием результата В. ван Цвета [27] оптимальная по порядку оценка (1.22) получена при условии, что F^{-1} удовлетворяет условию Липшица на множествах U_a и U_b).

Теперь мы сформулируем наши результаты по асимптотическим разложениям типа Эджворта. Определим центральный третий момент $W_i(n)$:

$$\gamma_{3,W(n)} = \int_0^1 (Q_n(u) - \mu_{W(n)})^3 du,$$

где $Q_n(u)$, $\mu_{W(n)}$ — квантильная функция и среднее случайных величин $W_i(n)$ (см. (1.4) и (1.5)), и положим

$$\delta_{2,W(n)} = -\alpha_n^2 \frac{(\mu_{W(n)} - \xi_{\alpha_n})^2}{f(\xi_{\alpha_n})} + \beta_n^2 \frac{(\mu_{W(n)} - \xi_{1-\beta_n})^2}{f(\xi_{1-\beta_n})}. \quad (1.23)$$

Определим две последовательности вещественных чисел

$$\lambda_{1(n)} = \frac{\gamma_{3,W(n)}}{\sigma_{W(n)}^3}, \quad \lambda_{2(n)} = \frac{\delta_{2,W(n)}}{\sigma_{W(n)}^3}. \quad (1.24)$$

Мы докажем справедливость асимптотического разложения типа Эджворта для F_{T_n} при выполнении условий $[A_1]$ – $[A_3]$. Это разложение определяется формулой

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{\phi(x)}{6\sqrt{n}} \left((\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)})(x^2 - 1) + 6\sqrt{n} \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} \right), \quad (1.25)$$

где

$$\phi = \Phi', \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(-\frac{\alpha_n(1 - \alpha_n)}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n(1 - \beta_n)}{f(\xi_{1-\beta_n})} \right),$$

b_n — смещение, которое представлено в разложении, несмотря на отсутствие каких-либо моментных предположений (см. [14]). Заметим, что если $\alpha_n = \beta_n$ и распределение F симметрично, то $G_n(x) \equiv \Phi(x)$, поскольку второе слагаемое разложения в этом случае равно нулю.

Легко показать (как в доказательстве теоремы 1.2 в п. 3.), что если выполнены условия $[A_1]$ и $[A'_2]$, то второй член в правой части (1.25), т.е. $G_n(x) - \Phi(x)$, для любого фиксированного x есть величина порядка $r_n^{-1/2}$ при $n \rightarrow \infty$. Мы покажем теперь, что при подходящих условиях (см. теорему 1.5 и следствие 1.3) остаточный член аппроксимации функции распределения нормированного усеченного среднего ее разложением $G_n(x)$ имеет порядок $O((\ln k_n)^{5/4}/k_n^{3/4} + (\ln m_n)^{5/4}/m_n^{3/4})$ при $n \rightarrow \infty$.

Простые вычисления показывают, что в случае исходного распределения F , рассмотренного в примере 1.1, когда F не имеет конечных моментов,

$$|G_n(x) - \Phi(x)| \asymp \frac{1}{\sqrt{k_n}} \left(\frac{n}{k_n} \right)^{1/\rho} + \frac{1}{\sqrt{m_n}} \left(\frac{n}{m_n} \right)^{1/\rho}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Поэтому $|G_n(x) - \Phi(x)| \asymp 1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n}$ в том и только том случае, когда $k_n \asymp n$ и $m_n \asymp n$.

З а м е ч а н и е 1.1. Исследуем порядок величин различных слагаемых, появляющихся в корректирующем члене разложения Эджворта (1.25). Два из этих слагаемых корректируют асимметрию, обозначим их $t_{j,n} := \lambda_{j(n)}/\sqrt{n}$, $j = 1, 2$, соответственно, тогда как третье слагаемое корректирует смещение, которое мы обозначим $t_{3,n} := b_n/\sigma_{W(n)}$. Предположим, что $\max(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow 0$, условие $[A_1]$ удовлетворено и что плотность $f = F'$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\rho = -(1+\gamma)$, где $\gamma > 0$; мы будем предполагать также, что отсутствует симметрия, т.е. что мы не имеем дело с ситуацией, когда $f(x)/f(-x) \rightarrow 1$, $|x| \rightarrow \infty$, и одновременно $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$. (Если $f(x) = f(-x)$ для всех достаточно больших $|x|$ и $\alpha_n = \beta_n$, то $t_{j,n} = 0$, $j = 1, 2, 3$.)

Заметим прежде всего, что в силу $[A_1]$ мы имеем $\alpha_n = F(\xi_{\alpha_n})$, $\beta_n = 1 - F(\xi_{1-\beta_n})$ и что в силу условия регулярности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{|\xi_{\alpha_n}| f(\xi_{\alpha_n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\xi_{1-\beta_n} f(\xi_{1-\beta_n})} = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.26)$$

Пусть запись $h(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n)/g(n) = c$, где c — некоторая постоянная, $0 < |c| < \infty$. Мы будем различать три случая.

1) $0 < \gamma < 2$. В этом случае $\sigma^2(0, 1) = \infty$, т.е. мы имеем дело с распределением F с тяжелыми хвостами. Используя свойства Караматы для урезанных моментов (см. [11, т. II, гл. VIII, п. 9, теорема 2]), мы находим, что

$$t_{1,n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\alpha_n \xi_{\alpha_n}^3 + \beta_n \xi_{1-\beta_n}^3}{(\alpha_n \xi_{\alpha_n}^2 + \beta_n \xi_{1-\beta_n}^2)^{3/2}},$$

что по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\alpha_n |\xi_{\alpha_n}|^3}{(\alpha_n \xi_{\alpha_n}^2)^{3/2}} + \frac{\beta_n |\xi_{1-\beta_n}|^3}{(\beta_n \xi_{1-\beta_n}^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{k_n}} + \frac{1}{\sqrt{m_n}}.$$

Но эта величина в то же время не меньше по порядку, чем $\min(1/\sqrt{k_n}, 1/\sqrt{m_n})$. Аналогично мы легко проверяем, что $t_{2,n}$ и $t_{3,n}$ также в общем случае (когда нет симметрии) имеют точный порядок $1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n}$. Таким образом (при отсутствии симметрии), мы получаем

$$|G_n(x) - \Phi(x)| \asymp \frac{1}{\sqrt{k_n}} + \frac{1}{\sqrt{m_n}}. \quad (1.27)$$

2) $2 < \gamma < 3$, второй момент F конечен, но третий момент бесконечен. В этом случае $\sigma_{W(n)}^2 \rightarrow \sigma^2(0, 1) < \infty$, и, снова используя свойства типа Караматы для урезанных моментов, мы получаем, что $t_{1,n} \sim (\alpha_n \xi_{\alpha_n}^3 + \beta_n \xi_{1-\beta_n}^3) / \sqrt{n}$ и, следовательно, $t_{1,n} \sim (\alpha_n^{1-3/\gamma} + \beta_n^{1-3/\gamma}) L(n) / \sqrt{n}$, где $L(n)$ — некоторая положительная медленно меняющаяся функция. Последняя величина равна $n^{-3(1/2-1/\gamma)} (k_n^{1-3/\gamma} + m_n^{1-3/\gamma}) L(n)$. Заметим, что $1 - 3/\gamma < 0$, поскольку $\gamma < 3$. Для величины $t_{2,n}$ мы легко находим, что она того же порядка, что и $t_{1,n}$. Заметим, что когда γ становится близким к 3, порядок $t_{1,n} + t_{2,n}$ становится близким к $n^{-1/2}$. Однако для $t_{3,n}$ мы получаем более медленную скорость сходимости к нулю, чем для $t_{j,n}$, $j = 1, 2$. Простые вычисления, использующие условие регулярности, показывают, что $t_{3,n}$ имеет точный порядок $n^{-(1/2-1/\gamma)} (k_n^{-1/\gamma} + m_n^{-1/\gamma}) L(n)$. Поскольку $-1/\gamma < 1 - 3/\gamma$ при $\gamma > 2$, мы видим, что смещающий член $t_{3,n}$ имеет больший порядок, чем $t_{1,n} + t_{2,n}$.

3) $\gamma > 3$. В этом случае третий абсолютный момент F конечен и очевидно, что $|t_{1,n} + t_{2,n}| = O(1/\sqrt{n})$. Однако для асимптотического смещения $t_{3,n}$, как и прежде, мы имеем (в отсутствие симметрии) точный порядок $n^{-(1/2-1/\gamma)} (k_n^{-1/\gamma} + m_n^{-1/\gamma}) L(n)$, последняя величина близка к $n^{-1/6}$, когда $\gamma > 3$ близко к 3. Таким образом, в случае распределений F с легкими хвостами (с конечным абсолютным третьим моментом) смещающая компонента разложения типа Эджворта (1.25) имеет порядок $n^{-1/6}$.

Из наших вычислений, в частности, следует, во-первых, что оценка скорости сходимости вида $O(r_n^{-1/2})$, полученная в теореме 1.2, является оптимальной (в случае распределений, не имеющих конечного второго момента) и, во-вторых, что в случаях 2) и 3) предпочтительным является центрирование статистики посредством $\mathbf{E} T_n$. Однако в случае тяжелых хвостов, т.е. случае 1), это невозможно, как было показано в работе Л. Пенга [23]. В частности, все это говорит о том, что разложение (1.25) соответствует именно распределениям F с тяжелыми хвостами, т.е. случаю 1). В других случаях можно центрировать распределение T_n его точным математическим ожиданием $\mathbf{E} T_n$, следствием чего будет устранение смещения $-\phi(x)t_{3,n}$, присутствующего в формуле (1.25).

Учитывая вычисления, проведенные в замечании 1.1, мы будем далее, говоря об асимптотических разложениях, предполагать, что $\mathbf{E} X_1^2 = \infty$. Хотя наши дальнейшие утверждения справедливы независимо от того, существует или нет конечный второй момент, тем не менее асимптотические формулы $G_n(x)$ и $H_n(x)$ могут не иметь смысла разложений в случае $\mathbf{E} X_1^2 < \infty$, поскольку порядок получаемых оценок (см. (1.29), (1.35)) таков, что в случае легких хвостов корректирующие члены асимптотических формул (1.25), (1.32) могут становиться меньше, чем оценки остаточного члена в теоремах 1.5 и 1.7 (см. пп. 2) и 3) в замечании 1.1). Отметим также, что сказанное не относится к след-

ствию 1.4, которое касается сильного усечения, поскольку в этом случае слагаемые в (1.25), (1.32), корректирующие асимметрию и смещение, имеют точный порядок $n^{-1/2}$ (если нет симметрии F с одновременным равенством $\alpha_n = \beta_n$, в последнем случае эти слагаемые исчезают), тогда как оценка остаточного члена в следствии 1.4 имеет порядок $o(n^{-1/2})$ (см. [14] и [15], где детально изучен случай сильного усечения).

Следующая теорема утверждает справедливость асимптотического разложения для нормированного усеченного среднего.

Теорема 1.4. *Предположим, что условия $[A_1]$ – $[A_3]$ выполнены. Тогда*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - G_n(x)| \leq & \frac{C_1}{n} (\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + \delta_{3,n}) + \frac{C_2}{n^{3/4}} \delta_{4,n} \\ & + \frac{C_3}{n^{1/2}} (\delta_{5,n} + \delta_{6,n}) + C_4 r_n^{-c} \end{aligned} \quad (1.28)$$

для любого $c > 0$ и некоторых постоянных $C_i > 0$, где $\delta_{1,n} = \mathbf{E} (W_1(n))^4 / \sigma_{W(n)}^4$,

$$\delta_{2,n}(\varepsilon) = \alpha_n^2 \left(\frac{1}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{\alpha_n})} \right)^{2+\varepsilon} + \beta_n^2 \left(\frac{1}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{1-\beta_n})} \right)^{2+\varepsilon}$$

(с произвольным $\varepsilon > 0$), $\delta_{3,n} = \delta_{2,n}(0)$,

$$\delta_{4,n} = \frac{(\ln k_n)^{5/4} (\alpha_n)^{3/4}}{f(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}} + \frac{(\ln m_n)^{5/4} (\beta_n)^{3/4}}{f(\xi_{1-\beta_n}) \sigma_{W(n)}},$$

$$\delta_{5,n} = \alpha_n \frac{\ln k_n}{\sigma_{W(n)}} \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) + \beta_n \frac{\ln m_n}{\sigma_{W(n)}} \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B),$$

где $B > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от c , и

$$\delta_{6,n} = \frac{|(\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)})b_n|}{\sigma_{W(n)}}.$$

Постоянные C_i , $i = 1, \dots, 4$, в (1.28) зависят только от c и ε .

Отметим, что в любом случае мы имеем $\delta_{1,n}/n = O(1/k_n + 1/m_n)$ в правой части (1.28) ввиду (1.9) (см. доказательство теоремы 1.5 в п. 3).

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.4, дает явную верхнюю границу в более простой форме. Чтобы сформулировать его, нам потребуется дополнительное предположение.

$[A_3'']$. Для любого $0 < B < \infty$

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) &= O\left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \left(\frac{\ln k_n}{k_n}\right)^{1/4}\right), \quad n \rightarrow \infty, \\ \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) &= O\left(\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} \left(\frac{\ln m_n}{m_n}\right)^{1/4}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, нам будет нужно следующее предположение.

[L]. Существует $0 < s \leq 1$ такое, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^s / r_n < \infty$.

Следствие 1.3. Предположим, что выполнены условия $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3']$ и [L]. Тогда в правой части (1.28) мы имеем оценку порядка $O((\ln k_n)^{5/4} / k_n^{3/4} + (\ln m_n)^{5/4} / m_n^{3/4})$, $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема относится к случаю слабого усечения, когда $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$, и регулярного изменения плотности на бесконечности.

Теорема 1.5. Предположим, что $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, условия $[A_1]$ и [L] выполнены и плотность $f = F'$ удовлетворяет условию [R] с $0 < \gamma < 2$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - G_n(x)| = O\left(\frac{(\ln k_n)^{5/4}}{k_n^{3/4}} + \frac{(\ln m_n)^{5/4}}{m_n^{3/4}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 1.4, есть обобщение результата из [15] на случай, когда урезающие проценти́ли зависят от n .

Следствие 1.4. Предположим, что $0 < a_1 < b_2 < 1$, где a_1, b_2 определены как в (1.6), условие $[A_1]$ выполнено и плотность f удовлетворяет условию Гёльдера степени $d > 0$ на множествах $F^{-1}(U_a)$ и $F^{-1}(U_b)$, где U_a и U_b те же, что и в (1.7). Тогда

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n}(x) - G_n(x)| = o(n^{-1/2-p}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.30)$$

для любого $p < \min(1/4, d/2)$.

Теперь мы сформулируем результаты о разложениях типа Эджворта для студентизованных (слабо) усеченных средних.

Определим эмпирическую квантильную функцию $\hat{Q}_n(u) = X_{k_n:n} \vee F_n^{-1}(u) \wedge X_{n-m_n:n}$ и оценки подстановки для $\mu_{W(n)}$ и $\sigma_{W(n)}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{W(n)} &= \int_0^1 \hat{Q}_n(u) du = \frac{k_n}{n} X_{k_n:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} + \frac{m_n}{n} X_{n-m_n:n}, \\ \hat{\sigma}_{W(n)}^2 &= \int_0^1 (\hat{Q}_n(u) - \hat{\mu}_{W(n)})^2 du \\ &= \frac{k_n}{n} X_{k_n:n}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n}^2 + \frac{m_n}{n} X_{n-m_n:n}^2 - \hat{\mu}_{W(n)}^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Определим функцию распределения студентизованного усеченного среднего $F_{T_n, S}(x) = \mathbf{P}(\sqrt{n}(T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)) / \hat{\sigma}_{W(n)} \leq x)$. Мы доказываем, что разложение Эджворта для $F_{T_n, S}(x)$ дается формулой

$$H_n(x) = \Phi(x) + \frac{\phi(x)}{6\sqrt{n}} \left((2x^2 + 1)\lambda_{1(n)} + 3(x^2 + 1)\lambda_{2(n)} - 6\sqrt{n} \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} \right), \quad (1.32)$$

где смещение b_n то же, что в (1.25). Определим величину

$$\Delta_{n,S} = \sum_{i=1}^5 \delta_i(n), \quad (1.33)$$

где, если $B > 0$ — некоторая постоянная,

$$\begin{aligned} \delta_1(n) &= \frac{\alpha_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{\alpha_n})} \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{3/4} + \frac{\beta_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)} f(\xi_{1-\beta_n})} \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{3/4}, \\ \delta_2(n) &= B \left[\ln k_n \left(q_{\alpha_n}^2 + \frac{\alpha_n^2}{n \sigma_{W(n)}^2} \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}^2(B) \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln m_n \left(q_{\beta_n}^2 + \frac{\beta_n^2}{n \sigma_{W(n)}^2} \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}^2(B) \right) \right], \\ \delta_3(n) &= \frac{\alpha_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)}} \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{1/2} + \frac{\beta_n^{3/2}}{\sigma_{W(n)}} \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{1/2}, \\ \delta_4(n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} + \frac{1}{\sqrt{m_n}} \right) \left[\frac{\alpha_n^{3/2} \ln k_n}{f(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}} + \frac{\beta_n^{3/2} \ln m_n}{f(\xi_{1-\beta_n}) \sigma_{W(n)}} \right], \\ \delta_5(n) &= \frac{\xi_{\alpha_n}^2 \ln k_n + \xi_{1-\beta_n}^2 \ln m_n}{n \sigma_{W(n)}^2} = O \left(\frac{\ln k_n}{k_n} + \frac{\ln m_n}{m_n} \right). \end{aligned}$$

Величина $\Delta_{n,S}$ будет определять порядок остаточного члена в стохастической аппроксимации разности $\hat{\sigma}_{W(n)}^2 / \sigma_{W(n)}^2 - 1$ суммой независимых случайных величин (см. лемму 2.2).

Обозначим δ_n величину, стоящую в правой части соотношения (1.28) в теореме 1.4. Теперь мы можем сформулировать результат для студентизованного (слабо) усеченного среднего.

Теорема 1.6. *Предположим, что условия $[A_1]$, $[A_2]$ и $[A_3]$ выполнены. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n, S}(x) - H_n(x)| \leq C(\delta_n + \delta_{n,S}), \quad (1.34)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n , и $\delta_{n,S} = \Delta_{n,S} + \sum_{i=1}^2 \delta_{i,S}(n)$, где $\Delta_{n,S}$ — величина, определенная в (1.33),

$$\begin{aligned} \delta_{1,S}(n) &= \ln k_n \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} q_{\alpha_n} + \frac{1}{k_n} \right) + \ln m_n \left(\frac{1}{\sqrt{m_n}} q_{\beta_n} + \frac{1}{m_n} \right), \\ \delta_{2,S}(n) &= (\ln k_n)^2 q_{\alpha_n}^3 + (\ln m_n)^2 q_{\beta_n}^3 + \ln k_n \ln m_n q_{\alpha_n} q_{\beta_n} (q_{\alpha_n} + q_{\beta_n}). \end{aligned}$$

Следующее утверждение есть аналог следствия 1.3 для студентизованной статистики T_n .

Следствие 1.5. *Предположим, что условия следствия 1.3 выполнены. Тогда в правой части (1.34) мы имеем оценку порядка $O((\ln k_n)^{5/4}/k_n^{3/4} + (\ln m_n)^{5/4}/m_n^{3/4})$, $n \rightarrow \infty$.*

Теперь сформулируем результат для студентизованного слабо усеченного среднего T_n , параллельный теореме 1.5.

Теорема 1.7. *Предположим, что $\alpha_n \vee \beta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, условия $[A_1]$ и $[L]$ выполнены и плотность удовлетворяет условию $[R]$ с $0 < \gamma < 2$. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{T_n, S}(x) - H_n(x)| = O\left(\frac{(\ln k_n)^{5/4}}{k_n^{3/4}} + \frac{(\ln m_n)^{5/4}}{m_n^{3/4}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

З а м е ч а н и е 1.2. Мы предполагаем, что соотношения (1.29) и (1.35) останутся справедливыми и в отсутствие предположения $[L]$. Последнее условие используется только при оценке $\delta_{2,n}(\varepsilon)$ в правой части (1.28) (и в правой части (1.34), куда оно автоматически входит как составная часть δ_n в случае студентизованной статистики T_n). Это $\varepsilon > 0$ появляется в выражении для $\delta_{2,n}(\varepsilon)$ (и для его двойника в (1.34)) из-за присутствия аналогичного члена, зависящего от $\varepsilon > 0$, в работе [3]. Авторы работы [3], однако, также предполагают в их замечании 1.3, что присутствие в их оценке положительного ε на самом деле избыточно (по крайней мере, в случае U -статистик), т.е. при $\varepsilon = 0$ их оценка будет оставаться справедливой. Без условия $[L]$ величина $O((n/k_n)^{3\varepsilon/2}/k_n + (n/m_n)^{3\varepsilon/2}/m_n)$, появляющаяся при оценке $\delta_{2,n}(\varepsilon)$ (см. доказательство следствия 1.3 и теоремы 1.5) в правой части (1.28), может оказаться большой, однако она растворяется в правых частях (1.29) и (1.35) в случае, если условие $[L]$ выполнено.

Завершая этот пункт, упомянем классическую работу В. ван Цвета [27], в которой получены оценки типа Берри-Эссеена для симметричных статистик, классу которых принадлежат, в частности, и (слабо) усеченные средние. В качестве следствия основного результата в [27] найдены оценки порядка $n^{-1/2}$ для L -статистик с гладкой весовой функцией (гладкости нет в случае усеченного среднего) и при условии существования конечного второго момента. Упомянем также [7], где используется метод Штейна, и статью [2], в которой получены оптимальные результаты по скорости сходимости в центральной предельной теореме для U -статистик произвольной степени $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. Имеется также интересная работа [22] по слабо усеченным суммам, в которой данные являются не независимыми одинаково распределенными наблюдениями, а линейным процессом с длительным диапазоном зависимости.

2. Стохастическая аппроксимация U -статистиками. В настоящем пункте мы будем аппроксимировать T_n подходящей U -статистикой степени 2 и величину $\hat{\sigma}_{W(n)}^2 / \sigma_{W(n)}^2 - 1$ суммой независимых случайных величин. Это позволит нам получить неравенства типа Берри-Эссеена и разложения типа Эджворта для статистики T_n и ее студентизованной версии путем применения известных результатов

этого типа для U -статистик степени 2 (см., например, статьи [1]–[4], [12], [19], [25], [27], в которых получены соответствующие результаты по аппроксимации второго порядка для U -статистик). Этот метод доказательства хорошо известен в литературе, имеется много работ, в которых используется данный подход (см., например [3]). Однако в качестве приближающей U -статистики в этих работах используются две первые группы слагаемых разложения Хёфдинга: линейная и квадратичная. Примером того может служить также работа Х.Путтера и В.ван Цвета [25], в которой этот метод приближения применяется для «гладких» симметричных статистик. В нашем «негладком» случае использование U -статистики, являющейся частью разложения Хёфдинга, оказывается неудобным из-за сложной интегральной формы L_2 -проекций порядковых статистик (см. [25]).

Предлагаемая нами U -статистическая аппроксимация является новой, она использует уинсоризацию исходных наблюдений и специальные имеющие форму статистик фон Мизеса представления типа Бахадура–Кифера для (крайних) выборочных квантилей, полученные в [17]. Следствием такого подхода является то, что наши аппроксимации имеют порядок остаточного члена бахадуровского типа, т.е. показатель степени, равный $-3/4$ (ср. (1.29) и (1.35)).

Положим $\mathbf{1}_\nu(X_i) = \mathbf{1}_{\{X_i \leq \xi_\nu\}}$, где $\xi_\nu = F^{-1}(\nu)$, $0 < \nu < 1$, и $\mathbf{1}_A$ — индикатор события A . Определим U -статистику степени 2 с ядром, зависящим от n :

$$L_n + U_n = \sum_{i=1}^n L_{n,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{n,(i,j)}, \quad (2.1)$$

где

$$L_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}} (W_i(n) - \mu_{W(n)}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[X_i \mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_i) (1 - \mathbf{1}_{\alpha_n}(X_i)) + \xi_{\alpha_n} \mathbf{1}_{\alpha_n}(X_i) + \xi_{1-\beta_n} (1 - \mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_i)) - \mu_{W(n)} \right], \quad (2.2)$$

$W_i(n)$ и $\mu_{W(n)}$ определены в (1.3) и (1.5) соответственно и

$$U_{n,(i,j)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \left[-\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} (\mathbf{1}_{\alpha_n}(X_i) - \alpha_n)(\mathbf{1}_{\alpha_n}(X_j) - \alpha_n) + \frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} (\mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_i) - (1 - \beta_n))(\mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_j) - (1 - \beta_n)) \right]. \quad (2.3)$$

Заметим, что

$$\mathbf{E} L_{n,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} U_{n,(i,j)} = 0, \quad \mathbf{E} (L_{n,i} U_{n,(i,j)}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (i \neq j). \quad (2.5)$$

Используя (2.1)–(2.5), мы легко находим, что $\mathbf{E}(L_n + U_n)^2 = \sigma_{W(n)}^2 + \mathbf{E}(U_n^2)$, где $\sigma_{W(n)}^2$ определено в (1.5), и

$$\mathbf{E} U_n^2 = \frac{n-1}{2n^2} \mathbf{E} (n^{3/2} U_{n,(1,2)})^2 \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n^2}{f^2(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n^2}{f^2(\xi_{1-\beta_n})} \right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} \left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} \right)^2 = 1 + \varepsilon_n, \quad (2.6)$$

где $0 < \varepsilon_n \leq q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2$ (см. (1.8)) и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если условие $[A_2]$ выполнено.

Для третьего момента имеем

$$\mathbf{E} \left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} \right)^3 = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_{1,n} + 3\sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E}(L_n^2 U_n) + 3\sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E}(L_n U_n^2) + \sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E} U_n^3, \quad (2.7)$$

где $\lambda_{1,n}$ определено в (1.24). Для второго слагаемого в правой части (2.7) мы получаем $3\sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E}(L_n^2 U_n) = 3n(n-1)\sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E}(L_{n,1} L_{n,2} U_{n,(1,2)})$, что равно

$$\begin{aligned} & 3\sigma_{W(n)}^{-3} \frac{n-1}{n\sqrt{n}} \left[-\frac{(\alpha_n(\xi_{\alpha_n} - \mu_{W(n)}))^2}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{(\beta_n(\xi_{1-\beta_n} - \mu_{W(n)}))^2}{f(\xi_{1-\beta_n})} \right] \\ &= 3 \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_{2,n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 3 \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_{2,n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\lambda_{2,n}$ определено в (1.24). Последнее равенство в (2.8) справедливо, поскольку в силу (1.9) существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\sqrt{n}} |\lambda_{2,n}| &\leq \frac{C}{n} \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}\sigma_{W(n)} f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n}{\sqrt{n}\sigma_{W(n)} f(\xi_{1-\beta_n})} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{n}(q_{\alpha_n} + q_{\beta_n})\right) = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Используя соотношения (2.2)–(2.5), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sigma_{W(n)}^3} \mathbf{E}(L_n U_n^2) &= \frac{3(n-1)}{\sigma_{W(n)}^3 n^2 \sqrt{n}} \left[\frac{\alpha_n^2 (\xi_{\alpha_n} - \mu_{W(n)}) (1 - \alpha_n) (1 - 2\alpha_n)}{f^2(\xi_{\alpha_n})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha_n^2 \beta_n^2 [(\xi_{\alpha_n} - \mu_{W(n)}) + (\xi_{1-\beta_n} - \mu_{W(n)})]}{f(\xi_{\alpha_n}) f(\xi_{1-\beta_n})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_n^2 (\xi_{1-\beta_n} - \mu_{W(n)}) (1 - \beta_n) (1 - 2\beta_n)}{f^2(\xi_{1-\beta_n})} \right], \end{aligned}$$

и в силу соотношения (1.9) последняя величина имеет порядок $O(q_{\alpha_n}^2/\sqrt{k_n} + q_{\beta_n}^2/1\sqrt{m_n} + q_{\alpha_n} q_{\beta_n} \alpha_n \beta_n (1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n}))$. Наконец, для

четвертого слагаемого в правой части (2.7) мы имеем

$$\sigma_{W(n)}^{-3} \mathbf{E} U_n^3 = \sigma_{W(n)}^{-3} \frac{(n-1)}{2n^3 \sqrt{n}} \mathbf{E} (n\sqrt{n} U_{n,(1,2)}^3),$$

и после простых вычислений получаем, что последняя величина по модулю не превосходит

$$\sigma_{W(n)}^{-3} \frac{1}{2n^2 \sqrt{n}} \left[\frac{\alpha_n^2}{f^3(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n^2}{f^3(\xi_{1-\beta_n})} + 3 \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{f^2(\xi_{\alpha_n}) f(\xi_{1-\beta_n})} + 3 \frac{\alpha_n^2 \beta_n^2}{f(\xi_{\alpha_n}) f^2(\xi_{1-\beta_n})} \right] = r_1 + r_2,$$

где $r_1 = (q_{\alpha_n}^3/k_n + q_{\beta_n}^3/m_n)/2$ и $r_2 = (3/(2n))q_{\alpha_n}q_{\beta_n}(\beta_n q_{\alpha_n} + \alpha_n q_{\beta_n})$. Следовательно, в условиях $[A_1]$, $[A_2]$ мы имеем $r_1 = o(q_{\alpha_n}^2/\sqrt{k_n} + q_{\beta_n}^2/\sqrt{m_n})$ и $r_2 = o((q_{\alpha_n} + q_{\beta_n})/n) = o(1/n)$, и можно заключить, что четвертое слагаемое в правой части (2.7) имеет пренебрежимый порядок малости для наших целей.

Из наших вычислений непосредственно вытекает, что

$$\mathbf{E} \left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} \right)^3 = \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_{1,n} + 3\lambda_{2,n}) + R_n, \quad (2.9)$$

где $R_n = O(q_{\alpha_n}^2/\sqrt{k_n} + q_{\beta_n}^2/\sqrt{m_n} + \alpha_n \beta_n q_{\alpha_n} q_{\beta_n} (1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n}))$.

Следующая лемма дает оценку точности аппроксимации T_n суммой U -статистики с переменным ядром вида (2.1) с нулевым средним и смещения b_n .

Лемма 2.1. *Предположим, что выполнены условия $[A_1]$ и $[A_2]$. Тогда*

$$\mathbf{P}(|n^{1/2}(T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)) - (L_n + U_n + b_n)| > \Delta_n) = O(r_n^{-c}) \quad (2.10)$$

для любого $c > 0$, где b_n определено в (1.25), $\Delta_n = A(\Delta_{\alpha,n} + \Delta_{\beta,n})$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,n} &= \alpha_n \frac{\ln k_n}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{1/4} + \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) \right], \\ \Delta_{\beta,n} &= \beta_n \frac{\ln m_n}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{1/4} + \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

а постоянные $A, B > 0$ зависят только от c .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим биномиальную случайную величину $N_\nu = \#\{i: X_i \leq \xi_\nu\}$, $0 < \nu < 1$, и заметим, что

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i(n) = \frac{N_{\alpha_n}}{n} \xi_{\alpha_n} + \frac{1}{n} \sum_{i=N_{\alpha_n}+1}^{N_{1-\beta_n}} X_{i:n} + \frac{n - N_{1-\beta_n}}{n} \xi_{1-\beta_n}. \quad (2.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n) - [W_n - \mathbf{E} W_n] \\ = \frac{1}{n} \left[\operatorname{sgn}(N_{\alpha_n} - k_n) \sum_{i=(k_n \wedge N_{\alpha_n})+1}^{N_{\alpha_n} \vee k_n} (X_{i:n} - \xi_{\alpha_n}) \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(N_{1-\beta_n} - (n - m_n)) \sum_{i=((n-m_n) \wedge N_{1-\beta_n})+1}^{N_{1-\beta_n} \vee (n-m_n)} (X_{i:n} - \xi_{1-\beta_n}) \right], \quad (2.13) \end{aligned}$$

где $\operatorname{sgn} s = s/|s|$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, и по теореме 2.2 из [17], применяемой с функцией $G(x) = x$ (см. также доказательство теоремы 2.2 [17]), последняя величина равна

$$- \frac{(N_{\alpha_n} - \alpha_n n)^2}{2n^2} \frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{(N_{1-\beta_n} - (1 - \beta_n)n)^2}{2n^2} \frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} + R_n, \quad (2.14)$$

где $\mathbf{P}(|R_n| > A(\Delta_{\alpha,n} + \Delta_{\beta,n})/\sqrt{n}) = O(r_n^{-c})$ и $\Delta_{\alpha,n}$, $\Delta_{\beta,n}$ определены в (2.11). Соотношения (2.1)–(2.3) и (2.13)–(2.14) влекут за собой

$$\begin{aligned} n^{1/2}(T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)) \\ = L_n + U_n - \frac{1}{2n\sqrt{n}} \left[\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{\alpha_n}(X_i) - \alpha_n)^2 \right] \\ + \frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_i) - (1 - \beta_n))^2 + n^{1/2} R_n \\ = L_n + U_n + b_n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \bar{r}_n + n^{1/2} R_n, \quad (2.15) \end{aligned}$$

где b_n то же, что в (1.25), и $\bar{r}_n = -\bar{r}_{n,1}/f(\xi_{\alpha_n}) + \bar{r}_{n,2}/f(\xi_{1-\beta_n})$,

$$\begin{aligned} \bar{r}_{n,1} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{1}_{\alpha_n}(X_i) - \alpha_n)^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \right], \\ \bar{r}_{n,2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_i) - (1 - \beta_n))^2 - \beta_n(1 - \beta_n) \right]. \end{aligned}$$

Мы рассмотрим только $\bar{r}_{n,1}$, оценки для $\bar{r}_{n,2}$ получаются аналогично. Заметим, что $\bar{r}_{n,1}$ является средним независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин: $\bar{r}_{n,1} = S_{n,1}/n$, где $S_{n,1} = \sum_{k=1}^n Y_k$, $\mathbf{E} Y_k = 0$ и $B_n = \mathbf{D} S_{n,1} = n\sigma_1^2$ с $\sigma_1^2 = \mathbf{E} Y_1^2 = \alpha_n(1 - \alpha_n)[1 - 2\alpha_n]^2$. Более того, для каждого натурального $m \geq 2$ мы имеем

$$\mathbf{E} Y_1^m = \sigma_1^2 [1 - 2\alpha_n]^{m-2} [(1 - \alpha_n)^{m-1} + (-1)^m \alpha_n^{m-1}],$$

и, следовательно, $|\mathbf{E} Y_1^m| \leq \sigma_1^2$. Тогда, применяя экспоненциальные оценки (см. [24, гл. 3, теорема 17 с $H = 1$]), мы получаем

$$\mathbf{P}(|S_{n,1}| \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4B_n}\right) \quad (2.16)$$

для каждого $0 \leq x \leq B_n$. Возьмем $x = A(n \ln k_n \alpha_n (1 - \alpha_n))^{1/2} |1 - 2\alpha_n|$. Если $\alpha = 1/2$ не является частичным пределом последовательности α_n , мы можем легко видеть, что $0 \leq x \leq B_n$ для всех достаточно больших n . В противном случае заметим, что можно рассматривать только те случаи, когда $\delta_n = |\alpha_n - 1/2| > A_1((\ln k_n)/k_n)^{1/2}$ с некоторым $A_1 > 0$, которое мы выберем позднее. Действительно, если это не так, то мы можем написать: $\bar{r}_{n,1} = 1/n \sum_{i=1}^n [(1/2 + \delta_{n,i})^2 - (1/2 - \delta_n)(1/2 + \delta_n)]$, где $\delta_{n,i} = (-1)^{1_{\alpha_n}(X_i)}(\alpha_n - 1/2)$, $|\delta_{n,i}| = \delta_n$, и $|\bar{r}_{n,1}| \leq \delta_n(1 + 2\delta_n) = O((\ln k_n)/k_n)^{1/2}$. Поскольку $\xi_{1/2} \in U_a \cup U_b$ при условии $[A_1]$, мы имеем $f(x) \geq f_0 > 0$ в некоторой окрестности $\xi_{1/2}$, тогда $\bar{r}_{n,1}/f(\xi_{\alpha_n}) = O((\ln k_n)/k_n)^{1/2}$, и, следовательно, мы получаем $|\bar{r}_{n,1}|/2\sqrt{n} = o(\Delta_n)$ (см. (2.15)).

В случае $\delta_n > A((\ln k_n)/k_n)^{1/2}$ легко проверить, что $x < B_n$ для всех достаточно больших n , если A_1 выбрано таким, что $A_1 > A(1 - a_2)^{-1/2}$, и в силу (2.16) получаем

$$\mathbf{P}\left(|\bar{r}_{n,1}| \geq A \frac{1}{\sqrt{n}} |1 - 2\alpha_n| (\ln k_n \alpha_n (1 - \alpha_n))^{1/2}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{4} A^2 \ln k_n\right),$$

последняя величина имеет порядок $O(k_n^{-c})$, когда $A^2 > 4c$. Таким образом,

$$\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} |\bar{r}_{n,1}| \leq A \frac{(\ln k_n)^{1/2} \alpha_n}{\sqrt{n} f(\xi_{\alpha_n}) \alpha_n^{1/2}} = A \alpha_n \left(\frac{\ln k_n}{k_n}\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \bar{r}_{n,1} = o(\Delta_n)$$

(см. (2.11) и (2.15)). Лемма доказана.

Мы завершаем этот раздел леммой, которую можно считать обобщением леммы 5.1 из [14] на случай, когда α_n, β_n не фиксированы, как в [14], а являются последовательностями, которые могут стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2.2. *Предположим, что условия $[A_1]$ и $[A_2]$ выполнены. Тогда для любого $c > 0$*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\hat{\sigma}_{W(n)}^2}{\sigma_{W(n)}^2} - 1 - \frac{V_n}{\sigma_{W(n)}^2}\right| > A\Delta_{n,S}\right) = O(r_n^{-c}), \quad (2.17)$$

где $\Delta_{n,S}$ определено в (1.33),

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n,1} + V_{n,2}, \\ V_{n,1} &= 2 \frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} (\mu_{W(n)} - \xi_{\alpha_n}) \\ &\quad + 2 \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \frac{N_{1-\beta_n} - (1 - \beta_n)n}{n} (\mu_{W(n)} - \xi_{1-\beta_n}), \\ V_{n,2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(W_i(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$A, B > 0$ (B — константа, появляющаяся в $\delta_i(n)$, $i = 2, 3$) — некоторые постоянные, не зависящие от n . Кроме того,

$$\mathbf{E} V_n = 0, \quad \mathbf{E} \left(\frac{V_n}{\sigma_{W(n)}^2} \right)^2 = O \left(\frac{(\mathbf{E} (W_1(n))^4}{n \sigma_{W(n)}^4} + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2 \right). \quad (2.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что соотношения (2.19) следуют непосредственно из определения величин $V_{n,i}$, $i = 1, 2$ (см. (2.18)), и из (1.9).

Чтобы доказать (2.17), зафиксируем произвольное $c > 0$ и определим вспомогательную величину $S_{W(n)}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_i^2(n) - \bar{W}^2(n)$, где $\bar{W}(n) = n^{-1} \sum W_i(n)$. Сначала мы докажем, что

$$\hat{\sigma}_{W(n)}^2 = S_{W(n)}^2 + V_{n,1} + R_{n,1}, \quad (2.20)$$

где

$$\mathbf{P} \left(\frac{|R_{n,1}|}{\sigma_{W(n)}^2} > A_1 \Delta_{n,S} \right) = O(r_n^{-c}). \quad (2.21)$$

Здесь и далее $A, A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, обозначают постоянные, не зависящие от n . Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{W(n)}^2 - S_{W(n)}^2 = & \left[\frac{k_n}{n} X_{k_n:n}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n}^2 + \frac{m_n}{n} X_{n-m_n:n}^2 \right. \\ & \left. - \frac{N_{\alpha_n}}{n} \xi_{\alpha_n}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=N_{\alpha_n}+1}^{N_{1-\beta_n}} X_{i:n}^2 - \frac{n - N_{1-\beta_n}}{n} \xi_{1-\beta_n}^2 \right] \\ & + \left[\left(\frac{N_{\alpha_n}}{n} \xi_{\alpha_n} + \frac{1}{n} \sum_{i=N_{\alpha_n}+1}^{N_{1-\beta_n}} X_{i:n} + \frac{n - N_{1-\beta_n}}{n} \xi_{1-\beta_n} \right)^2 \right. \\ & \left. - \left(\frac{k_n}{n} X_{k_n:n} + \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} + \frac{m_n}{n} X_{n-m_n:n} \right)^2 \right]. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Выражение в первых квадратных скобках в правой части (2.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{k_n}{n} (X_{k_n:n}^2 - \xi_{\alpha_n}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{sgn}(N_{\alpha_n} - k_n) \sum_{i=(k_n \wedge N_{\alpha_n})+1}^{k_n \vee N_{\alpha_n}} (X_{i:n}^2 - \xi_{\alpha_n}^2) \\ & + \frac{m_n}{n} (X_{n-m_n:n}^2 - \xi_{1-\beta_n}^2) \\ & - \frac{1}{n} \operatorname{sgn}(N_{1-\beta_n} - (n - m_n)) \sum_{i=(N_{1-\beta_n} \wedge (n-m_n))+1}^{(n-m_n) \vee N_{1-\beta_n}} (X_{i:n}^2 - \xi_{1-\beta_n}^2), \quad (2.23) \end{aligned}$$

и по теоремам 2.1 и 2.2 из [17], применяемым с функцией $G(x) = x^2$, величина (2.23) оказывается равной

$$\begin{aligned} & -2\alpha_n \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} \frac{\xi_{\alpha_n}}{f(\xi_{\alpha_n})} - \frac{(N_{\alpha_n} - \alpha_n n)^2}{n^2} \frac{\xi_{\alpha_n}}{f(\xi_{\alpha_n})} \\ & - 2\beta_n \frac{N_{1-\beta_n} - (1-\beta_n)n}{n} \frac{\xi_{1-\beta_n}}{f(\xi_{1-\beta_n})} \\ & + \frac{(N_{1-\beta_n} - (1-\beta_n)n)^2}{n^2} \frac{\xi_{1-\beta_n}}{f(\xi_{1-\beta_n})} + R_{n,1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $R_{n,1}^{(1)}$ — остаточный член, появляющийся в результате применения теоремы 2.1 из [17] дважды: в первом и третьем слагаемых (2.23). Используя соотношение 2.4 из [17], (1.9) и неравенства (1.11), мы получаем, что $|R_{n,1}^{(1)}|/\sigma_{W(n)}^2 = O(\delta_1(n) + \delta_2(n) + \delta_3(n))$ с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$, где $\delta_2(n)$, $\delta_3(n)$ включают в себя $B > 0$, которое зависит от c , но не зависит от n . Заметим, что остаточный член, появляющийся здесь в результате применения теоремы 2.2 из [17] к суммам в соотношении (2.23), пренебрежимо мал по порядку по сравнению с остаточным членом, появляющимся в результате применения теоремы 2.1 из [17], и он является составной частью $R_{n,1}^{(1)}$. Кроме того, по неравенству Бернштейна и соотношению (1.9) мы находим, что

$$\frac{(N_{\alpha_n} - \alpha_n n)^2}{n^2 \sigma_{W(n)}^2} |\xi_{\alpha_n}| \frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} = O\left(\frac{\alpha_n^{1/2} \ln k_n}{n \sigma_{W(n)}} \frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})}\right)$$

с вероятностью $1 - O(k_n^{-c})$, и эта величина есть $o(\delta_1(n))$, то же справедливо и для второго квадратичного слагаемого в (2.24). Таким образом, величина (2.24) равна

$$-2\alpha_n \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} \frac{\xi_{\alpha_n}}{f(\xi_{\alpha_n})} - 2\beta_n \frac{N_{1-\beta_n} - (1-\beta_n)n}{n} \frac{\xi_{1-\beta_n}}{f(\xi_{1-\beta_n})} + R_{n,1}^{(1)}. \quad (2.25)$$

Теперь рассмотрим выражение, стоящее во вторых квадратных скобках в правой части (2.22). Рассуждая как прежде, мы можем записать его в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} + \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \frac{N_{1-\beta_n} - (1-\beta_n)n}{n} + R_{n,1}^{(2)} \right) \\ & \times \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n W_i(n) - \frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} \right. \\ & \left. - \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \frac{N_{1-\beta_n} - (1-\beta_n)n}{n} - R_{n,1}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где по теореме 2.1 из [17]

$$|R_{n,1}^{(2)}| \leq A_1 \left\{ \alpha_n^2 \left[\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{3/4} + \Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) \left(\frac{\ln k_n}{k_n} \right)^{1/2} \right] \right. \\ \left. + \beta_n^2 \left[\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{3/4} + \Psi_{\beta_n, 1/f(x)}(B) \left(\frac{\ln m_n}{m_n} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$. Квадратичный и остаточный члены, появляющиеся как результат применения теоремы 2.2 из [17], снова пренебрежимо малы по порядку и включены в $R_{n,1}^{(2)}$. Простые вычисления, использующие (2.22), (2.25), (2.26), неравенство Бернштейна и (1.9), приводят к следующему соотношению:

$$\frac{\hat{\sigma}_{W(n)}^2}{\sigma_{W(n)}^2} - \frac{S_{W(n)}^2}{\sigma_{W(n)}^2} = \frac{V_{n,1}}{\sigma_{W(n)}^2} + O(\delta_1(n) + \delta_2(n) + \delta_3(n)) + \frac{R_{n,1}^{(3)}}{\sigma_{W(n)}^2}, \quad (2.27)$$

где

$$R_{n,1}^{(3)} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (W_i(n) - \mu_{W(n)}) \left[\frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n})} \frac{N_{\alpha_n} - \alpha_n n}{n} \right. \\ \left. + \frac{\beta_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \frac{N_{1-\beta_n} - (1 - \beta_n)n}{n} \right].$$

Поскольку по неравенству Хёфдинга для сумм независимых одинаково распределенных центрированных ограниченных случайных величин (см. [21]) $|\sum_{i=1}^n (W_i(n) - \mu_{W(n)})| \leq A_2 \ln^{1/2}(k_n \wedge m_n)(\xi_{1-\beta_n} - \xi_{\alpha_n})n^{1/2}$ с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$, где $A_2 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от c и не зависящая от n , используя последнюю оценку, неравенство Бернштейна и (1.9), в результате простых вычислений мы получаем

$$\left| \frac{R_{n,1}^{(3)}}{\sigma_{W(n)}^2} \right| \leq A_2 \frac{|\xi_{\alpha_n}| + |\xi_{1-\beta_n}|}{n \sigma_{W(n)}^2} \left[\frac{\alpha_n^{3/2} \ln k_n}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n^{3/2} \ln m_n}{f(\xi_{1-\beta_n})} \right] = O(\delta_4(n)) \quad (2.28)$$

с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$, откуда следуют соотношения (2.20) и (2.21).

Осталось показать, что

$$S_{W(n)}^2 = \sigma_{W(n)}^2 + V_{n,2} + R_{n,2}, \quad (2.29)$$

где $R_{n,2}$ удовлетворяет (2.21). Имеем

$$S_{W(n)}^2 - \sigma_{W(n)}^2 - V_{n,2} = S_{W(n)}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i(n) - \mu_{W(n)})^2 = -(\overline{W}(n) - \mu_{W(n)})^2, \quad (2.30)$$

и применяя еще раз неравенство Хёфдинга, мы получаем, что величина в правой части (2.30), деленная на $\sigma_{W(n)}^2$, по абсолютной величине имеет порядок $((\ln k_n \wedge \ln m_n)/(n \sigma_{W(n)}^2))(\xi_{1-\beta_n} - \xi_{\alpha_n})^2 = O(\delta_5(n))$ с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$, откуда следует (2.29). Лемма доказана.

3. Доказательства. В этом пункте мы доказываем результаты, сформулированные в п. 1.

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 2.1 мы можем написать $n^{1/2}(T_n - \mu(\alpha_n, 1 - \beta_n)) = L_n + U_n + b_n + R_n$, где $L_n + U_n$ есть U -статистика степени 2 (см. (2.1)), b_n то же, что в (1.25), R_n — остаточный член (см. (2.10)). Определим функцию распределения нормированной U -статистики: $F_{U,n}(x) = \mathbf{P}((L_n + U_n)/\sigma_{W(n)} \leq x)$.

Поскольку $|b_n|/\sigma_{W(n)} \leq (q_{\alpha_n} + q_{\beta_n})/2 = \delta_{2,n}/2\sqrt{n}$ (где $\delta_{2,n}$ — величина, определенная в (1.16)), справедливы следующие неравенства:

$$F_{U,n}(x - \delta_n) - \mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n) \leq F_{T_n}(x) \leq F_{U,n}(x + \delta_n) + \mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n), \quad (3.1)$$

где $\delta_n = \Delta_n/\sigma_{W(n)} + \delta_{2,n}/2\sqrt{n}$, Δ_n то же, что в (2.10), и по лемме 2.1 $\mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n) = O(r_n^{-c})$ для любого $c > 0$.

Для $F_{U,n}(x \pm \delta_n)$ мы можем написать

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{U,n}(x \pm \delta_n) - \Phi(x)| \leq \Delta_{n,1} + \Delta_{n,2}, \quad (3.2)$$

где

$$\Delta_{n,1} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{U,n}(x) - \Phi(x)|, \quad \Delta_{n,2} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\Phi(x \pm \delta_n) - \Phi(x)|. \quad (3.3)$$

Чтобы оценить $\Delta_{n,1}$, применим неравенство Берри–Эссеена для U -статистик (см. [12]):

$$\Delta_{n,1} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left[\frac{\mathbf{E} |W_1(n)|^3}{\sigma_{W(n)}^3} + \frac{\mathbf{E} |n\sqrt{n}U_{n,(1,2)}|^{5/3}}{\sigma_{W(n)}^{5/3}} \right], \quad (3.4)$$

где $C > 0$ есть абсолютная постоянная. Используя формулу (2.3), легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |n\sqrt{n}U_{n,(1,2)}|^{5/3} &\leq 2^{2/3} \left[\left(\frac{1}{f(\xi_{\alpha_n})} \right)^{5/3} (\mathbf{E} |1_{\alpha_n}(X_1) - \alpha_n|^{5/3})^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{f(\xi_{1-\beta_n})} \right)^{5/3} (\mathbf{E} |1_{1-\beta_n}(X_1) - (1 - \beta_n)|^{5/3})^2 \right] \\ &\leq 2^{4/3} \left[\frac{(\alpha_n(1 - \alpha_n))^2}{f^{5/3}(\xi_{\alpha_n})} + \frac{(\beta_n(1 - \beta_n))^2}{f^{5/3}(\xi_{1-\beta_n})} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.4), (3.5) следует, что

$$\Delta_{n,1} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} (\delta_{1,n} + \delta_{3,n}), \quad (3.6)$$

где $C_1 > 0$ есть некоторая абсолютная постоянная.

Остается оценить $\Delta_{n,2}$. Заметим, что $\Delta_n/\sigma_{W(n)} = (o(\delta_{2,n}) + \delta_{4,n})$ (см. (1.16) и (2.10)), поэтому $\delta_n = (\delta_{2,n}(1/2 + o(1)) + \delta_{4,n})/\sqrt{n}$, и мы получаем

$$\Delta_{n,2} \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}} (\delta_{2,n} + \delta_{4,n}), \quad (3.7)$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от c (см. лемму 2.1). Соотношения (3.1), (3.2), (3.6), (3.7) влекут за собой (1.16). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Мы получим эту теорему как следствие теоремы 1.1. Применим (1.16) с $c = 1/2$. Чтобы доказать (1.18), надо проверить, что при условиях $[A_1]$, $[A'_2]$ и $[A'_3]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{i,n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} + \frac{1}{\sqrt{m_n}}\right), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Для $i = 1$ мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{1,n} = \frac{\alpha_n |\xi_{\alpha_n}|^3 + \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} |F^{-1}(u)|^3 du + \beta_n |\xi_{1-\beta_n}|^3}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}^3}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим три слагаемых в правой части (3.8). Для первого из них мы имеем $\alpha_n |\xi_{\alpha_n}|^3 / \sqrt{n} \sigma_{W(n)}^3 = (1/\sqrt{k_n})(\alpha_n^{1/2} |\xi_{\alpha_n}| / \sigma_{W(n)})^3$, и по (1.9) это есть величина порядка $O(1/\sqrt{k_n})$, поскольку $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{W(n)}^3 > 0$ при условии $[A_1]$, когда $a_2 < b_1$. Аналогично для третьего слагаемого мы получаем оценку порядка $O(1/\sqrt{m_n})$, тогда как для второго слагаемого мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}^3} \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} |F^{-1}(u)|^3 du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{|\xi_{\alpha_n}| \vee |\xi_{1-\beta_n}|}{\sigma_{W(n)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} + \frac{1}{\sqrt{m_n}}\right),$$

следовательно, для $\delta_{1,n}$ требуемая оценка справедлива. Для $\delta_{2,n}$ эта оценка следует непосредственно из (1.17). Для первого слагаемого $\delta_{3,n}$ в силу (1.17) мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n^{1/3} \left(\frac{\alpha_n}{f(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}} \right)^{5/3} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \alpha_n^{1/3} (\alpha_n^{-1/2})^{5/3} \leq \frac{C}{\sqrt{k_n}},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n (см (1.17)), и для второго слагаемого $\delta_{3,n}$ мы аналогичным образом получаем оценку $O(1/\sqrt{m_n})$. Наконец, для $\delta_{4,n}$ условия $[A'_2]$ и $[A'_3]$ непосредственно влекут $\delta_{4,n}/\sqrt{n} = O(1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n})$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Справедливость этого утверждения мы также получим как простое следствие теоремы 1.1. Возьмем произвольное $c > 1/2$ и A, B в правой части (1.16), соответствующие этому значению c . Теперь, чтобы доказать (1.20), достаточно

повторить доказательство теоремы 1.2, принимая во внимание то, что $\alpha_n \xi_{\alpha_n}^2 \vee \beta_n \xi_{1-\beta_n}^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ когда $\mathbf{E} X_1^2 < \infty$. Это дает нам требуемую оценку для $(\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + \delta_{3,n})/\sqrt{n}$ в правой части (1.16). Наконец, непосредственное применение условий $\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) = o((f(\xi_{\alpha_n}) \ln k_n)^{-1})$ и $\Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B) = o((f(\xi_{1-\beta_n}) \ln m_n)^{-1})$ для любого $B > 0$, $n \rightarrow \infty$, приводит к оценке $\delta_{4,n}/\sqrt{n} = o(1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n})$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1.1. Для того чтобы доказать это следствие, мы применим (1.16) с постоянными A и B , соответствующими $c = 1/2$ в общем случае и некоторому $c > 1/2$ в частном случае, когда $\gamma = 2$ и $\sigma^2 < \infty$, чтобы получить оценку (1.20). Мы должны проверить, что условия $[A'_2]$ и $[A'_3]$ удовлетворены в нашем случае. Заметим, что $F(x)$ и $1 - F(x)$ правильно меняются с показателем $\rho = -\gamma$ на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Кроме того, поскольку $\alpha_n = F(\xi_{\alpha_n})$ и $\beta_n = 1 - F(\xi_{1-\beta_n})$, мы находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{|\xi_{\alpha_n}| f(\xi_{\alpha_n})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{|x| f(x)} = \frac{1}{\gamma},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{|\xi_{1-\beta_n}| f(\xi_{1-\beta_n})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{x f(x)} = \frac{1}{\gamma}$$

(см. [5]), и условие $[A'_2]$ (следовательно, и условие $[A'_3]$) выполняется. Это влечет за собой то, что величина $(\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + \delta_{3,n})/\sqrt{n}$ имеет порядок $O(1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n})$. Кроме того, в частном случае, когда $\gamma = 2$ и $\sigma^2 < \infty$, та же величина имеет меньший порядок, т.е. $o(1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n})$ (см. доказательство теорем 1.2 и 1.3).

Для проверки $[A'_3]$ достаточно сослаться на доказательство следствия 2.3 в [17] (см. с. 262 и первое из соотношений (5.1) на с. 275–276 [17]), полагая в нем $g(x) \equiv 1$, что соответствует нашему случаю. В [17] при тех же предположениях, что и у нас, доказано, что выполнено несколько более сильное условие $[A''_3]$, сформулированное в п. 1 (см. с. 431), из которого следует и $[A'_3]$, и то, что на самом деле мы имеем $(\delta_{4,n})/\sqrt{n} = o(1/\sqrt{k_n} + 1/\sqrt{m_n})$, что завершает доказательство следствия.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1.2. Достаточно показать, что выполняются условия теоремы 1.2. Условие $[A_1]$, неравенства $0 < a_1 < b_2 < 1$ и непрерывность f влекут за собой выполнение $\liminf_{n \rightarrow \infty} (f(\xi_{\alpha_n}) \wedge f(\xi_{1-\beta_n})) > 0$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{W(n)} > 0$. Следовательно, $[A'_2]$ имеет место. Кроме того, по условию Гёльдера степени $d > 0$ мы имеем:

$$\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) = O\left(\frac{\alpha_n \ln k_n}{n}\right)^{d/2} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{d/2} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Те же аргументы справедливы для $\Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B)$. Таким образом, $[A'_3]$ выполняется. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.4. Сначала, как при доказательстве теоремы 1.1 (см. (3.1)), мы пишем

$$\begin{aligned} F_{U,n}\left(x - \frac{\Delta_n}{\sigma_{W(n)}}\right) - \mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n) \\ \leq F_{T_n}\left(x + \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}}\right) \leq F_{U,n}\left(x + \frac{\Delta_n}{\sigma_{W(n)}}\right) + \mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где Δ_n — то же, что в лемме 2.1, b_n — то же, что в (1.25), и $F_{U,n}$ есть функция распределения случайной величины $(L_n + U_n)/\sigma_{W(n)}$ (см. (3.1)) — U -статистики степени 2 с ядром, которое зависит от n . Из нашего условия гладкости $[A_1]$ следует, что функция распределения случайной величины $W_1(n)$ имеет положительную плотность на борелевском множестве $D_n \subset \mathbf{R}$ с ненулевой мерой Лебега и что существует натуральное n_0 такое, что $\bigcap_{n=n_0}^{\infty} D_n \supset D \neq \emptyset$ и множество D имеет отличную от нуля меру Лебега. Следовательно, элементы последовательности функций распределения случайных величин $W_1(n)$ имеют общую нетривиальную абсолютно непрерывную компоненту, не зависящую от n , при всех достаточно больших n . Это влечет за собой

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\mathbf{E} \exp(it\sqrt{n} L_{n,1})| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\mathbf{E} \exp(it W_1(n))| < 1, \quad (3.10)$$

следовательно, последовательность первых канонических функций U -статистики удовлетворяет условию Крамера, и мы можем применить результат работы [3]. Разложение Эджворта для функции распределения $F_{U,n}(x) = \mathbf{P}((L_n + U_n)/\sigma_{W(n)} \leq x)$ имеет вид $G_{U,n}(x) = \Phi(x) - \phi(x)/6\sqrt{n}(\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)})(x^2 - 1)$ (см. [3, с. 855], а также п. 2).

Имеем

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| F_{U,n}\left(x \pm \frac{\Delta_n}{\sigma_{W(n)}}\right) - G_{U,n}(x) \right| \leq \Delta_{n,1} + \Delta_{n,2}, \quad (3.11)$$

где

$$\Delta_{n,1} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{U,n}(x) - G_{U,n}(x)|, \quad \Delta_{n,2} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| G_{U,n}\left(x \pm \frac{\Delta_n}{\sigma_{W(n)}}\right) - G_{U,n}(x) \right|.$$

Для того чтобы оценить $\Delta_{n,1}$, применим теорему 1.2 из [3], принимая также во внимание замечание 1.3, сделанное авторами на с. 856 цитируемой работы. Тогда мы получаем, что

$$\Delta_{n,1} \leq \frac{C}{n} \left(\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^4}{\sigma_{W(n)}^4} + \frac{\gamma_{2+\varepsilon}}{\sigma_{W(n)}^{2+\varepsilon}} \right), \quad (3.12)$$

где $\varepsilon > 0$ есть произвольная постоянная, постоянная $C > 0$ зависит от ε и не зависит от n (заметим, что величина Δ_3^2 , появляющаяся в теореме 1.2 из [3], равна нулю в случае U -статистики степени 2, см. [3, с. 858]) и

$$\begin{aligned} \gamma_{2+\varepsilon} &= \mathbf{E} |n^{3/2} U_{n,(1,2)}|^{2+\varepsilon} \\ &\leq 2^{1+\varepsilon} \left[\frac{(\mathbf{E} |\mathbf{1}_{\alpha_n}(X_1) - \alpha_n|^{2+\varepsilon})^2}{f^{2+\varepsilon}(\xi_{\alpha_n})} + \frac{(\mathbf{E} |\mathbf{1}_{1-\beta_n}(X_1) - (1 - \beta_n)|^{2+\varepsilon})^2}{f^{2+\varepsilon}(\xi_{1-\beta_n})} \right] \\ &< 2^{1+\varepsilon} \left[\alpha_n^2 \frac{1}{f^{2+\varepsilon}(\xi_{\alpha_n})} + \beta_n^2 \frac{1}{f^{2+\varepsilon}(\xi_{1-\beta_n})} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Соотношения (3.12)–(3.13) влекут за собой неравенство $\Delta_{n,1} \leq C_1(\delta_{1,n} + \delta_{2,n}(\varepsilon))/n$, и поскольку функция $G'_{U,n}(x)$ равномерно ограничена при всех x , мы получаем оценку $\Delta_{n,2} \leq C_2 \Delta_n / \sigma_{W(n)} = C_2 \delta_{4,n} / n^{3/4} + C_2 \delta_{5,n} / n^{1/2}$, где $C_i, i = 1, 2$, — некоторые положительные постоянные, не зависящие от n . Из этих оценок, соотношения (3.9) и леммы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| F_{T_n}(x) - G_{U,n} \left(x - \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} \right) \right| \\ \leq \frac{C_1}{n} (\delta_{1,n} + \delta_{2,n}(\varepsilon)) + \frac{C_2}{n^{3/4}} \delta_{4,n} + \frac{C_2}{n^{1/2}} \delta_{5,n} + C_3 r_n^{-c}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Остается заметить, что, поскольку $G'_{U,n}(x)$ и $G''_{U,n}(x)$ ограничены равномерно по x , мы имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| G_{U,n} \left(x - \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} \right) - G_{U,n}(x) \right| &\leq C \left(\frac{(|\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)}) b_n|}{\sqrt{n} \sigma_{W(n)}} + \frac{b_n^2}{\sigma_{W(n)}^2} \right) \\ &\leq C \left(\frac{\delta_{6,n}}{n^{1/2}} + \frac{\delta_{3,n}}{n} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от n . Соотношения (3.14) и (3.15) влекут за собой (1.28). Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.3. Для доказательства этого следствия мы применим теорему 1.4 с постоянной $c = 3/4$, и проверим, что правая часть неравенства (1.28) в условиях следствия 1.3 имеет порядок $O((\ln k_n)^{5/4}/k_n^{3/4} + (\ln m_n)^{5/4}/m_n^{3/4})$. Как и при доказательстве теоремы 1.2, используя условие $[A'_2]$ и (1.9), мы легко проверяем, что $(\delta_{1,n} + \delta_{3,n})/n = O(1/k_n + 1/m_n)$. Применяя условие $[A'_2]$, мы получаем для $\delta_{2,n}(\varepsilon)/n$ оценку $O([\alpha_n^{-1-3\varepsilon/2} + \beta_n^{-1-3\varepsilon/2}]/n) = O((n/k_n)^{3\varepsilon/2}/k_n + (n/m_n)^{3\varepsilon/2}/m_n)$, и по условию $[L]$ последняя величина имеет порядок $O(1/k_n^{3/4} + 1/m_n^{3/4})$, если $s \geq 6\varepsilon/(1 + 6\varepsilon)$. Для $\delta_{4,n}/n^{3/4}$ мы имеем требуемую оценку непосредственно по условию $[A'_2]$, для $\delta_{5,n}/n^{1/2}$ по условиям $[A'_2]$ и $[A'_3]$ мы получаем оценку того же порядка. Для того чтобы оценить $\delta_{6,n}/n^{1/2}$, мы применяем те же аргументы, использующие соотношение (1.9) и условие $[A'_2]$, что и прежде, которые для этого слагаемого приводят к оценке порядка $O(1/k_n + 1/m_n)$. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.5. Так же, как при доказательстве следствия 1.1, мы проверяем, что условие $[A_2'']$ (и, следовательно, $[A_2']$) выполняется. Кроме того, как и при доказательстве следствия 1.1, обращаясь к следствию 2.3 из [17], мы находим, что в условиях нашей теоремы $[A_3'']$ также имеет место. Таким образом, справедливость оценки (1.29) вытекает из следствия 1.3. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.4. Это утверждение непосредственным следует из (1.28). Действительно, в наших условиях мы имеем $(\delta_{1,n} + \delta_{2,n}(\varepsilon) + \delta_{3,n})/n = O(1/n)$, $n^{-3/4}\delta_{4,n} = O(n^{-3/4}\ln^{5/4}n)$, $n^{-1/2}\delta_{6,n} = O(1/n)$, и по условию Гёльдера

$$\ln n(\Psi_{\alpha_n, 1/f(x)}(B) + \Psi_{1-\beta_n, 1/f(x)}(B)) = O(\ln n(n^{-1}\ln n)^{d/2}) = o(n^{-d/2+\varepsilon})$$

для любого $\varepsilon > 0$. Из этих оценок следует, что $n^{-3/4}\delta_{4,n} + n^{-1/2}\delta_{5,n} = o(n^{-1/2-p})$ для любого $p < \min(1/4, d/2)$. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.6. Применяя лемму об U -статистической аппроксимации, имеем

$$F_{T_n, S}(x) = \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\widehat{\sigma}_{W(n)}} + \frac{R_n}{\sigma_{W(n)}} \frac{\sigma_{W(n)}}{\widehat{\sigma}_{W(n)}} \leq x\right),$$

где по лемме 2.1 имеем $p_{n,1} := \mathbf{P}(|R_n| > \Delta_n) = O(r_n^{-c})$ для любого $c > 0$ и Δ_n — то же, что и в (2.10). По лемме 2.2 основной член величины $\widehat{\sigma}_{W(n)}^2/\sigma_{W(n)}^2 - 1$ есть $V_n/\sigma_{W(n)}^2$, для которого по неравенству Чебышёва при любом $t > 0$ мы имеем

$$p_{n,2} := \mathbf{P}\left(\frac{|V_n|}{\sigma_{W(n)}^2} > 2t\right) \leq \frac{\mathbf{E} V_n^2}{4t^2 \sigma_{W(n)}^4} \leq \frac{C}{t^2} \left(\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^4}{n \sigma_{W(n)}^4} + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2\right),$$

где $C > 0$ есть некоторая постоянная, не зависящая от n и t (см. (2.19)), и в силу (1.9) последняя величина имеет порядок $O(1/k_n + 1/m_n + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2) = o(\delta_{2,S}(n) + \delta_5(n))$, где $\delta_{2,S}(n)$, $\delta_5(n)$ те же, что в (1.34) и (1.33) соответственно. Отсюда следует, что $|\sigma_{W(n)}/\widehat{\sigma}_{W(n)} - 1| \geq t$ с вероятностью порядка $p_{n,2}$. Положим $P_n = p_{n,1} + p_{n,2}$. Тогда при достаточно больших n

$$\widetilde{F}_{U_n, S}\left(x - \frac{\Delta_n(1+t)}{\sigma_{W(n)}}\right) - P_n \leq F_{T_n, S}(x) \leq \widetilde{F}_{U_n, S}\left(x + \frac{\Delta_n(1+t)}{\sigma_{W(n)}}\right) + P_n, \quad (3.16)$$

где

$$\widetilde{F}_{U_n, S}(x) = \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\sigma_{W(n)}} \leq x \left(1 + \frac{V_n}{\sigma_{W(n)}^2} + R_{n,S}\right)^{1/2}\right), \quad (3.17)$$

где $R_{n,S}$ — остаточный член из леммы 2.2. Заметим, что $1 + V_n/\sigma_{W(n)}^2 > 0$ для всех достаточно больших n с вероятностью $1 - O(P_n)$ и $|R_{n,S}| = O(\Delta_{n,S})$ с вероятностью $1 - O(r_n^{-c})$, где $\Delta_{n,S}$ то же, что в (1.33).

Поскольку $H'_n(x)$ ограничено сверху равномерно по x , достаточно доказать, что $H_n(x)$ является разложением для правой части (3.17) без $R_{n,S}$, поскольку его отбрасывание дает остаточный член порядка $O(\Delta_{n,S})$, который присутствует в правой части (1.34). Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\sigma_{W(n)}} \leq x \left(1 + \frac{V_n}{\sigma_{W(n)}^2}\right)^{1/2}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\sigma_{W(n)}} - x \left\{\left(1 + \frac{V_n}{\sigma_{W(n)}^2}\right)^{1/2} - 1\right\} \leq x\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Поскольку $|V_n|/\sigma_{W(n)}^2 \leq \epsilon$ с вероятностью $1 - O(p_{n,2})$ для произвольного $\epsilon > 0$ (см. выше), мы можем применить, как в [25] (см. также [14], [15]), неравенство $1 + z/2 - z^2/4 \leq (1 + z)^{1/2} \leq 1 + z/2$, $|z| \leq 4/5$. Заметим, что $V_n^2/(4\sigma_{W(n)}^4) \leq (V_{n,1}^2/\sigma_{W(n)}^4 + V_{n,2}^2/\sigma_{W(n)}^4)/2$, где $V_{n,i}$, $i = 1, 2$, те же, что в (2.18), и что $V_{n,1}^2/\sigma_{W(n)}^4 = O(q_{\alpha_n}^2 \ln k_n + q_{\beta_n}^2 \ln m_n)$ (см. (2.19)), последняя величина может быть включена в $\delta_{n,S}$ в правой части (1.34) (поскольку такое слагаемое имеется в $\Delta_{n,S}$). Таким образом, мы должны доказать, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\sigma_{W(n)}} - \frac{x V_n}{2\sigma_{W(n)}^2} \leq x\right) - H_n(x) \right| \leq C(\delta_n + \delta_{n,S}), \quad (3.19)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n + b_n}{\sigma_{W(n)}} - \frac{x V_n}{2\sigma_{W(n)}^2} + \frac{x V_{n,2}^2}{2\sigma_{W(n)}^4} \leq x\right) - H_n(x) \right| \leq C(\delta_n + \delta_{n,S}), \quad (3.20)$$

где δ_n то же, что в (1.34), $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n .

Определим $\tilde{H}_n(x) = H_n(x) + b_n \phi(x)/\sigma_{W(n)}$ (т.е. $\tilde{H}_n(x)$ — это $H_n(x)$, но без асимптотического смещения). Заметим, что $|b_n|/\sigma_{W(n)} \leq (q_{\alpha_n} + q_{\beta_n})/2$. Так как $xH'_n(x)$ и $x^2H'_n(x)$ ограничены, мы получаем:

$$\begin{aligned} H_n\left(x + \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}}\right) &= H_n(x) + \phi(x) \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} + O\left(\frac{|\lambda_{1(n)}| + |\lambda_{2(n)}|}{\sqrt{n}} \frac{|b_n|}{\sigma_{W(n)}} + b_n^2\right) \\ &= H_n(x) + \phi(x) \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{6,n} + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2\right) \\ &= H_n(x) + \phi(x) \frac{b_n}{\sigma_{W(n)}} + O(\delta_n + \delta_{n,S}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что нам нужно доказать неравенства

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} - \frac{x V_n}{2\sigma_{W(n)}^2} \leq x\right) - \tilde{H}_n(x) \right| \leq C(\delta_n + \delta_{n,S}), \quad (3.21)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} - \frac{x V_n}{2\sigma_{W(n)}^2} + \frac{x V_{n,2}^2}{2\sigma_{W(n)}^4} \leq x\right) - \tilde{H}_n(x) \right| \leq C(\delta_n + \delta_{n,S}). \quad (3.22)$$

Сначала докажем (3.21). Поскольку V_n является суммой независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин, мы находим, что $U_x = (L_n + U_n)/\sigma_{W(n)} - x V_n/(2\sigma_{W(n)}^2)$ есть центрированная U -статистика степени два, и, как при доказательстве теоремы 1.4, мы находим, что ввиду наших предположений гладкости $[A_1]$, условие Крамера выполняется. Положим $\nu_n = \ln(k_n \wedge m_n)$. Сначала мы докажем, что (3.21) имеет место равномерно по x таким $|x| < \nu_n$. По теореме 1.1 из [3] (принимая во внимание замечание 1.3, приведенное на с. 856 в цитируемой статье) после несложных вычислений четвертого момента U_x мы получаем

$$\sup_{|x| < \nu_n} |\mathbf{P}(U_x \leq x) - \tilde{G}_n(x)| \leq \frac{C}{n} \left(\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^4}{\sigma_{W(n)}^4} + \frac{\nu_n^4}{n^2} \left[\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^8}{\sigma_{W(n)}^8} + \frac{\alpha_n^5 \xi_{\alpha_n}^4}{f^4(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}^8} + \frac{\beta_n^5 \xi_{1-\beta_n}^4}{f^4(\xi_{1-\beta_n}) \sigma_{W(n)}^8} \right] + \frac{\gamma_{2+\varepsilon}}{\sigma_{W(n)}^{2+\varepsilon}} \right), \quad (3.23)$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от n (которая зависит от $\varepsilon > 0$, см. [3, с. 856]), $\gamma_{2+\varepsilon}$ — то же, что в доказательстве теоремы 1.4, и

$$\tilde{G}_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) - \frac{k_{3,x}}{6\sigma_x^3} \left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 1 \right] \phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right), \quad (3.24)$$

где $\sigma_x^2 = \mathbf{E}U_x^2$, $k_{3,x} = \mathbf{E}U_x^3$. В силу (1.9) мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_n^4}{n^3} \left[\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^8}{\sigma_{W(n)}^8} + \frac{\alpha_n^5 \xi_{\alpha_n}^4}{f^4(\xi_{\alpha_n}) \sigma_{W(n)}^8} + \frac{\beta_n^5 \xi_{1-\beta_n}^4}{f^4(\xi_{1-\beta_n}) \sigma_{W(n)}^8} \right] \\ &= O\left(\nu_n^4 \left(\frac{1}{k_n^3} + \frac{1}{m_n^3} \right) + \frac{\nu_n^4}{n} \left[\frac{1}{\alpha_n} q_{\alpha_n}^4 + \frac{1}{\beta_n} q_{\beta_n}^4 \right] \right) = o(\delta_{1,S}(n) + \delta_{2,S}(n)), \end{aligned}$$

где $\delta_{i,S}(n)$ — величины, определенные в (1.34). Кроме того, как при доказательстве теоремы 1.4, мы получаем, что $\gamma_{2+\varepsilon}/\sigma_{W(n)}^{2+\varepsilon} = O(\delta_{2,n}(\varepsilon))$. Таким образом, в правой части (3.23) мы имеем желаемую оценку $C([\delta_{1,n} + \delta_{2,n}(\varepsilon)]/n + \delta_{1,S}(n)) \leq C(\delta_n + \delta_{n,S})$ (здесь $\delta_{i,n}$, $i = 1, 2$, — слагаемые δ_n , см. (1.28)).

Теперь рассмотрим $\tilde{G}_n(x)$. Мы имеем

$$\sigma_x^2 = \mathbf{E}U_x^2 = \mathbf{E}\left(\frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}}\right)^2 - \frac{x}{\sigma_{W(n)}^2} \mathbf{E}([L_n + U_n]V_n) + \frac{x^2}{4} \mathbf{E}\left(\frac{V_n^2}{\sigma_{W(n)}^4}\right).$$

Так как U_n и V_n некоррелированы, после простых вычислений, использующих формулы (2.1)–(2.5) и (2.18), мы получаем $\mathbf{E}([L_n + U_n]V_n) = \mathbf{E}(L_n V_n) = (\gamma_{3,W(n)} + 2\delta_{2,W(n)})/\sqrt{n}$, и, следовательно,

$$\sigma_x^2 = 1 - \frac{x(\lambda_{1(n)} + 2\lambda_{2(n)})}{\sqrt{n}} + O\left(\nu_n^2 \left[\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^4}{n\sigma_{W(n)}^4} + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2 \right] \right) \quad (3.25)$$

(см. (2.6), (2.19)). Кроме того, применяя соотношения (2.1)–(2.5), (2.9), (2.18) и (1.9), в результате простых вычислений мы получаем, что

$$k_{3,x} = \mathbf{E} U_x^3 = \frac{\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)}}{\sqrt{n}} + O(\delta_{n,S}). \quad (3.26)$$

Заметим, что оценивание остаточного члена в правой части (3.26) существенно основано на соотношении (1.9), которое мы используем, чтобы оценить моменты $\mathbf{E} W_1^r(n)/\sigma_{W(n)}^r$ (см. доказательство теоремы 1.2), причем старшая появляющаяся здесь степень — это $r = 6$. Из соотношений (3.24)–(3.26) следует, что

$$\tilde{G}_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) - \frac{\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)}}{6\sqrt{n}}(x^2 - 1)\phi(x) + O(\delta_{n,S}) \quad (3.27)$$

для $|x| \leq \nu_n$, т.е. σ_x влияет на первый член разложения только через слагаемое $\Phi(x/\sigma_x)$ (см. аналогичный вывод в доказательстве теоремы 1.2 в [25]). Тогда, используя (3.25) и (1.9), мы получаем: $\Phi(x/\sigma_x) = \Phi(x) + \phi(x)x^2(\lambda_{1(n)} + 2\lambda_{2(n)})/2\sqrt{n} + O(\delta_{n,S})$. Таким образом, $\tilde{G}_n(x) = \tilde{H}_n(x) + O(\delta_{n,S})$ для $|x| \leq \nu_n$. Теперь рассуждаем так же, как в аналогичном пункте статьи [25] (см. также [14], [15]): если $x < -\nu_n$, то $\tilde{H}_n(x) = O(r_n^{-c})$, а если $x > \nu_n$, то $1 - \tilde{H}_n(x) = O(r_n^{-c})$, где $c > 0$ — произвольная постоянная. Таким образом, монотонность функции распределения влечет за собой (3.21).

Остается доказать (3.22). Как и прежде, мы видим, что достаточно доказать это соотношение, беря супремум по x : $|x| < \nu_n$. Мы должны показать, что присутствие $xV_{n,2}^2/(2\sigma_{W(n)}^4)$ не влияет на разложение и на оценку в правой части (3.22). Заметим, что $xV_{n,2}^2 = (x/n^2)(\sum_{i=1}^n [(W_i(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2])^2$ есть U -статистика степени два и ее разложение Хёфдинга имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n} \mathbf{E} [(W_1(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2]^2 \\ & + \frac{x}{n^2} \sum_{i=1}^n \left([(W_i(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2]^2 - \mathbf{E} [(W_1(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2]^2 \right) \\ & + \frac{2x}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[(W_i(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2 \right] \left[(W_j(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{x}{n\sigma_{W(n)}^4} \mathbf{E} \left[(W_1(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2 \right]^2 = O\left(\frac{\nu_n}{n} \frac{\mathbf{E} W_1^4(n)}{\sigma_{W(n)}^4}\right)$$

и $\tilde{H}'(x)$ ограничено равномерно по $x \in \mathbf{R}$, то постоянное (неслучайное) слагаемое разложения Хёфдинга вкладывается в остаточный член и мо-

жет быть опущено. Поскольку

$$\tilde{U}_x = \frac{L_n + U_n}{\sigma_{W(n)}} - \frac{x V_n}{2\sigma_{W(n)}^2} + \frac{x V_{n,2}^2}{2\sigma_{W(n)}^4} - \frac{x}{2n\sigma_{W(n)}^4} \mathbf{E} \left[(W_1(n) - \mu_{W(n)})^2 - \sigma_{W(n)}^2 \right]^2$$

— это центрированная U -статистика степени два и величина $x V_{n,2}^2 / (2\sigma_{W(n)}^4)$ даже еще меньше, чем $x V_n / (2\sigma_{W(n)}^2)$, для всех достаточно больших n , то, применяя теорему 1.1 работы [3], мы приходим к такой же оценке, как в (3.23), с

$$\tilde{G}_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_x}\right) - \frac{\lambda_{1(n)} + 3\lambda_{2(n)}}{6\sqrt{n}} (x^2 - 1)\phi(x) + O(\delta_{n,S}),$$

где для $\tilde{\sigma}_x^2 = \mathbf{E} \tilde{U}_x^2$ после несложных (но несколько громоздких) вычислений мы получаем:

$$\tilde{\sigma}_x^2 = 1 - \frac{x(\lambda_{1(n)} + 2\lambda_{2(n)})}{\sqrt{n}} + O\left(\nu_n^2 \left[\frac{\mathbf{E}(W_1(n))^4}{n\sigma_{W(n)}^4} + q_{\alpha_n}^2 + q_{\beta_n}^2 \right]\right) + o(\delta_{n,S}).$$

Таким образом, как и прежде, $\Phi(x/\tilde{\sigma}) = \Phi(x) + \phi(x)x^2(\lambda_{1(n)} + 2\lambda_{2(n)})/(2\sqrt{n}) + O(\delta_{n,S})$, и $\tilde{G}_n(x) = \tilde{H}_n(x) + O(\delta_{n,S})$. Отсюда следует справедливость (3.22), когда супремум берется по всем x таким, что $|x| < \nu_n$, и используя, как и прежде, соображения монотонности, мы получаем его справедливость в общем случае, когда супремум берется по всем вещественным x . Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1.5. Для того чтобы доказать это следствие, мы применяем теорему 1.6 с константой $c = 3/4$ и проверяем, что $\delta_n + \delta_{n,S} = O((\ln k_n)^{5/4}/k_n^{3/4} + (\ln m_n)^{5/4}/m_n^{3/4})$. Требуемую оценку для δ_n мы получаем так же, как при доказательстве следствия 1.3. Проверка для $\delta_{n,S}$ аналогична. Следствие доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.7. Теорема доказывается так же, как теорема 1.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bentkus V., Götze F., Zitikis R. Lower estimates of the convergence rate for U -statistics. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 4, p. 1707–1714.
2. Bentkus V., Jing B.-Y., Zhou W. On normal approximations to U -statistics. — Ann. Probab., 2009, v. 37, № 6, p. 2174–2199.
3. Bentkus V., Götze F., van Zwet W.R. An Edgeworth expansion for symmetric statistics. — Ann. Statist., 1997, v. 25, № 2, p. 851–896.
4. Bickel P.J., Götze F., van Zwet W.R. The Edgeworth expansion for U -statistics of degree two. — Ann. Statist., 1986, v. 14, p. 1463–1484.
5. Bingham N.M., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p. (Encyclopedia Math. Appl., v. 27.)

6. Боровков А. А., Мозульский А. А. О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 641–673.
7. Chen L. H. Y., Shao Q. M. Normal approximation for nonlinear statistics using a concentration inequality approach. — Bernoulli, 2007, v. 13, № 2, p. 581–599.
8. Csörgő S., Haeusler E., Mason D. M. The asymptotic distribution of trimmed sums. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 2, p. 672–699.
9. Csörgő S., Megyesi Z. Trimmed sums from the domain of geometric partial attraction of semistable laws. — State of the Art in Probability and Statistics: Festschrift for Willem R. van Zwet. Ed. by M. de Gunst, C. Klaassen, and A. van der Vaart. Beachwood: Institute of Mathematical Statistics, 2001, p. 173–194. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser., v. 36.)
10. Егоров В. А., Невзоров В. Б. Некоторые оценки скорости сходимости сумм порядковых статистик к нормальному закону. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1974, т. 41, с. 105–128.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М: Мир, 1984, 752 с.
12. Friedrich K. O. A Berry–Esseen bound for functions of independent random variables. — Ann. Statist., 1989, v. 17, p. 170–183.
13. Грибкова Н. В. Об аналогах неравенства Берри–Эссеена для урезанных линейных комбинаций порядковых статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, с. 176–183.
14. Gribkova N. V., Helmers R. The empirical Edgeworth expansion for a Studentized trimmed mean. — Math. Methods Statist., 2006, v. 15, № 1, p. 61–87.
15. Gribkova N. V., Helmers R. On the Edgeworth expansion and the M out of N bootstrap accuracy for a Studentized trimmed mean. — Math. Methods Statist., 2007, v. 16, № 2, p. 142–176.
16. Грибкова Н. В., Хэлмерс Р. О состоятельности $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимации распределений усеченного среднего. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 1, с. 3–18.
17. Gribkova N. V., Helmers R. On a Bahadur–Kiefer representation of von Mises statistic type for intermediate sample quantiles. — Probab. Math. Statist., 2012, v. 32, № 2, p. 255–279.
18. Griffin P. S., Pruitt W. E. Asymptotic normality and subsequential limits of trimmed sums. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 3, p. 1186–1219.
19. Helmers R. On the Edgeworth expansion and the bootstrap approximation for a Studentized U -statistic. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 1, p. 470–484.
20. Helmers R., Jing B.-Y., Qin G., Zhou W. Saddlepoint approximations to the trimmed mean. — Bernoulli, 2004, v. 10, № 3, p. 465–501.
21. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1963, v. 58, p. 13–30.
22. Kulik R., Haye M. O. Trimmed sums of long range dependent moving averages. — Statist. Probab. Lett., 2008, v. 78, № 15, p. 2536–2542.
23. Peng L. Estimating the mean of a heavy tailed distribution. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 52, № 3, p. 255–264.
24. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин, М.: Наука, 1972, 414 с.
25. Putter H., van Zwet W. R. Empirical Edgeworth expansions for symmetric statistics. — Ann. Statist., 1998, v. 26, № 4, p. 1540–1569.
26. Stigler S. M. The asymptotic distribution of the trimmed mean. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 4, p. 472–477.
27. van Zwet W. R. A Berry–Esseen bound for symmetric statistics. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, v. 66, p. 425–440.

Поступила в редакцию

11.VI.2010

Исправленный вариант

6.II.2013