Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Хиль, Марковские зависимости в последовательности локальных максимумов и промежутков между ними, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 472–485

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:12:27

© 2013 г.

ХИЛЬ Е. В.*

МАРКОВСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ МАКСИМУМОВ И ПРОМЕЖУТКОВ МЕЖДУ НИМИ¹⁾

Изучаются распределения длин промежутков между локальными максимумами в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что последовательность этих длин образует скрытую цепь Маркова. Получены явные формулы для совместных распределений длин соседних промежутков.

Ключевые слова и фразы: локальные максимумы, скрытая цепь Маркова, симметрично зависимые случайные величины.

1. Введение. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность действительных случайных величин, $\chi_n = I\{\xi_{n-1} < \xi_n > \xi_{n+1}\}$, $n \in \mathbf{Z}$, — индикаторы локальных максимумов этой последовательности, $\{\tau_j, j \in \mathbf{Z}\} = \{n \in \mathbf{Z}: \chi_n = 1\}$ — возрастающая последовательность всех моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$ и $\lambda_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ — длины промежутков между соседними локальными максимумами.

Распределения длин λ_j изучались в [1], [2] в предположении, что случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы и одинаково распределены. Очевидно, что в этом случае величины λ_j одинаково распределены.

Теорема 1 (см. [1]). *Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то*

$$\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} &= \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\} \\ &= \frac{3}{(k+l+3)!} \sum_{m=1}^{k+l+2} \sum_{n=1}^{k+2} C_{m-1}^{n-1} C_{k+l+3-m}^{k+3-n} P(k, n) Q(l, m-n+1), \end{aligned} \quad (2)$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: elena.hill@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00139).

где

$$P(k, n) = \begin{cases} k \cdot 2^k - (2k - n + 3) \cdot 2^{n-3}, & \text{если } n \geq 3, \\ k \cdot 2^k - (k + 1), & \text{если } n \in \{1, 2\}; \end{cases}$$

$$Q(l, m) = \begin{cases} (2l - m - 1) \cdot 2^{m-3}, & \text{если } m \geq 3, \\ l - 1, & \text{если } m \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Из теоремы 1 следует, что случайные величины последовательности $\{\lambda_j, j \in \mathbf{Z}\}$ зависимы, однако характер этой зависимости в [1] не был описан. В настоящей статье показано, что последовательность $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$, $j \in \mathbf{Z}$, является цепью Маркова, а значит, последовательность $\{\lambda_j\}$ образует скрытую цепь Маркова.

Показано также, что многие предыдущие результаты можно обобщить на случай, когда случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ перестановочны и $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$.

В предположении о равномерности распределения независимых случайных величин $\{\xi_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ найдены условные распределения граничных пиков ξ_{τ_j} , которые позволили получить явную формулу для совместных распределений $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$ длин соседних промежутков между локальными максимумами.

Результаты настоящей работы были анонсированы в [3], [4].

Автор благодарит А. М. Зубкова за внимание к работе и плодотворные дискуссии.

2. Формулировка результатов.

2.1. Цепь Маркова.

Теорема 2. Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то последовательность пар $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$, $j \in \mathbf{Z}$, образует цепь Маркова.

Переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_{(\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_{j+1}}) | (\lambda_j, \xi_{\tau_j})}((k, y) | (l, x)) &= \frac{p_{\lambda_j, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(k, x, y)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} \\ &= \frac{p_k(x, y) \cdot \mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = k\}}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p_{\xi_{\tau_j}}(x)$ — плотность распределения локального максимума последовательности $\{\xi_i\}$, $p_{\lambda_j, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(k, x, y)$ — плотность совместного распределения соседних локальных максимумов и расстояния между ними, $p_k(x, y)$ — условная плотность совместного распределения соседних локальных максимумов при условии, что расстояние между ними равно k .

2.2. Совместное распределение соседних максимумов. На протяжении этого пункта случайные величины ξ_n независимы и имеют

равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. В таком случае переходные плотности цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ имеют простой аналитический вид. Рассмотрим два соседних локальных максимума $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$. Введем обозначения $\xi_{\min} = \min\{\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}\}$, $\xi_{\max} = \max\{\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}\}$.

Лемма 1. *Условная плотность $g_k(x, y)$ совместного распределения вектора $(\xi_{\min}, \xi_{\max})$ при условии, что $\lambda_j = k$, имеет вид*

$$g_k(x, y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^k} xy ((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}) \quad (4)$$

при $0 \leq x \leq y \leq 1$.

В качестве следствия леммы 1 получим одномерные плотности условных распределений $\xi_{\min}, \xi_{\max}$.

Следствие 1. *Пусть $g_k^-(x)$ — условная плотность $\xi_{\min}$ и $g_k^+(y)$ — условная плотность $\xi_{\max}$. Тогда*

$$g_k^-(x) = (k+3)x \left(\frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{(k-1) \cdot 2^k} - x^{k+1} \right), \quad (5)$$

$$g_k^+(y) = (k+3)y^{k+2}. \quad (6)$$

В силу симметрии условная плотность каждого из граничных пиков $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$ равна полусумме плотностей $g_k^-(x), g_k^+(x)$:

$$\begin{aligned} p_{k, \xi_{\tau_j}}(x) &= \frac{1}{2} (g_k^-(x) + g_k^+(x)) \\ &= (k+3)x \frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{(k-1) \cdot 2^{k+1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выразим также условную вероятность события $\{\lambda_{j-1} = k\}$ через условную плотность граничного пика:

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} = \mathbf{P}\{\lambda_j = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} = \frac{p_{k, \xi_{\tau_j}}(x) \cdot \mathbf{P}\{\lambda_j = k\}}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)}.$$

Подставляя сюда выражения (7), (1) и учитывая, что

$$p_{\xi_{\tau_j}}(x) = p_{\max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}}(x) = 3x^2, \quad (8)$$

получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} \\ &= \frac{(k+3)x[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k]}{3x^2(k-1) \cdot 2^{k+1}} \cdot \frac{3(k+2)(k-1) \cdot 2^k}{(k+3)!} \\ &= \frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что первый множитель в (9) (отношение плотностей $p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)$ и $p_{\xi_{\tau_j}}(x)$) имеет следующие пределы:

$$\begin{aligned} \frac{p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} &= \frac{(k+3)x[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k]}{3x^2(k-1) \cdot 2^{k+1}} \\ &\rightarrow \frac{k+3}{6}, \quad x \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Следствие 2. Если случайные величины ξ_i независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то условные математические ожидания граничных локальных максимумов при условии, что $\lambda_j = k$, удовлетворяют соотношениям при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi_{\min} | \lambda_j = k) &= 1 - \frac{3k^2 + 3k - 14 + (k-3) \cdot 2^{-(k-2)}}{(k+4)(k+2)(k-1)} \sim 1 - \frac{3}{k}, \\ \mathbf{E}(\xi_{\max} | \lambda_j = k) &= 1 - \frac{1}{k+4} \sim 1 - \frac{1}{k}, \\ \mathbf{E}(\xi_{\tau_j} | \lambda_j = k) &= 1 - \frac{(k^2 + k - 4) \cdot 2^k + k - 3}{(k+4)(k+2)(k-1) \cdot 2^{k-1}} \sim 1 - \frac{2}{k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что условная плотность $p_k(x, y)$ совместного распределения граничных пиков $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$ при условии, что $\lambda_j = k$, имеет вид $p_k(x, y) = g_k(x, y)I\{x \leq y\} + g_k(y, x)I\{x > y\}$, следовательно,

$$p_k(x, y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^{k+1}} xy ((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1}) \quad (13)$$

при $0 \leq x, y \leq 1$. Воспользовавшись формулой (3), найдем переходную плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$.

Теорема 3. Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ имеет вид

$$\begin{aligned} &P_{(\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_{j+1}}) | (\lambda_j, \xi_{\tau_j})}((k, y) | (l, x)) \\ &= \frac{1}{2(k-1)!} \frac{y((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1})}{x}, \quad x, y \in [0, 1], \quad l, k \geq 2. \end{aligned}$$

2.3. Совместное распределение длин соседних промежутков. Полученные условные вероятности позволяют найти точные формулы для совместных вероятностей $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$, которые в теореме 1 представлены в виде двойных сумм, а также для вероятностей вида $\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\}$, входящих в формулы для параметров предельного распределения в теореме 3 из [1].

Теорема 4. Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда при $k, l \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} &= \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{k+l-1} (C_{k+l}^l \cdot (kl(k+l+1) + 1 - k^2 - l^2) - (k+l-1)(k+1)(l+1))}{(l+1)(k+1)(k+l+3)(k+l+1)!}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} &= \frac{3 \cdot 2^{k+l}}{(l+1)!(k+1)!} \\ &\times \left(\frac{kl(k+l+5)^2 - (k+l+3)((k+l)^2 + 6(k+l) - 3)}{(k+3)(l+3)(k+l+3)(k+l+5)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(k+l+1)}{(k+l+3)(k+l+5)C_{k+l+2}^{l+1}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В табл. 1 и 2 представлены значения совместных вероятностей (14) и (15) с точностью до пятого знака.

Таблица 1. Вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$.

$k \backslash l$	2	3	4	5	6	7	8
2	0.16190	0.13333	0.06773	0.02603	0.00818	0.00219	0.00051
3	0.13333	0.11111	0.05714	0.02222	0.00705	0.00190	0.00045
4	0.06773	0.05714	0.02976	0.01171	0.00376	0.00102	0.00024
5	0.02603	0.02222	0.01171	0.00466	0.00151	0.00041	0.00010
6	0.00818	0.00705	0.00376	0.00151	0.00049	0.00014	0.00003
7	0.00219	0.00190	0.00102	0.00041	0.00014	0.00004	0.00001
8	0.00051	0.00045	0.00024	0.00010	0.00003	0.00001	0.00000

Таблица 2. Вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}$.

$k \backslash l$	2	3	4	5	6	7	8
2	0.06561	0.05397	0.02738	0.01051	0.00330	0.00088	0.00021
3	0.05397	0.04444	0.02258	0.00868	0.00273	0.00073	0.00017
4	0.02738	0.02258	0.01148	0.00442	0.00139	0.00037	0.00009
5	0.01051	0.00868	0.00442	0.00170	0.00054	0.00014	0.00003
6	0.00330	0.00273	0.00139	0.00054	0.00017	0.00005	0.00001
7	0.00088	0.00073	0.00037	0.00014	0.00005	0.00001	0.00000
8	0.00021	0.00017	0.00009	0.00003	0.00001	0.00000	0.00000

З а м е ч а н и е 1. Напомним (см. [1]), что события $\{\lambda_j = 3\}$ не зависят от значений $\{\lambda_i\}_{i \neq j}$. Нетрудно убедиться, что формула (14) превращается в (1) при подстановке $l = 3$ (и делении на $\mathbf{P}\{\lambda = 3\} = 1/3$).

З а м е ч а н и е 2. Совместные вероятности (14) можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} = \frac{3 \cdot 2^{k+l-1}}{(k+l)! k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \right), \quad k, l \rightarrow \infty,$$

а совместные вероятности (15) — в виде (при $k, l \rightarrow \infty$)

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} = \frac{3 \cdot 2^{k+l}}{(l+1)!(k+1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\right).$$

Следствие 3. Имеем $\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) \approx 0.01572$. Далее, пусть ρ — расстояние по вариации между совместным распределением λ_1, λ_2 и совместным распределением двух независимых случайных величин λ, λ' . Тогда $\rho \approx 0.0038$.

Таким образом, распределение случайных величин λ_1, λ_2 очень близко (в смысле расстояния по вариации) к распределению соответствующих независимых случайных величин. Однако для отношения совместных вероятностей (14) к произведению соответствующих маргинальных вероятностей на хвостах справедлива следующая асимптотика:

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}}{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = l\}} \sim \frac{kl}{6(k+l)}, \quad k, l \rightarrow \infty.$$

Таблица 3. Отношение $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}/(\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = l\})$.

$k \backslash l$	2	3	4	8	16	32	64	128	256
2	1.01	1	0.99	0.95	0.91	0.88	0.86	0.85	0.84
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0.99	1	1.01	1.05	1.09	1.12	1.14	1.15	1.16
8	0.95	1	1.05	1.22	1.42	1.58	1.69	1.76	1.79
16	0.91	1	1.09	1.42	1.84	2.27	2.62	2.86	3.01
32	0.88	1	1.12	1.58	2.27	3.15	4.03	4.75	5.23
64	0.86	1	1.14	1.69	2.62	4.03	5.80	7.58	9.01
128	0.85	1	1.15	1.76	2.86	4.75	7.58	11.13	14.69
256	0.84	1	1.16	1.79	3.01	5.23	9.01	14.69	21.79

Таким образом, условная вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_j = k | \lambda_{j-1} = k\}$ асимптотически больше безусловной вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$ в $k/12$ раз. Это можно объяснить следующим образом. Обратим внимание на то, что вероятность появления длинного промежутка между пиками исчезающе мала. При этом длинный промежуток делает более вероятными большие значения граничных пиков. Из (9), (10) следует, что условная вероятность события $\{\lambda_j = k\}$ при фиксированном значении левого граничного пика, близком к 1, примерно в $k/6$ раз больше, чем безусловная. Таким образом, длинные промежутки с большей вероятностью имеют большие граничные пики, и наоборот, вероятность наблюдать длинный промежуток после большого пика выше, чем после небольшого.

Заметим, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}}{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = l-1\}} \sim \frac{k}{3(k+l)}, \quad k, l \rightarrow \infty.$$

Отметим также, что при $k, l \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \mid \lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l\}} = \frac{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}}{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}\mathbf{P}\{\lambda_3 = l\}} \sim 1 - \frac{2l}{k(k+l)},$$

т.е. промежуток длины 2 нивелирует влияние предыдущего длинного промежутка. Это не противоречит предыдущим рассуждениям, так как в этом случае левый граничный пик промежутка длины 2, являющийся одновременно правым граничным пиком длинного промежутка, с большой вероятностью будет иметь большое значение и поэтому почти не повлияет на распределение следующего за ним элемента последовательности $\{\xi_n\}$. Следовательно, правый граничный пик промежутка длины 2 будет устроен почти так же, как и произвольный локальный максимум.

Формулы (14) и (15) позволяют найти отношение условных вероятностей

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \mid \lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \mid \lambda_2 = 2\}} = \frac{6}{5} \left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \right), \quad k, l \rightarrow \infty,$$

которое показывает, что $\{\lambda_j\}$ не является цепью Маркова.

2.4. Переход от независимых случайных величин к перестановочным.

Утверждение 1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ — такая последовательность перестановочных случайных величин, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$. Тогда последовательность $\{\tau_j, j \in \mathbf{Z}\}$ моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$ имеет такое же распределение, как последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Утверждение 1 показывает, что ряд ранее доказанных утверждений, в частности теорема 4 настоящей статьи и теоремы 1–4 из [1], справедливы не только для независимых, но и для перестановочных случайных величин.

Заметим, что для перестановочных случайных величин последовательности $\{\xi_n\}_{n \leq t+2}$ и $\{\xi_n\}_{n > t+2}$ не являются независимыми, тем не менее справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. События $\{\lambda_j = 3\}$ являются регенерирующими для последовательности $\{\lambda_j\}$, т.е. при условии $\{\lambda_j = 3\}$ последовательности $\{\lambda_n\}_{n < j}$ и $\{\lambda_n\}_{n > j}$ независимы и одинаково распределены.

З а м е ч а н и е 3. Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ перестановочны, то последовательность пар $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ представляет собой смесь цепей Маркова, при этом распределения λ -компонент одинаковы по смеси.

3. Доказательства.

3.1. Доказательство теоремы 2. Покажем, что последовательность $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ обладает марковским свойством и что переходные вероятности цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ не зависят от значения первой компоненты в настоящий момент. Без ограничения общности будем считать, что $\tau_j = k$, и введем обозначения $\xi^- = (\dots, \xi_{k-2}, \xi_{k-1})$, $\xi^+ = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots)$. Так как случайные величины последовательности $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ независимы, то ξ^- и ξ^+ независимы, а также независимы события $\{\xi_{k-1} < x\}$, $\{x > \xi_{k+1}\}$ для любых x . Следовательно, для произвольных борелевских множеств B и C

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi^- \in B, \xi^+ \in C \mid \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B, \xi^+ \in C, \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B, \xi_{k-1} < x\} \mathbf{P}\{\xi^+ \in C, x > \xi_{k+1}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B, \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\} \mathbf{P}\{\xi^+ \in C, \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\} \mathbf{P}\{\xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}} \\ &= \mathbf{P}\{\xi^- \in B \mid \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\} \mathbf{P}\{\xi^+ \in C \mid \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}, \quad (16) \end{aligned}$$

и, значит, ξ^- и ξ^+ условно независимы при фиксированном значении локального максимума ξ_k . Перепишем (16) в виде

$$\mathbf{P}\{\xi^+ \in C \mid \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}, \xi^- \in B\} = \mathbf{P}\{\xi^+ \in C \mid \xi_{k-1} < x > \xi_{k+1}\}. \quad (17)$$

Выбирая $C = \{x \in \mathbf{R}^\infty: x_i < \max(x_{i-1}, x_{i+1}), i = 2, 3, \dots, l-2, x_{l-1} < x_l > x_{l+1}, x_l \in D\}$, получим, что $\{\lambda_{j+1} = l, \xi_{\tau_{j+1}} \in D\} = \{\xi^+ \in C, \xi_{k-1} < \xi_k > \xi_{k+1}\}$, следовательно, (17) превращается в марковское свойство для последовательности $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ (см. [5, гл. VIII]).

3.2. Доказательство леммы 1. Пусть $0 \leq x \leq y \leq 1$. Без потери общности будем считать, что $\tau_{j-1} = 2$. Для нахождения плотности $g_k(x, y)$ воспользуемся формулой полной вероятности по номеру $\xi_{\min}$ в вариационном ряду, построенном по случайным величинам $\xi_1, \dots, \xi_{k+3}$:

$$g_k(x, y) = \sum_{t=3}^{k+2} p_{\xi(t), \xi(k+3)}(x, y) \cdot \mathbf{P}\{\xi_{\min} = \xi(t) \mid \lambda_j = k\},$$

где $p_{\xi(t), \xi(k+3)}(x, y)$ — совместная плотность t -го и $(k+3)$ -го членов вариационного ряда. Так как случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_{k+3}$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0, 1]$, то

$$p_{\xi(t), \xi(k+3)}(x, y) = (k+3)(k+2)C_{k+1}^{t-1}x^{t-1}(y-x)^{k+2-t}.$$

Значения вероятностей $\mathbf{P}\{\xi_{\min} = \xi_{(t)} \mid \lambda_j = k\}$ вычисляются по формулам (см. доказательство теоремы 1 в [1])

$$\mathbf{P}\{\xi_{\min} = \xi_{(t)} \mid \lambda_j = k\} = \begin{cases} \frac{2(k-1)}{h(k)}, & t = 3, \\ \frac{(t-1)(2k-t+2) \cdot 2^{t-4}}{h(k)}, & t = 4, 5, \dots, k+2, \end{cases}$$

где $h(k) = (k+2)(k-1) \cdot 2^{k-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} g_k(x, y) &= (k+3)(k+2)C_{k+1}^2 x^2 (y-x)^{k-1} \cdot \frac{2(k-1)}{(k+2)(k-1) \cdot 2^{k-1}} \\ &\quad + (k+3)(k+2) \sum_{t=4}^{k+2} C_{k+1}^{t-1} x^{t-1} (y-x)^{k+2-t} \cdot \frac{(t-1)(2k-t+2) \cdot 2^{t-4}}{(k+2)(k-1) \cdot 2^{k-1}} \\ &= \frac{k(k+1)(k+3)}{2^{k-1}} x^2 (y-x)^{k-1} \\ &\quad + \frac{k+3}{(k-1) \cdot 2^{k+2}} \sum_{t=3}^{k+1} t(2k+1-t) C_{k+1}^t (2x)^t (y-x)^{k+1-t}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно последнюю сумму:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=3}^{k+1} t(2k+1-t) C_{k+1}^t (2x)^t (y-x)^{k+1-t} \\ &= 2k \sum_{t=3}^{k+1} t C_{k+1}^t (2x)^t (y-x)^{k+1-t} - \sum_{t=3}^{k+1} t(t-1) C_{k+1}^t (2x)^t (y-x)^{k+1-t} \\ &= \left(2k \frac{d}{du} - \frac{d^2}{du^2} \right) \left[(2xu + y-x)^{k+1} - C_{k+1}^1 \cdot 2xu(y-x)^k \right. \\ &\quad \left. - C_{k+1}^2 (2xu)^2 (y-x)^{k-1} \right] \Big|_{u=1} \\ &= 2k \left(2x(k+1)(y+x)^k - 2x(k+1)(y-x)^k - 4x^2 k(k+1)(y-x)^{k-1} \right) \\ &\quad - k(k+1) \cdot 4x^2 (y+x)^{k-1} + k(k+1) \cdot 4x^2 (y-x)^{k-1} \\ &= 4k(k+1)x \left(y(y+x)^{k-1} - (y-x)^k - x(2k-1)(y-x)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Подставим найденное значение в формулу для плотности и преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} g_k(x, y) &= \frac{k(k+1)(k+3)}{2^{k-1}} x^2 (y-x)^{k-1} \\ &\quad + \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^k} x \left(y(y+x)^{k-1} - (y-x)^k - x(2k-1)(y-x)^{k-1} \right) \\ &= \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^k} xy \left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Итак, плотность совместного распределения $\xi_{\min}, \xi_{\max}$ при условии, что $\lambda_j = k$, имеет вид

$$g_k(x, y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^k} xy ((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}), \quad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Условную плотность $\xi_{\min}$ можно вычислить как интеграл:

$$\begin{aligned} g_k^-(x) &= \int_x^1 g_k(x, y) dy \\ &= \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1) \cdot 2^k} x \int_x^1 y ((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}) dy \\ &= (k+3)x \left(\frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{(k-1) \cdot 2^k} - x^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Условная плотность $\xi_{\max}$ совпадает с плотностью максимума из $k+3$ независимых равномерно распределенных случайных величин. Поэтому

$$g_k^+(y) = (k+3)y^{k+2}. \quad (19)$$

3.3. Доказательство теоремы 4. Вычислим совместную вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$ как среднее значение условной вероятности:

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l\} = \int_0^1 \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l \mid \xi_{\tau_j} = x\} \cdot p_{\xi_{\tau_j}}(x) dx. \quad (20)$$

Так как при условии $\{\xi_{\tau_j} = x\}$ события $\{\lambda_{j-1} = k\}$ и $\{\lambda_j = l\}$ независимы, то

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l \mid \xi_{\tau_j} = x\} = \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} \cdot \mathbf{P}\{\lambda_j = l \mid \xi_{\tau_j} = x\}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства выражение (9), получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l \mid \xi_{\tau_j} = x\} \\ &= \frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!} \cdot \frac{(l-x)(1+x)^l - (l+x)(1-x)^l}{2x(l+1)!} \\ &= \frac{[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k] \cdot [(l-x)(1+x)^l - (l+x)(1-x)^l]}{4x^2 \cdot (l+1)!(k+1)!}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь, используя (8) и (21), преобразуем формулу (20) к виду

$$\begin{aligned} &\frac{4(l+1)!(k+1)!}{3} \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l\} \\ &= \int_0^1 [(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(l-x)(1+x)^l - (l+x)(1-x)^l] dx \\
& = \int_0^1 x^2 [(1-x)^{k+l} + (1+x)^{k+l}] dx \\
& \quad + (k+l) \int_0^1 x [(1-x)^{k+l} - (1+x)^{k+l}] dx \\
& \quad + kl \int_0^1 [(1+x)^{k+l} + (1-x)^{k+l}] dx \\
& \quad - kl \int_0^1 [(1+x)^k(1-x)^l + (1+x)^l(1-x)^k] dx \\
& \quad - (k-l) \int_0^1 x [(1+x)^k(1-x)^l - (1+x)^l(1-x)^k] dx \\
& \quad + \int_0^1 x^2 [(1+x)^k(1-x)^l + (1+x)^l(1-x)^k] dx.
\end{aligned}$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 [(1+x)^{k+l} + (1-x)^{k+l}] dx &= \frac{2^{k+l+1}}{k+l+1}, \\
\int_0^1 x [(1-x)^{k+l} - (1+x)^{k+l}] dx &= -\frac{(k+l) \cdot 2^{k+l+1}}{(k+l+1)(k+l+2)}, \\
\int_0^1 x^2 [(1-x)^{k+l} + (1+x)^{k+l}] dx &= \frac{((k+l)^2 + k+l+2) \cdot 2^{k+l+1}}{(k+l+1)(k+l+2)(k+l+3)}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
I(k, l) &= \int_0^1 (1+x)^k (1-x)^l dx \\
&= \int_0^1 (1+1-y)^k y^l dy = \int_0^1 2^k \left(1 - \frac{y}{2}\right)^k y^l dy \\
&= 2^{k+l+1} \int_0^{1/2} t^l (1-t)^k dt = 2^{k+l+1} B_{1/2}(l+1, k+1) \\
&= \frac{1}{(k+l+1)C_{k+l}^l} \sum_{t=l+1}^{k+l+1} C_{k+l+1}^t,
\end{aligned}$$

где $B_x(l+1, k+1)$ — неполная бета-функция. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^1 [(1+x)^k(1-x)^l + (1+x)^l(1-x)^k] dx &= I(k, l) + I(l, k) \\
&= \frac{2^{k+l+1}}{(k+l+1)C_{k+l}^l}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\int_0^1 x(1+x)^k(1-x)^l dx = I(k, l) - I(k, l+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(l+1)C_{k+l+1}^{l+1}} \sum_{t=l+1}^{k+l+1} C_{k+l+1}^t \\
&\quad - \frac{1}{(k+l+2)C_{k+l+1}^{l+1}} \left(2 \sum_{t=l+1}^{k+l+1} C_{k+l+1}^t - C_{k+l+1}^{l+1} \right) \\
&= \frac{k-l}{(k+1)(k+l+2)C_{k+l+1}^{k+1}} \sum_{t=0}^k C_{k+l+1}^t + \frac{1}{k+l+2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x(1+x)^k(1-x)^l dx - \int_0^1 x(1+x)^l(1-x)^k dx \\
&= \frac{k-l}{(k+1)(k+l+2)C_{k+l+1}^{k+1}} \left(\sum_{t=0}^k C_{k+l+1}^t + \sum_{t=k+1}^{k+l+1} C_{k+l+1}^t \right) \\
&= \frac{(k-l) \cdot 2^{k+l+1}}{(k+1)(k+l+2)C_{k+l+1}^{k+1}} \\
&= \frac{(k-l) \cdot 2^{k+l+1}}{(k+l+1)(k+l+2)C_{k+l}^l}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом вычислим последний интеграл:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2(1+x)^k(1-x)^l dx = \int_0^1 (1+x)^k(1-x)^l dx \\
&\quad - \int_0^1 (1+x)^{k+1}(1-x)^{l+1} dx = I(k, l) - I(k+1, l+1),
\end{aligned}$$

а значит,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2(1+x)^k(1-x)^l dx + \int_0^1 x^2(1+x)^l(1-x)^k dx \\
&= I(k, l) + I(l, k) - (I(k+1, l+1) + I(l+1, k+1)) \\
&= \frac{((k-l)^2 + k+l+2) \cdot 2^{k+l+1}}{(k+l+1)(k+l+2)(k+l+3)C_{k+l}^l}.
\end{aligned}$$

Суммируя найденные значения интегралов, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l\} \cdot \frac{4(k+l+1)(l+1)!(k+1)!}{3 \cdot 2^{k+l+1}} \\
&= \frac{kl(k+l+1) + 1 - k^2 - l^2}{k+l+3} - \frac{(k+l-1)(k+1)(l+1)}{(k+l+3)C_{k+l}^l}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l\} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{k+l-1} (C_{k+l}^l (kl(k+l+1) + 1 - k^2 - l^2) - (k+l-1)(k+1)(l+1))}{(k+l+3)(l+1)(k+1)(k+l+1)!}.
\end{aligned}$$

Совместная вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}$ вычисляется аналогично (как интеграл от условной вероятности):

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_{j+1} = l \mid \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\} \\ & \quad \times p_{\lambda_j, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(2, x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Так как при условии $\{\xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y\}$ события $\{\lambda_{j-1} = k\}$ и $\{\lambda_{j+1} = l\}$ независимы, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_{j+1} = l \mid \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\} \\ &= \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} \cdot \mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = l \mid \xi_{\tau_{j+1}} = y\}. \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} = \mathbf{P}\{\lambda_j = k \mid \xi_{\tau_j} = x\} \\ &= \frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l \mid \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y\} \\ &= \frac{[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k] \cdot [(l-y)(1+y)^l - (l+y)(1-y)^l]}{4xy \cdot (l+1)!(k+1)!}. \end{aligned}$$

Согласно (13) и (1),

$$p_{\lambda_j, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(2, x, y) = p_2(x, y) \mathbf{P}\{\lambda_j = 2\} = \frac{3}{2} xy (y + x - |y - x|).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} = \frac{3}{8 \cdot (l+1)!(k+1)!} \\ & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 \left[((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k) \right. \\ & \quad \left. \times ((l-y)(1+y)^l - (l+y)(1-y)^l) \cdot (y+x-|y-x|) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Окончательно формула (15) доказывается непосредственным вычислением полученного двумерного интеграла.

3.4. Доказательство утверждения 1. Если $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность перестановочных случайных величин, то по теореме де Финетти (см. [6], [7, гл. VII]) ее распределение можно представить в виде смеси распределений последовательностей независимых случайных величин, т.е. существует такая случайная величина θ , что при фиксированном значении θ условное распределение $\{\xi_n\}$ является распределением

некоторой последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Если, кроме того, $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$, то условные распределения $\{\xi_n\}$ непрерывны почти наверное.

Пусть $F_t(x)$ обозначает функцию условного распределения ξ_1 при условии $\theta = t$, тогда случайные величины $F_\theta(\xi_n)$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Так как функция $F_t(x)$ монотонна, то моменты появления локальных максимумов в последовательностях $\{F_\theta(\xi_n)\}$ и $\{\xi_n\}$ совпадают при любом значении θ . Значит, последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности перестановочных случайных величин $\{\xi_n\}$ имеет такое же распределение, как последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков А. М., Харитонова Н. А., Хиль Е. В.* Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 690–703.
2. *Kuketayev A.* Probability distribution of distances between local extrema of random number series. arXiv:math/0611130v4.
3. *Зубков А. М., Хиль Е. В.* Марковские зависимости в последовательности локальных максимумов. — Обозрение прикл. промышл. матем., 2011, т. 18, № 1, с. 83–84.
4. *Хиль Е. В.* Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин. — Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 г.): Тезисы докладов. М.: Ленанд, с. 71–72.
5. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
6. *Хинчин А. Я.* О классах эквивалентных событий. — Докл. АН СССР, 1952, т. 85, № 4, с. 713–714. (Перепечатано: Хинчин А. Я. Избранные труды по теории вероятностей. М.: Науч. изд-во «ТВП», 1995, с. 358–360.)
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.

Поступила в редакцию
11.IV.2013