Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков, Е. А. Пчелинцев, Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 454–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:12:37

© 2013 г. **КОНЕВ В. В.***, **ПЕРГАМЕНЩИКОВ С. М.****

ПЧЕЛИНЦЕВ Е. А.***

ОЦЕНИВАНИЕ РЕГРЕССИИ С ШУМАМИ ИМПУЛЬСНОГО ТИПА ПО ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ¹⁾

Рассматривается задача оценивания параметров в периодической регрессии в непрерывном времени с семимартингальными шумами по наблюдениям в дискретные моменты времени. Предлагаются улучшенные оценки параметров регрессии. Устанавливается, что при некоторых общих условиях эти оценки превосходят по среднеквадратической точности оценки по методу наименьших квадратов. Доказывается асимптотическая минимаксность улучшенных оценок в смысле робастного риска. Изучены свойства предложенной процедуры для моделей с негауссовскими помехами импульсного типа. Импульсные воздействия имеют случайную интенсивность и происходят в случайные моменты времени, образующие пуассоновский процесс.

Ключевые слова и фразы: регрессионная модель, семимартингал, улучшенное оценивание, среднеквадратический риск, асимптотическая минимаксность, процесс Леви, процесс Орнштейна–Уленбека.

1. Введение. Во многих прикладных задачах идентификации динамических систем, обработки сигналов и анализа данных в информационно-измерительных комплексах успешно используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Разработка решающих процедур идентификации основывается на предположении, что шумы в уравнениях задаются процессами броуновского движения. Если шумовые воздействия на динамическую систему являются негауссовскими и включают, например, импульсные помехи, то эффективность алгоритмов идентификации может

*Томский государственный университет; Томский политехнический университет, Томск, Россия; e-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

**Томский государственный университет, Томск, Россия; Université de Rouen, Rouen, France; e-mail: serge.pergamenchikov@univ-rouen.fr

***Томский государственный университет, Томск, Россия; e-mail: evgen-pch@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00172-а).

снижаться. Поэтому, когда шумовые воздействия имеют сложную природу, необходимо дополнительное изучение свойств решающих процедур.

В данной работе рассматривается задача оценивания параметров регрессии в непрерывном времени с шумами импульсного типа, описываемыми семимартингалным процессом. При разработке процедуры идентификации существенно используется условие, что шумовой процесс является условно-гауссовским (при фиксированных моментах импульсных воздействий). Известно, что в теории фильтрации предположение условно-гауссовости ненаблюдаемого процесса относительно наблюдаемого позволило обобщить классическую задачу Калмана–Бьюси на класс стохастических моделей, в которые наблюдаемый процесс входит нелинейным образом (см. [1, теорема 12.1]).

В теории идентификации одним из основных методов является метод наименьших квадратов (МНК). Согласно известной теореме Гаусса–Маркова, оценки МНК в линейной гауссовской регрессии с дискретным временем являются наилучшими по среднеквадратической точности в классе всех несмещенных оценок. Ответ на вопрос, можно ли дополнительно повысить (по сравнению с оценкой МНК) точность оценивания, если отказаться от требования несмещенности оценок, был дан в работе У. Джеймса и Ч. Стейна [2], в которой авторы предложили улучшенную оценку в задаче оценивания среднего значения многомерного нормального распределения. Подход Стейна к оцениванию параметров регрессии с дискретным временем был развит для ряда моделей [3]–[5]. Однако ключевую роль при этом играет предположение гауссовости процесса наблюдений.

В настоящей работе будет показано, что подход Джеймса–Стейна можно использовать для повышения качества оценивания регрессии с шумами импульсного типа.

Рассмотрим регрессионную модель с непрерывным временем, определяемую стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy_t = \sum_{j=1}^d \theta_j \phi_j(t) dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ — вектор неизвестных параметров из открытого ограниченного множества $\Theta \subset \mathbf{R}^d$, штрих обозначает транспонирование, n — число периодов наблюдения, $(\phi_j)_{1 \leq j \leq d}$ — система 1-периодических функций из $[0, +\infty)$ в $\mathbf{R}$, ортонормальных в пространстве $\mathcal{L}_2[0, 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица с постоянной L :

$$|\phi_j(t) - \phi_j(s)| \leq L|t - s|. \quad (2)$$

Предположим, что шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ является квадратично интегрируемым семимартингалом с неизвестным условно-гауссовским распределе-

нием относительно некоторой σ -алгебры $\mathcal{G}$ таким, что для любой функции $f \in \mathcal{L}_2[0, n]$ определен стохастический интеграл

$$I_n(f) = \int_0^n f_t d\xi_t, \quad (3)$$

обладающий свойствами

$$\mathbf{E}_Q I_n(f) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_Q I_n^2(f) \leq \sigma_Q \int_0^n f_t^2 dt, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}_Q$ — усреднение по распределению Q помехи $(\xi_t)_{t \geq 0}$ и $\sigma_Q > 0$ — постоянная. Распределение помехи Q неизвестно и принадлежит некоторому параметрическому классу распределений $\mathcal{Q}_n^*$ в пространстве Скорохода $\mathcal{D}[0, n]$ (см. [6]).

Предположим, что процесс (1) доступен наблюдению только в дискретные моменты времени

$$t_j = \frac{j}{p}, \quad j = 0, \dots, np, \quad (5)$$

где p — целое положительное число, определяющее частоту наблюдений.

Задача состоит в том, чтобы оценить вектор неизвестных параметров θ по дискретным наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ при общих условиях на функцию условной ковариации $\text{cov}(\xi_t, \xi_s | \mathcal{G})$ семимартингального шума ξ_t , имеющего условно-гауссовское распределение относительно некоторой σ -алгебры $\mathcal{G}$.

К выделенному классу семимартингальных шумов относятся следующие процессы импульсного типа.

Пример 1. Процесс $\xi_t = u_t$ является однородным процессом Леви:

$$u_t = \varrho_1 w_t + \varrho_2 z_t, \quad (6)$$

представляющим собой смесь стандартного броуновского движения $(w_t)_{t \geq 0}$ и составного пуассоновского процесса $(z_t)_{t \geq 0}$, определяемого равенством

$$z_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j,$$

где $(N_t)_{t \geq 0}$ — однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, а $(Y_j)_{j \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин с параметрами $(0, 1)$. Параметры шума ϱ_1 , ϱ_2 и λ неизвестны.

Пример 2. Процесс ξ_t является негауссовским процессом Орнштейна–Уленбека с импульсными возмущениями:

$$d\xi_t = a\xi_t dt + du_t, \quad (7)$$

где $a \leq 0$, а процесс $(u_t)_{t \geq 0}$ определен в (6). Параметры шума a , ϱ_1 , ϱ_2 и λ неизвестны.

Процессы (6) и (7) являются квадратично интегрируемыми семимартингалами, которые имеют условно-гауссовское распределение относительно σ -алгебры $\mathcal{G} = \sigma\{N_t, t \geq 0\}$, порожденной пуассоновским процессом, с нулевым средним и функциями условной ковариации $\text{cov}(\xi_t, \xi_s | \mathcal{G})$, зависящими от мешающих параметров a , ϱ_1 , ϱ_2 и λ . Известно [7], что негауссовские процессы (6) и (7) успешно используются при моделировании помех с различными структурными зависимостями и существенными отклонениями от гауссовости. Выбор параметров шума дает возможность описывать различные воздействия импульсного типа.

Регрессионная модель (1) применяется при обработке сигналов [8] и описании эволюции стоимостей активов на финансовых рынках с непрерывным временем типа Блэка–Шоулса, допускающих скачкообразные изменения [7], [9].

Задача оптимального оценивания функции регрессии в параметрической модели типа (1), а также в непараметрической постановке, подробно исследована в случае белого гауссовского шума ξ_t (см. [8]).

Цель работы — построить оценки неизвестных параметров функции регрессии в (1), имеющие более высокую среднеквадратическую точность по сравнению с обычными оценками МНК, а также получить явные формулы для минимального выигрыша в среднеквадратическом риске

$$R(\tilde{\theta}, \theta) = \mathbf{E}_{\theta} \|\tilde{\theta} - \theta\|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2.$$

Для рассматриваемой модели (1) с импульсными шумами наблюдаемый процесс является условно-гауссовским. Используя подход Стейна [2] к построению улучшенных оценок для гауссовских моделей, можно ожидать, что такой подход может быть распространен на условно-гауссовский случай. Здесь, по-видимому, можно провести определенную аналогию с решением задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции в моделях с непрерывным временем, для которых в случае условно-гауссовских моделей удается получить замкнутые уравнения оптимальной нелинейной фильтрации [1]. К сожалению, задача оценивания параметров при импульсных помехах не сводится к задаче фильтрации.

Как показано в разделе 2, рассматриваемая задача построения улучшенных оценок для вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ процесса (1) по дискретным наблюдениям $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq n_p}$ связана с оцениванием параметра θ в модели типа

$$Y = \theta + \xi,$$

в которой, в отличие от модели Стейна, шумы являются только условно-

гауссовскими, причем характеристики условного распределения неизвестны. Для такой схемы наблюдений предлагается вместо оценки Джеймса–Стейна [2]

$$\tilde{\theta} = \left(1 - \frac{c}{\|Y\|^2}\right)Y$$

использовать оценку вида

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{\|Y\|}\right)Y,$$

которая позволяет построить улучшенную по точности оценку для вектора θ в модели (1) по наблюдениям процесса в дискретные моменты времени (5). Выбор такой оценки позволяет ослабить требования на ковариационную матрицу шумов, при которых возможно повышение точности оценивания. В теореме 1 получены явные формулы для выигрыша в среднеквадратической точности в модели (1) при общих условиях на семимартингальный шум. В теоремах 2, 3 устанавливаются свойства оценки θ^* для регрессии с негауссовскими шумами импульсного типа (6) и (7). В разделе 4 доказывается асимптотическая минимаксность предложенных оценок в смысле робастного риска при неограниченном росте числа периодов n и частоты p наблюдений процесса (1) (теорема 4). В приложении приводятся доказательства некоторых вспомогательных результатов.

2. Выбор оценки. Основные результаты для модели с семимартингальным шумом. В данном разделе задача оценки параметров $(\theta_1, \dots, \theta_d)$ по дискретным наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ в модели (1) с общим семимартингальным шумом, имеющим условно-гауссовское распределение, сводится к оцениванию тех же параметров в схеме регрессии с дискретным временем и условно-гауссовскими шумами. Основная трудность оценивания в результирующей схеме регрессии связана с тем, что шумы в ней имеют смещение, зависящее от частоты наблюдений и неизвестных параметров, а также неизвестную условную ковариационную функцию.

Поскольку распределение шума ξ_t в уравнении (1) неизвестно, для оценивания неизвестных параметров естественно использовать метод наименьших квадратов. В случае, когда процесс (1) допускает непрерывное наблюдение, оценки θ_j МНК по n периодам определяются формулами

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d)', \quad \hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \int_0^n \phi_j(t) dy_t.$$

Оценка МНК вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ по дискретным данным $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ зависит от частоты наблюдений p и имеет вид

$$\hat{\theta}_p(n) = (\hat{\theta}_{1,p}(n), \dots, \hat{\theta}_{d,p}(n))', \quad \hat{\theta}_{j,p}(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(t) dy_t, \quad (8)$$

где $\psi_{j,p}(t) = \sum_{k=1}^{np} \phi_j(t_k) \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$, т.е.

$$\hat{\theta}_{j,p}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} \phi_j(t_k) \Delta y_{t_k}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (9)$$

Используя уравнение (1), находим

$$\Delta y_{t_k} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^d \theta_i \phi_i(t_k) + h_k(\theta) + \Delta \xi_{t_k}, \quad \Delta \xi_{t_k} = \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}},$$

$$h_k(\theta) = \sum_{i=1}^d \theta_i \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_i(u) - \phi_i(t_k)) du.$$

Подставляя Δy_{t_k} в (9), получаем

$$\hat{\theta}_p(n) = \theta + n^{-1/2} \zeta_p(n), \quad (10)$$

где $\zeta_p(n) = (\zeta_{1,p}(n), \dots, \zeta_{d,p}(n))'$ — вектор шумов с координатами

$$\zeta_{j,p}(n) = n^{1/2} H_{j,p}(\theta) + n^{-1/2} I_n(\psi_{j,p})$$

$$\left(\text{здесь } H_{j,p}(\theta) = \sum_{i=1}^d \theta_i \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i(u) (\phi_j(t_k) - \phi_j(u)) du \right),$$

а функционал $I_n(f)$ определен в (3). Вектор шумов $\zeta_p(n)$ в уравнении (10), в силу условий на шумовой процесс ξ_t в модели (1), является условно-гауссовским относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ с неизвестным вектором средних значений $H_p(\theta) = (H_{1,p}(\theta), \dots, H_{d,p}(\theta))'$ и неизвестной случайной ковариационной матрицей

$$V_{p,n}(\mathcal{G}) := \text{cov}(\zeta_p(n), \zeta_p(n)' | \mathcal{G}). \quad (11)$$

Принимая во внимание, что неизвестный параметр $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ в (1) удовлетворяет уравнению (10), предлагается в качестве его оценки использовать оценку вида

$$\theta_p^*(n) = \left(1 - \frac{c}{\|\hat{\theta}_p(n)\|} \right) \hat{\theta}_p(n), \quad (12)$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Такой выбор оценки, как показано ниже, дает возможность контролировать среднеквадратическую точность оценивания при определенных условиях на условную ковариационную матрицу шума $\zeta_p(n)$.

Введем следующие условия.

(C₁) Максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})$ ограничено сверху, т.е. $\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})) \leq \lambda^*$, где λ^* — известная положительная постоянная.

(C₂) Существует положительная постоянная κ такая, что

$$\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \kappa \quad \text{п.н.}$$

При изучении свойств оценки (12) нам потребуются следующие обозначения:

$$\Delta_p(\theta) := R(\theta_p^*(n), \theta) - R(\hat{\theta}_p(n), \theta), \quad (13)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\alpha + \sqrt{d\lambda^*/n}},$$

где $\alpha = (1 + Ld/(\sqrt{3}p))\beta$ и $\beta = \sup\{\|\theta\|: \theta \in \Theta\}$.

Нижнюю границу для величины уменьшения среднеквадратического риска $\Delta_p(\theta)$ при переходе от оценки МНК (8) к модификации (12) оценки Джеймса–Стейна дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в регрессионной модели (1) семимартингаловый условно-гауссовский шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет условиям (3), (4), (C_1) и (C_2) . Тогда разность (13) рисков оценки (12) с постоянной $c = c_* := \kappa\gamma_n/n$ и оценки МНК (8) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) \leq -c_*^2 + \frac{2L\beta d}{\sqrt{3}p} c_*. \quad (14)$$

Доказательство. Рассмотрим риск оценки (12)

$$\begin{aligned} R(\theta_p^*(n), \theta) &= \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - \theta\|^2 = \mathbf{E}_\theta \|(\theta_p^*(n) - b) + H_p(\theta)\|^2 \\ &= \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 + 2\mathbf{E}_\theta (\theta_p^*(n) - b)' H_p(\theta) + \|H_p(\theta)\|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $b = (b_1, \dots, b_d)' = \theta + H_p(\theta)$. Первое слагаемое в правой части (15) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 &= \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 \|Y\|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^d \mathbf{E}_\theta \left[\mathbf{E} \left((g(Y) - 1) Y_j (Y_j - b_j) \mid \mathcal{G} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $g(Y) = 1 - c/\|Y\|$, $Y = \hat{\theta}_p(n)$. Обозначив $f_j(Y) = (g(Y) - 1)Y_j$ и учитывая, что распределение вектора Y является условно-гауссовским относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ с плотностью

$$p_Y(x \mid \mathcal{G}) = \frac{n^{d/2} \exp(-n(x - b)' V_{p,n}^{-1}(\mathcal{G})(x - b)/2)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det V_{p,n}(\mathcal{G})}},$$

имеем

$$L_j := \mathbf{E}(f_j(Y)(Y_j - b_j) \mid \mathcal{G}) = \int_{\mathbf{R}^d} f_j(x)(x_j - b_j) p_Y(x \mid \mathcal{G}) dx, \quad j = 1, \dots, d.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $u = V_{p,n}^{-1/2}(\mathcal{G})(x - b)$ и полагая $\tilde{f}_j(u) = f_j(V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G})u + b)$, находим

$$L_j = \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{l=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f}_j(u) u_l \exp\left(-\frac{n\|u\|^2}{2}\right) du$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G}), \quad j = 1, \dots, d,$$

где $\langle A \rangle_{ij}$ обозначает (i, j) -й элемент матрицы A , а X есть d -мерный условно-гауссовский относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ вектор с нулевым средним и единичной матрицей условной ковариации. Для вычисления условных математических ожиданий $\mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G})$ нам потребуется следующий результат, непосредственно вытекающий из леммы 2 работы [10].

Лемма 1. Пусть X — d -мерный условно-гауссовский относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ вектор с нулевым средним и единичной матрицей условной ковариации. Пусть $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывно-дифференцируемая функция и $\mathbf{E}(\|\nabla h(X)\| | \mathcal{G}) < \infty$ п.н., где $\nabla h = (\partial h / \partial x_1, \dots, \partial h / \partial x_d)'$. Тогда

$$\mathbf{E}(h(X) X | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\nabla h(X) | \mathcal{G}) \quad \text{п.н.}$$

Пусть $h(u) = \tilde{f}_j(u)$. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}(\|\nabla \tilde{f}_j(X)\| | \mathcal{G}) < \infty \quad \text{п.н.}$$

Применяя лемму 1, находим

$$\mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G}) = \mathbf{E}\left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_l}(X) \middle| \mathcal{G}\right) = \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \mathbf{E}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(Y) \middle| \mathcal{G}\right).$$

Поэтому

$$L_j = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \mathbf{E}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(Y) \middle| \mathcal{G}\right), \quad j = 1, \dots, d.$$

Отсюда и из (16) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 &= \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 \|Y\|^2 \\ &+ \frac{2}{n} \mathbf{E}_\theta \left(\sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \frac{\partial}{\partial u_k} [(g(Y) - 1) Y_j] \right). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 = \mathbf{E}_\theta W(Y),$$

где

$$W(z) = c^2 + \frac{2c}{n} \left(\frac{z' V_{p,n}(\mathcal{G}) z}{\|z\|^3} - \frac{\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G})}{\|z\|} \right).$$

Используя оценку $z' A z \leq \lambda_{\max}(A) \|z\|^2$ для положительно определенной матрицы A и условие (C_2) , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 \\ \leq c^2 - \frac{2c}{n} \mathbf{E}_\theta \frac{\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G}))}{\|Y\|} \leq c^2 - \frac{2\kappa c}{n} \mathbf{E}_\theta \frac{1}{\|Y\|}. \end{aligned}$$

Далее оценим снизу величину $\mathbf{E} \|Y\|^{-1}$.

Лемма 2. В условиях теоремы 1 имеем $\mathbf{E} \|Y\|^{-1} \geq \gamma_n$.

Доказательство этой леммы приводится в приложении.

Отсюда получаем

$$\mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 \leq c^2 - \frac{2\kappa\gamma_n c}{n} =: \varphi(c).$$

Минимизируя функцию $\varphi(c)$ по c , находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 &\leq \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 - c_*^2 \\ &= R(\hat{\theta}_p(n), \theta) - c_*^2 - 2\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}_p(n) - \theta)' H_p(\theta) + \|H_p(\theta)\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (15), имеем

$$\Delta_p(\theta) \leq -c_*^2 + 2\mathbf{E}_\theta(\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta). \quad (17)$$

С помощью элементарного неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (18)$$

получаем

$$\begin{aligned} 2\mathbf{E}_\theta(\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta) &\leq \varepsilon \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|H_p(\theta)\|^2 \\ &= \varepsilon c_*^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|H_p(\theta)\|^2. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|H_p(\theta)\|^2 &= \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \theta_i \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i(u) (\phi_j(t_k) - \phi_j(u)) du \right)^2 \\ &\leq \|\theta\|^2 \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i(u) (\phi_j(t_k) - \phi_j(u)) du \right)^2 \\ &\leq \beta^2 p \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i^2(u) du \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_j(t_k) - \phi_j(u))^2 du. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия (2),

$$\|H_p(\theta)\|^2 \leq L^2 \beta^2 p d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_i^2(u) du \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - u)^2 du = \frac{(L\beta d)^2}{3p^2}. \quad (19)$$

Поэтому

$$2\mathbf{E}_\theta(\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta) \leq \varepsilon c_*^2 + \frac{(L\beta d)^2}{3p^2 \varepsilon}.$$

Выбрав значение ε , минимизирующее правую часть этого неравенства, и используя полученную оценку в (17), приходим к требуемому результату. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 разность рисков (13) обладает следующими свойствами:

1) если $p > 2L\beta d/(\sqrt{3}c_*)$, то

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) < 0;$$

2) если условие (C_2) выполнено для достаточно больших p , то

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) \leq -c_*^2.$$

3. Свойства процедуры для шумов импульсного типа. Изучим свойства процедуры (12) оценивания параметров $\theta_1, \dots, \theta_d$ в случаях, когда шум ξ_t в уравнении (1) описывается негауссовскими процессами (6) и (7). Предположим, что функции $(\phi_1, \dots, \phi_d)$ являются тригонометрическими:

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_{2j}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi jt), \quad \phi_{2j+1}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi jt), \quad (20)$$

где $j = 1, \dots, [d/2]$, $[b]$ — целая часть числа b .

На мешающие параметры шумов (6) и (7) наложим соответственно следующие условия:

$$\varrho_1 \geq \rho > 0 \quad \text{и} \quad \varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2 \leq \varrho^*; \quad (21)$$

$$-a_{\max} \leq a \leq 0, \quad \varrho_1 \geq \rho > 0 \quad \text{и} \quad \varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2 \leq \varrho^*, \quad (22)$$

причем величины $a_{\max}$, ρ и ϱ^* известны.

Теорема 2. Пусть шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ в уравнении (1) описывается негауссовским процессом Леви (6), причем выполнены условия (21). Тогда для всех $d \geq 2$ оценка (12) при $c = \rho^2(d-1)\gamma_n/n$ является улучшенной, т.е. разность рисков (13) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) < 0,$$

где $p \geq [2\sqrt{2}\pi\beta d^2 n / (\sqrt{3}\rho^2(d-1)\gamma_n)] + 1$.

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой 1, требуется проверить выполнение условий (C_1) и (C_2) для негауссовского процесса Леви (6). Из (10), (11) имеем

$$\langle V_{p,n}(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = n^{-1} \mathbf{E} (I_n(\psi_{i,p}) I_n(\psi_{j,p}) | \mathcal{G}).$$

Отсюда находим

$$\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})) = \sup_{\|z\|=1} z' \mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G}) z = \sup_{\|z\|=1} n^{-1} \mathbf{E} I_n^2(g), \quad (23)$$

где $g(t; z) = \sum_{j=1}^d z_j \psi_{j,p}(t)$, а $I_n(f)$ и $\psi_{j,p}(t)$ определены в (3) и (8) соответственно. Учитывая, что для процесса (6) выполнено условие (4)

с $\sigma_Q = \varrho^*$, а также ортогональность функций $\psi_{j,p}(t)$ на решетке (5) для базиса (20), получаем

$$n^{-1} \mathbf{E} I_n^2(g) \leq \varrho^* n^{-1} \int_0^n g^2(t; z) dt = \varrho^* \|z\|^2,$$

т.е. выполнено условие $(\mathbf{C}_1)$: $\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})) \leq \varrho^*$.

Далее, учитывая независимость процессов $(w_t)_{t \geq 0}$ и $(z_t)_{t \geq 0}$, имеем

$$V_{p,n}(\mathcal{G}) = \varrho_1^2 I_d + \varrho_2^2 D_{p,n}(\mathcal{G}),$$

где $D_{p,n}(\mathcal{G})$ — матрица с элементами

$$\langle D_{p,n}(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = n^{-1} \mathbf{E} (\tilde{I}_n(\psi_i) \tilde{I}_n(\psi_j) | \mathcal{G}), \quad \tilde{I}_n(f) = \int_0^n f(t) dz_t.$$

Отсюда получаем оценку

$$\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \varrho_1^2 (\text{tr } I_d - \lambda_{\max}(I_d)) \geq \rho^2 (d - 1) \quad \text{п.н.},$$

т.е. выполнено условие $(\mathbf{C}_2)$ с $\kappa = \rho^2 (d - 1)$.

Учитывая неравенство (14) и следствие 1, приходим к утверждению теоремы 2.

Теорема 3. Пусть шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ в уравнении (1) описывается негауссовским процессом Орнштейна–Уленбека (7), причем выполнены условия (22). Тогда найдутся числа d_0 и p_0 такие, что для всех $d \geq d_0$ и $p \geq p_0$ оценка (12) при $c = \rho^2 (d/4 - 2) \gamma_n / n$ является улучшенной, т.е. разность рисков (13) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) < 0.$$

Доказательство. Проверим условия $(\mathbf{C}_1)$ и $(\mathbf{C}_2)$ для негауссовского процесса Орнштейна–Уленбека. Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 3. В условиях теоремы 3 выполняется $(\mathbf{C}_1)$ с $\lambda^* = 3\varrho^*$.

Лемма 4. В условиях теоремы 3 найдутся d_0 и p' такие, что для всех $d \geq d_0$ и $p \geq p'$ выполнено условие $(\mathbf{C}_2)$ при $\kappa = \rho^2 (d/4 - 2)$.

Доказательства лемм 3 и 4 приводятся в приложении.

В силу неравенства (14), при всех $d \geq d_0$ и $p \geq p'$ для разности рисков (13) имеем

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) \leq -\tilde{c}^2 + \frac{2L\beta d}{\sqrt{3}p} \tilde{c}.$$

Полагаям $p_0 = \max(p', [2L\beta d / (\sqrt{3}\tilde{c})] + 1)$, получим утверждение теоремы 3.

4. Минимаксная граница для рисков оценок. В данном разделе для модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна–Уленбека (7) устанавливается асимптотическая минимаксность оценки (12) в смысле робастного риска при неограниченном росте числа периодов наблюдений n и в предположении, что частота p является функцией от n . Заметим, что понятие робастного риска впервые, по-видимому, использовалось в работе [11] при изучении оптимальности оценок в авторегрессии с неизвестным распределением помехи. Для задач непараметрической регрессии робастный риск был введен в [12].

В качестве оценки вектора θ в модели (1) может использоваться произвольная борелевская функция $T_{p,n}$ от дискретных наблюдений $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$. Робастный риск оценки $T_{p,n}$ для модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна–Уленбека (7) определим формулой

$$R^*(T_{p,n}, \theta) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \delta_{Q,p} n \mathbf{E}_{\theta,Q} \|T_{p,n} - \theta\|^2, \quad (24)$$

где $\mathcal{Q}_n^* = \mathcal{Q}_n^*(a_{\max}, \rho, \varrho^*)$ — семейство всех распределений Q_n процесса (7) в пространстве Скорохода $\mathcal{D}[0, n]$, удовлетворяющих неравенствам (22). Нормирующий множитель $\delta_{Q,p}$ выберем из условия, чтобы асимптотический робастный риск оценки МНК (8) по дискретным наблюдениям равнялся единице, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) = 1$. Как будет показано ниже, это требование выполняется, если

$$\delta_{Q,p}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr } \mathbf{E}_{\theta,Q} V_{p,n}(\mathcal{G}). \quad (25)$$

Учитывая (10) и (11), имеем

$$\text{tr } \mathbf{E}_{\theta,Q} V_{p,n}(\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^d \langle \mathbf{E}_{\theta,Q} V_{p,n}(\mathcal{G}) \rangle_{jj} = n^{-1} \sum_{j=1}^d \mathbf{E}_{\theta,Q} I_n^2(\psi_{j,p}). \quad (26)$$

Здесь интеграл $I_t(f) = \int_0^t f(s) d\xi_s$ по процессу Орнштейна–Уленбека (7) удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dI_t(f) = af(t)\xi_t dt + f(t) du_t, \quad I_0(f) = 0.$$

Применяя формулу Ито для семимартингалов (см., например, [13, гл. 2, §3, с. 99]), получаем

$$\mathbf{E}_{\theta,Q} I_t^2(f) = (\varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2) \int_0^t (f^2(s) + f(s) \varepsilon_f(s)) ds, \quad (27)$$

где $\varepsilon_f(s) = ae^{as} \int_0^s f(v) \cosh(av) dv$. Подставляя (27) в (26), находим

$$\text{tr } \mathbf{E}_{\theta,Q_n} V_{p,n}(\mathcal{G}) = (\varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2) d + \frac{(\varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2) a}{n} \sum_{j=1}^d C_{j,p}(n), \quad (28)$$

где

$$C_{j,p}(n) = \int_0^n e^{at} \psi_{j,p}(t) \left(\int_0^t \cosh(av) \psi_{j,p}(v) dv \right) dt.$$

Оценку $\hat{T}_{p,n}$ назовем асимптотически минимаксной в смысле робастного риска (24), если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{T_{p,n}} R^*(T_{p,n}, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{T}_{p,n}, \theta). \quad (29)$$

Согласно теореме 3, риск улучшенной оценки (12) при выполнении условий (22) не превосходит риска оценки МНК (8). Поэтому достаточно доказать асимптотическую минимаксность соответствующей оценки МНК $\hat{\theta}_{p(n)}(n)$.

Теорема 4. Пусть распределение помех в модели (1) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n^* = \mathcal{Q}_n^*(a_{\max}, \rho, \varrho^*)$, определенному после (24), и частота наблюдений $p = p(n)$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/\sqrt{n} = +\infty$. Тогда оценка МНК параметра θ по дискретным наблюдениям (8) является асимптотически минимаксной в смысле робастного риска.

Доказательство теоремы 4. Чтобы доказать асимптотическую минимаксность оценки МНК $\hat{\theta}_{p(n)}(n)$ в смысле робастного риска, требуется проверить равенство (29). При нахождении нижней границы для асимптотического риска воспользуемся теоремой Гаека для параметрического семейства, обладающего свойством ЛАН (см., например, [8, гл. II, §12, с. 223]). Рассмотрим частный случай модели (1)–(7) с $a = 0$, $\varrho_1 = 1$ и $\varrho_2 = 0$, т.е.

$$dy_t = \sum_{j=1}^d \theta_j \phi_j(t) dt + dw_t, \quad 0 \leq t \leq n. \quad (30)$$

Этой модели отвечает семейство распределений $(\mathbf{P}_\theta^{(n)}: \theta \in \Theta)$ процесса $(y_t)_{t \geq 0}$. Это семейство обладает свойством локальной асимптотической нормальности. Действительно, согласно теореме 1 из [8, приложение 2], плотность меры $\mathbf{P}_\theta^{(n)}$ относительно $\mathbf{P}_{\theta_0}^{(n)}$ для любого $u \in \Theta$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^{(n)}}{d\mathbf{P}_{\theta_0}^{(n)}}(y) = \exp \left\{ u' \Delta_n - \frac{\|u\|^2}{2} \right\},$$

где $\Delta_n = (\Delta_{1,n}, \dots, \Delta_{d,n})'$, случайные величины $\Delta_{j,n} = n^{-1/2} \int_0^n \phi_j(t) dw_t$ имеют стандартное гауссовское распределение.

Доказательство асимптотической минимаксности оценки МНК сводится к получению нижней и верхней границ для робастного риска.

Лемма 5. Пусть $(\mathbf{P}_\theta^{(n)}: \theta \in \Theta)$ — семейство вероятностных мер процесса (30). Тогда для любой последовательности оценок $(T_{p,n})_{n \geq 1}$ минимаксный робастный риск удовлетворяет неравенству

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(T_{p,n}, \theta) \geq 1.$$

Доказательство леммы 5. Так как распределение броуновского движения $Q_0 = \mathcal{Q}_n^*(0, 1, 1)$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_n^*$ распределений процесса Орнштейна–Уленбека, то

$$\begin{aligned} \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(T_{p,n}, \theta) &= \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \delta_{Q,p} n \mathbf{E}_{\theta,Q} \|T_{p,n} - \theta\|^2 \\ &\geq \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} n d^{-1} \mathbf{E}_{\theta,Q_0} \|T_{p,n} - \theta\|^2. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве учтено, что, согласно (28), $\delta_{Q,p} = d^{-1}$. Применяя теорему Гаека с квадратичной функцией потерь $w(x) = \|x\|^2$, получаем требуемое неравенство.

Следующее утверждение дает верхнюю границу для риска оценки МНК.

Лемма 6. В условиях теоремы 4 риск (24) оценки МНК (8) удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) \leq 1.$$

Доказательство леммы 6. Из (10) с помощью элементарного неравенства (18) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\hat{\theta}_{p(n)}(n) - \theta\|^2 &\leq (1 + \varepsilon) \mathbf{E} \|\hat{\theta}_{p(n)}(n) - \theta - H_p(\theta)\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) \|H_p(\theta)\|^2 \\ &= (1 + \varepsilon) \operatorname{tr} \mathbf{E}_{\theta,Q} V_{p,n}(\mathcal{G}) + (1 + \varepsilon^{-1}) \|H_p(\theta)\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение (24) и учитывая (25) и (19), находим неравенство для робастного риска оценки МНК:

$$\begin{aligned} R^*(\hat{\theta}_{p(n)}(n), \theta) &\leq (1 + \varepsilon) \sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \delta_{Q,p} n \operatorname{tr} \mathbf{E}_{\theta,Q} V_{p,n}(\mathcal{G}) + (1 + \varepsilon^{-1}) \|H_p(\theta)\|^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon^{-1}) (L\beta d)^2 \frac{n}{3p^2(n)} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \delta_{Q,p}. \end{aligned}$$

Поскольку $n/p^2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{\theta}_p(n)(n), \theta) \leq 1 + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению леммы.

Из лемм 5 и 6 следует утверждение теоремы 4.

Следствие 2. При выполнении условий теорем 3 и 4 предложенная в разделе 2 оценка (12) параметра θ в модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна–Уленбека, построенная по дискретным наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$, является асимптотически минимаксной в смысле робастного риска.

З а м е ч а н и е. Теорема 4 остается справедливой для шума Леви (6), поскольку этот процесс является частным случаем процесса Орнштейна–Уленбека (7) при $a = 0$.

5. Заключение. В работе рассмотрена задача оценивания параметров регрессии в непрерывном времени с семимартингальными помехами в предположении, что процесс доступен наблюдению только в дискретные моменты времени. С использованием подхода Стейна построена процедура оценивания неизвестных параметров. Доказано, что при определенных условиях на характеристики шумов процедура позволяет повысить среднеквадратическую точность оценивания по сравнению с классическими оценками МНК. Установлена асимптотическая эффективность оценок в смысле робастного риска. Изучены свойства предложенной процедуры для конкретных моделей помех импульсного типа, представляющих интерес для приложений. Результаты могут быть полезными при обработке сигналов, наблюдаемых на фоне импульсных помех случайной амплитуды, действующих в случайные моменты времени, при условии, что высокочастотный съем информации нереализуем.

А. Приложение

А.1. Доказательство леммы 2. Рассмотрим

$$\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} = \mathbf{E}_\theta \|\theta + n^{-1/2} \zeta_p(n)\|^{-1} = \mathbf{E}_\theta (\|\theta + H_p(\theta) + n^{-1/2} \eta_p(n)\|)^{-1},$$

где $Y := \hat{\theta}_p(n)$, $\eta_p(n) := n^{-1/2}(I_n(\psi_{1,p}), \dots, I_n(\psi_{d,p}))'$. Применяя неравенство треугольника и оценку (19), имеем

$$\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} \geq \mathbf{E}_\theta (\alpha + n^{-1/2} \|I_n(\psi_p)\|)^{-1},$$

где $\alpha = (1 + Ld/(\sqrt{3}p))\beta$. Отсюда, в силу неравенств Йенсена, Коши–Буняковского и условия (C_1) , следует, что $\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} \geq \gamma_n$. Лемма 2 доказана.

А.2. Доказательство леммы 3. Из (10), (11) имеем

$$\langle V_{p,n}(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = n^{-1} \mathbf{E} (I_n(\psi_{i,p}) I_n(\psi_{j,p}) | \mathcal{G}).$$

Учитывая (23) и то, что для процесса (7) выполнено условие (4) с $\sigma_Q = 3\varrho^*$, а также ортогональность функций $\psi_{j,p}(t)$ на решетке (5) для базиса (20), получаем

$$n^{-1} \mathbf{E} I_n^2(g) \leq 3\varrho^* n^{-1} \int_0^n g^2(t) dt = 3\varrho^* \|z\|^2,$$

т. е. выполнено условие (C_1) : $\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})) \leq 3\varrho^*$. Лемма 3 доказана.

А.3. Доказательство леммы 4. Учитывая независимость процессов $(w_t)_{t \geq 0}$ и $(z_t)_{t \geq 0}$, имеем

$$V_{p,n}(\mathcal{G}) = \varrho_1^2 A_{p,n} + \varrho_2^2 B_{p,n}(\mathcal{G}),$$

где $A_{p,n}$ — матрица с элементами

$$\begin{aligned} \langle A_{p,n} \rangle_{ij} &= n^{-1} \mathbf{E} (I_n^{(1)}(\psi_{i,p}) I_n^{(1)}(\psi_{j,p})), \\ I_n^{(1)}(f) &= \int_0^n f(t) d\xi_t^{(1)}, \quad d\xi_t^{(1)} = a \xi_t^{(1)} dt + dw_t, \end{aligned} \quad (31)$$

а $B_{p,n}(\mathcal{G})$ — матрица с элементами

$$\begin{aligned}\langle B_n(\mathcal{G}) \rangle_{ij} &= \mathbf{E}(I_n^{(2)}(\phi_i) I_n^{(2)}(\phi_j) | \mathcal{G}), \\ I_n^{(2)}(f) &= \int_0^n f(t) d\xi_t^{(2)}, \quad d\xi_t^{(2)} = a\xi_t^{(2)} dt + dz_t.\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \varrho_1^2(\text{tr } A_{p,n} - \lambda_{\max}(A_{p,n})) \quad \text{п.н.}, \quad (32)$$

где $\lambda_{\max}(A_{p,n}) = \sup_{\|z\|=1} n^{-1} \mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2$. Применяя формулу Ито для семимартингалов (см., например, [13, гл. 2, §3, с. 99]), находим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2 &= 2a \int_0^n g(t) \mathbf{E} I_t^{(1)}(g) \xi_t^{(1)} dt + \int_0^n g^2(t) dt \\ &= a \int_0^n e^{av} \int_v^n g(t) g(t-v) dt dv + \int_0^n g^2(t) dt.\end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку для всех $a \leq 0$

$$\mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2 \leq \int_0^n g^2(t) dt \left(1 + |a| \int_0^\infty e^{av} dv \right) = 2 \int_0^n g^2(t) dt = 2n\|z\|^2,$$

то

$$\lambda_{\max}(A_{p,n}) \leq 2. \quad (34)$$

Оценим снизу $\text{tr } A_{p,n}$, предполагая без ограничения общности, что d является нечетным, т.е. $d = 2N + 1$. Используя (31) и (33), получаем

$$\text{tr } A_{p,n} = \sum_{j=1}^d \langle A_{p,n} \rangle_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^d \mathbf{E}(I_n^{(1)}(\psi_{j,p}))^2 = d + \sum_{j=1}^d \tau_j(p, n), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}\tau_j(p, n) &= \frac{a}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(s) \int_s^n e^{a(t-s)} \psi_{j,p}(t) dt ds = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{np} \sum_{l=1}^k \kappa_{k,l}(j), \\ \kappa_{k,l}(j) &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \phi_j(t_l) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_j(t_k) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds \\ &= \kappa_{k,l}^*(j) + r_{k,l}^{(1)} + r_{k,l}^{(2)} + r_{k,l}^{(3)}, \\ \kappa_{k,l}^*(j) &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \phi_j(s) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_j(t) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds, \\ r_{k,l}^{(1)} &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\phi_j(t_l) - \phi_j(s)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_j(t) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds, \\ r_{k,l}^{(2)} &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \phi_j(s) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_j(t_k) - \phi_j(t)) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds, \\ r_{k,l}^{(3)} &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\phi_j(t_l) - \phi_j(s)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_j(t_k) - \phi_j(t)) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds.\end{aligned}$$

Поскольку

$$|r_{k,l}^{(1)}| \leq \frac{2\pi j}{p} \mu_{l,k}, \quad |r_{k,l}^{(2)}| \leq \frac{2\pi j}{p} \mu_{l,k} \quad \text{и} \quad |r_{k,l}^{(3)}| \leq \frac{2(\pi j)^2}{p^2} \mu_{l,k},$$

где $\mu_{l,k} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds$, то

$$\begin{aligned} \tau_j(p, n) &\geq \frac{a}{n} \int_0^n \phi_j(s) \int_s^n e^{a(t-s)} \phi_j(t) dt ds \\ &\quad + \frac{a}{n} \left(\frac{4\pi j}{p} + \frac{2(\pi j)^2}{p^2} \right) \int_0^n \int_s^n e^{a(t-s)} dt ds. \end{aligned}$$

Отсюда и из (35) следует, что

$$\begin{aligned} \text{tr } A_{p,n} &\geq d + \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds \\ &\quad - \left(\frac{1 - e^{an}}{an} + 1 \right) \left(\frac{2\pi d(d+1)}{p} + \frac{\pi^2 d(d+1)(2d+1)}{3p^2} \right), \quad (36) \end{aligned}$$

где $\Phi(t, s) = 1 + 2 \sum_{j=1}^N \cos(2\pi js)$. Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds &= \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \Phi(s) (n-s) ds \\ &\geq a \int_0^n e^{as} |\Phi(s)| ds = a \sum_{j=1}^n \int_{l-1}^l e^{as} |\Phi(s)| ds. \quad (37) \end{aligned}$$

Заметим, что для $l-1 < s < l$, имеем $\Phi(s) = \sin(\pi ds)/\sin(\pi s)$. Пусть $0 < \delta < 1/4$. Тогда для всех интервалов $l-1+\delta \leq s \leq l-\delta$, $l=1, \dots, n$, справедлива оценка $|\sin(\pi s)| = \sin(\pi(s-l+1)) \geq \sin(\delta\pi) \geq 2\sqrt{2}\delta$. Поэтому $\sup_{l-1+\delta \leq s \leq l-\delta} |\Phi(s)| \leq 1/(2\sqrt{2}\delta)$ и

$$\begin{aligned} \int_{l-1}^l e^{as} |\Phi(s)| ds &= \int_{l-1+\delta}^{l-\delta} e^{as} |\Phi(s)| ds \\ &\quad + \int_{l-\delta}^l e^{as} |\Phi(s)| ds + \int_{l-1}^{l-1+\delta} e^{as} |\Phi(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}\delta} \int_{l-1}^l e^{as} ds + 2d\delta a e^{a(l-1)}, \quad l=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (37), имеем

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds &\geq \frac{a}{2\sqrt{2}\delta} \int_0^n e^{as} ds + 2d\delta \frac{a}{1-e^a} \\ &\geq -\frac{1}{2\sqrt{2}\delta} + 2d\delta c', \quad c' = \frac{a_{\max}}{1-e^{-a_{\max}}}. \end{aligned}$$

Используя эту оценку в (36) при $\delta = 1/(4(1 + c'))$, получаем

$$\operatorname{tr} A_{p,n} \geq \frac{d}{2} - \sqrt{2}(1 + c') - (1 - c_n'')\pi \frac{d(d+1)(6p + (2d+1)\pi)}{3p^2},$$

$$c_n'' = \frac{1 - e^{-a_{\max} n}}{a_{\max} n}.$$

Далее, выбирая сначала d' , а затем p' , приходим к оценке

$$\operatorname{tr} A_{p,n} \geq \frac{d}{4} \quad \text{для всех } d \geq d' \text{ и } p \geq p'.$$

Отсюда и из неравенств (32) и (34) следует, что при $d_0 = \max(d', 9)$ для процесса (6) выполнено условие (C_2) , т.е.

$$\operatorname{tr} V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \rho^2 \left(\frac{d}{4} - 2 \right) \quad \text{п.н.}$$

Лемма 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
2. James W., Stein C. Estimation with quadratic loss. — Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 1. Berkeley: Univ. of California, 1961, p. 361–379.
3. Lehmann E. L., Casella G. Theory of Point Estimation. New York: Springer, 1998, 589 p.
4. Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975, 776 с.
5. Fourdrinier D. Statistique Inférentielle. Paris: Dunod, 2002, 336 p.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
7. Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N. Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 2001, v. 63, № 2, p. 167–241.
8. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
9. Delong L., Klüppelberg C. Optimal investment and consumption in a Black–Scholes market with Lévy-driven stochastic coefficients. — Ann. Appl. Probab., 2008, v. 18, № 3, p. 879–908.
10. Stein C. M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. — Ann. Statist., 1981, v. 9, № 6, p. 1135–1151.
11. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Оптимальные методы оценивания коэффициентов авторегрессии при неполной информации. — Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет., 1983, № 1, с. 118–126.
12. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. M. Asymptotically efficient estimates for nonparametric regression models. — Statist. Probab. Lett., 2006, v. 76, № 8, p. 852–860.
13. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.

Поступила в редакцию
13.VII.2012

Исправленный вариант
08.VII.2013