Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Хихол, Усреднение локальных характеристик сближает семимартингал с независимыми приращениями с процессами Леви, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 486–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:25:06

© 2013 г.

ХИХОЛ С. А.*

УСРЕДНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СБЛИЖАЕТ СЕМИМАРТИНГАЛ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ С ПРОЦЕССАМИ ЛЕВИ

Усреднение локальных характеристик по времени преобразует семимартингал с независимыми приращениями в процесс Леви. Показано, что этот процесс Леви «ближе» к любому процессу Леви, чем исходный процесс, где «большая близость» процессов понимается как большая близость всех f -дивергенций между их распределениями, что также допускает эквивалентную формулировку в терминах сравнения соответствующих бинарных статистических экспериментов. Кроме того, доказан критерий эквивалентности бинарных экспериментов, составленных из распределения семимартингала с независимыми приращениями и распределения процесса Леви.

Ключевые слова и фразы: семимартингал, процесс с независимыми приращениями, процесс Леви, бинарный статистический эксперимент, f -дивергенция, процесс плотности, триплет локальных характеристик.

1. Введение. Термины и обозначения, не объясняемые ниже, заимствованы из монографии Ж. Жакода и А. Н. Ширяева [12].

Пусть $\Omega = \mathbb{D}(\mathbf{R}^d) = \mathbb{D}([0, 1]; \mathbf{R}^d)$ — пространство всех непрерывных справа и имеющих пределы слева функций $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$, X — канонический процесс, задаваемый соотношением $X_t(\omega) = \omega(t)$, фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, 1]}$ порождена процессом X , т.е. $\mathcal{F}_t = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0$, $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

Введем обозначения для некоторых классов вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$. Класс $\mathcal{P}_I$ состоит из всех вероятностных мер, по которым процесс X является семимартингалом с независимыми приращениями, т.е. X — семимартингал и для любых $0 \leq s \leq t$ случайная величина $X_t - X_s$ не зависит от σ -алгебры $\mathcal{F}_s$ (в отличие от монографии [12], мы не предполагаем, что $X_0 = 0$ п.н.). Определим также

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_L &= \{P \in \mathcal{P}_I: X - X_0 \text{ есть процесс Леви относительно } P\}, \\ \mathcal{P}_{L,0} &= \{P \in \mathcal{P}_L: P(X_0 = 0) = 1\}.\end{aligned}$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: sahihol@gmail.com

Разумеется, введенные классы зависят от размерности d канонического процесса. Хотя в дальнейшем мы будем иметь дело с распределениями процессов различной размерности, мы предпочитаем не перегружать обозначения указанием размерности. Если меры отвечают распределениям процессов размерности, отличной от d , это будет оговариваться отдельно.

Основной результат статьи состоит в следующем. Пусть $P' \in \mathcal{P}_I$, тогда найдется такая мера $\bar{P} \in \mathcal{P}_L$, что для любой $P \in \mathcal{P}_{L,0}$ бинарный статистический эксперимент $(\Omega, \mathcal{F}, (P, \bar{P}))$ является менее информативным, чем $(\Omega, \mathcal{F}, (P, P'))$. Иными словами, для любой $P \in \mathcal{P}_{L,0}$ и для любой выпуклой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ имеет место следующее неравенство для f -дивергенций:

$$\mathcal{I}_f(\bar{P}, P) \leq \mathcal{I}_f(P', P).$$

Детальное изложение теории статистических экспериментов имеется в монографиях [17], [21]–[23], теории f -дивергенций — в монографии [18]; всю необходимую для целей настоящей статьи информацию можно найти в статье [1]. Отметим также, что мера $\bar{P}$ строится явно по мере P' по сути дела усреднением по времени локальных характеристик процесса X (см. (2) ниже).

О связи полученного результата с результатами ряда работ (среди которых наиболее близкими являются [8], [10] и [14]), мотивированных приложениями к финансовой математике, см. в п. 4.

Итак, пусть на $(\Omega, \mathcal{F})$ задана вероятностная мера $P' \in \mathcal{P}_I$. В дальнейшем фиксируем произвольную функцию усечения $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$. Хорошо известно, что триплет характеристик процесса X относительно меры P' можно выбрать детерминированным. Обозначим этот триплет $\mathbb{T}^{P'}$:

$$\mathbb{T}^{P'} = (B'_t, C'_t, \nu'(dt, dx)). \quad (1)$$

Рассмотрим также триплет

$$\mathbb{T}^{\bar{P}} = (\bar{b}t, \bar{c}t, dt \bar{F}(dx)),$$

где

$$\bar{b} = B'_1, \quad \bar{c} = C'_1, \quad \bar{F}(A) = \nu'([0, 1] \times A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d). \quad (2)$$

Введем $\bar{P}$ как такую меру из $\mathcal{P}_L$, что $\mathcal{L}\text{aw}(X_0 | \bar{P}) = \mathcal{L}\text{aw}(X_0 | P')$ и триплет процесса X относительно $\bar{P}$ есть $\mathbb{T}^{\bar{P}}$. Поскольку

$$\int_{\mathbf{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \bar{F}(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^1 (|x|^2 \wedge 1) \nu'(dt, dx) < \infty,$$

существование такой меры $\bar{P}$ следует из детерминированности и однородности по времени триплета $T^{\bar{P}}$ (см., например, [12, следствие II.14.19]), а ее единственность очевидна.

Заметим, что если X является локальным мартингалом (и, следовательно, мартингалом, см., например, [3, теорема 5.8]) по мере P' , то он является мартингалом и по мере $\bar{P}$. Это вытекает из [12, предложение II.2.29] в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} (|x|^2 \wedge |x|) \bar{F}(dx) &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^1 (|x|^2 \wedge |x|) \nu'(dt, dx) < \infty, \\ \int_{\mathbf{R}^d} (h(x) - x) \bar{F}(dx) &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^1 (h(x) - x) \nu'(dt, dx) = B_1' = \bar{b}.\end{aligned}$$

Отметим также, что если X является σ -мартингалом, но не локальным мартингалом по мере P' , то X не будет σ -мартингалом по мере $\bar{P}$.

Заметим, что если X не имеет фиксированных моментов разрыва относительно P' , то мера $\bar{P}$ описывается совсем просто: это такая мера из $\mathcal{P}_L$, что $\mathcal{L}aw((X_0, X_1) | P) = \mathcal{L}aw((X_0, X_1) | P')$. Это вытекает из теоремы II.4.15 монографии [12].

Теорема 1. *Для любой меры $P \in \mathcal{P}_{L,0}$ и введенных выше мер $P', \bar{P}$ статистический эксперимент $(P, \bar{P})$ менее информативен, чем (P, P') .*

З а м е ч а н и е 1. В действительности в доказательстве теоремы 1 используется не совпадение распределений X_0 по $\bar{P}$ и P' , а только равенство $\bar{P}(X_0 = 0) = P'(X_0 = 0)$. Более того, утверждение теоремы 1 сохранится, если меру $\bar{P}$ заменить на такую меру $\bar{Q} \in \mathcal{P}_L$, что триплет X относительно $\bar{Q}$ есть по-прежнему $T^{\bar{P}}$ и $\bar{Q}(X_0 = 0) \geq P'(X_0 = 0)$: как легко видеть из приводимой ниже формулы (5), в этом случае эксперимент $(P, \bar{Q})$ менее информативен, чем $(P, \bar{P})$. В частности, в качестве $\bar{Q}$ можно взять такую меру из $\mathcal{P}_{L,0}$, что X является процессом Леви с триплетом $T^{\bar{P}}$.

Первая идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы использовать так называемую лемму о сравнении из статьи [1] (лемма 5.1). Однако условия леммы о сравнении являются только достаточными для большей/меньшей информативности бинарных экспериментов и не всегда выполняются в условиях теоремы 1.

Тем не менее с помощью леммы о сравнении (а точнее, ее частного случая, см. [1, раздел 5.4]) оказывается возможным доказать, что эксперимент $(P, \bar{P})$ менее информативен, чем некоторый эксперимент (Q, Q') , который, в свою очередь, эквивалентен (P, P') ! Более того, меры Q и Q' можно выбрать из классов $\mathcal{P}_{L,0}$ и $\mathcal{P}_L$ соответственно на пространстве $\mathbb{D}(\mathbf{R})$.

Теорема 1 доказывается в п. 3. При этом для доказательства эквивалентности экспериментов (P, P') и (Q, Q') используется результат, дока-

зываемый в п. 2 двумя различными способами и имеющий самостоятельный интерес, а именно, приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности экспериментов (P, P') и (Q, Q') , где, как и выше, меры $P \in \mathcal{P}_{L,0}$, $P' \in \mathcal{P}_I$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^d)$, а меры $Q \in \mathcal{P}_{L,0}$, $Q' \in \mathcal{P}_I$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^{d'})$.

Некоторые вспомогательные результаты вынесены в приложение.

2. Критерий эквивалентности экспериментов. В этом пункте фиксированы вероятностные меры $P \in \mathcal{P}_{L,0}$, $P' \in \mathcal{P}_I$ на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^d)$ и $Q \in \mathcal{P}_{L,0}$, $Q' \in \mathcal{P}_I$ на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^{d'})$. Наша цель — установить критерий эквивалентности экспериментов (P, P') и (Q, Q') .

Выберем детерминированные версии триплетов канонических процессов по мерам P, P', Q, Q' и обозначим их

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^P &= (bt, ct, dt F(dx)), & \mathbb{T}^{P'} &= (B'_t, C'_t, \nu'(dt, dx)), \\ \mathbb{T}^Q &= (b_Q t, c_Q t, dt G(dx)), & \mathbb{T}^{Q'} &= (B'_{Q,t}, C'_{Q,t}, \nu'_Q(dt, dx)). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим также $\nu(dt, dx) = dt F(dx)$, $\nu_Q(dt, dx) = dt G(dx)$.

Вопрос об эквивалентности экспериментов решается просто, если в одной из пар (P, P') или (Q, Q') меры сингулярны. Действительно, в этом случае эксперимент, отвечающий этой паре, является вполне информативным и эквивалентен другому эксперименту тогда и только тогда, когда и другой эксперимент является вполне информативным, т.е. и в другой паре меры сингулярны. Поскольку условия сингулярности рассматриваемых пар мер хорошо известны (см. теорему 4 в приложении), в дальнейшем мы предполагаем, что меры P и P' , а также Q и Q' не сингулярны. В частности, $C'_t = ct$ и $C'_{Q,t} = c_Q t$ (см. теорему 4).

Введем для пары мер P и P' несколько дополнительных объектов.

Пусть μ — мера скачков d -мерного канонического процесса X . Для произвольной меры R обозначим $R_0 = R(X_0 = 0)$.

Пусть λ — мера на $\mathcal{B}([0, 1] \times \mathbf{R}^d)$ такая, что $(|x|^2 \wedge 1) * \lambda_1 < \infty$, $\nu \ll \lambda$ и $\nu' \ll \lambda$. Положим $U = d\nu/d\lambda$, $U' = d\nu'/d\lambda$, $A = \{U > 0\}$, $Y = (U'/U)1_A + 1_{A^c}$, $\nu'_1 = 1_A \cdot \nu'$, $\nu'_2 = 1_{A^c} \cdot \nu'$ и $a'_t = \nu'(\{t\} \times \mathbf{R}^d)$. Заметим, что $\nu'_1 \ll \nu$, $\nu'_1 = Y \cdot \nu$ и $\nu'_2 \perp \nu$.

По теореме 4 существует измеримая функция $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ такая, что

$$B'_t = B_t + h(x)(U' - U) * \lambda_t + \int_0^t c\beta_s ds. \quad (4)$$

Аналогичные объекты для пары мер Q, Q' обозначим $\beta^Q, Y^Q, \nu'_{Q,2}, a'_{Q,2}$.

Теорема 2 (критерий эквивалентности). *Эксперименты (P, P') и (Q, Q') эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется*

условие

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds = \int_0^1 (\beta_s^Q)^\top c_Q \beta_s^Q ds, \\ \nu(Y \in B) = \nu^Q(Y^Q \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \setminus \{1\}), \\ \frac{P'_0 \prod_{0 < s \leq 1} (1 - a'_s)}{\exp(\nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_s = 0\})} = \frac{Q'_0 \prod_{0 < s \leq 1} (1 - a'_{Q,s})}{\exp(\nu'_{Q,2}\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_{Q,s} = 0\})}. \end{array} \right. \quad (\text{E})$$

Следствие 1. Пусть $P, P' \in \mathcal{P}_{L,0}$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^d)$ и $Q, Q' \in \mathcal{P}_{L,0}$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbf{R}^{d'})$. В этом случае эксперименты (P, P') и (Q, Q') эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^\top c \beta = (\beta^Q)^\top c_Q \beta^Q, \\ \nu(Y \in B) = \nu^Q(Y^Q \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \setminus \{1\}), \\ \nu'_2\{[0, 1] \times \mathbf{R}^d\} = \nu'_{Q,2}\{[0, 1] \times \mathbf{R}^{d'}\}. \end{array} \right. \quad (\text{EL})$$

Доказательство теоремы 2 (первый способ). Покажем, что условия (E) эквивалентны равенству интегралов Хеллингера в терминальный момент 1 для пар мер (P, P') и (Q, Q') , т.е. $H(\alpha; P, P') = H(\alpha; Q, Q')$, $0 < \alpha < 1$.

С этой целью выразим интеграл Хеллингера $H(\alpha)_t := H(\alpha; P_t, P'_t)$ через триплеты. Известно (см. [19, теорема 1] и [12, теорема IV.4.28]), что $H(\alpha)_t = H(\alpha)_0 \mathcal{E}(-h^0(\alpha))_t$, где

$$h^0(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha) \int \beta_s^\top c \beta_s ds + \varphi_\alpha(U, U') * \lambda + \sum_{s \leq \cdot} \varphi_\alpha(1, 1 - a'_s),$$

$$\varphi_\alpha(u, v) = \alpha u + (1 - \alpha)v - u^\alpha v^{1-\alpha}$$

(мы учли, что $\nu(\{s\} \times \mathbf{R}^d) = 0$ для всех s). С учетом этого же соотношения получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(U, U') * \lambda &= 1_A(\alpha U + (1 - \alpha)U' - U^\alpha(U')^{1-\alpha}) * \lambda \\ &\quad + 1_{A^c}(1 - \alpha)U' * \lambda \\ &= (\alpha + (1 - \alpha)Y - Y^{1-\alpha}) * \nu + (1 - \alpha) * \nu'_2, \\ \Delta(\varphi_\alpha(U, U') * \lambda)_s &= (1 - \alpha)a'_s, \\ \varphi_\alpha(1, 1 - a'_s) &= \alpha + (1 - \alpha)(1 - a'_s) - (1 - a'_s)^{1-\alpha}, \\ \Delta h^0(\alpha)_s &= 1 - (1 - a'_s)^{1-\alpha}, \\ h^0(\alpha)_t - \sum_{s \leq t} \Delta h^0(\alpha)_s &= \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha) \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds \\ &\quad + (\alpha + (1 - \alpha)Y - Y^{1-\alpha}) * \nu_t \\ &\quad + (1 - \alpha)\nu'_2\{(0, t] \setminus \{a'_s > 0\}\}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(-h^0(\alpha))_1 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds \right\} \\ &\times \exp \left\{ -(\alpha + (1-\alpha)Y - Y^{1-\alpha}) * \nu_1 \right\} \\ &\times \exp \left\{ -(1-\alpha) \nu'_2 \{ (0, 1] \setminus \{a'_s > 0\} \} \right\} \prod_{s \leq 1} (1 - a'_s)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Поскольку $H(\alpha)_0 = (P'_0)^{1-\alpha}$, в итоге получаем, что

$$\begin{aligned}H(\alpha)_1 &= \left(\frac{P'_0 \prod_{s \leq 1} (1 - a'_s)}{\exp \{ \nu'_2 \{ (0, 1] \setminus \{a'_s > 0\} \} \}} \right)^{1-\alpha} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds \right\} \\ &\times \exp \left\{ -(1 + (1-\alpha)(Y - 1) - Y^{1-\alpha}) * \nu_1 \right\} \\ &= \exp \left\{ (1-\alpha)C_1 - \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)C_2 - g(\alpha, x) * \tilde{\nu}_1 \right\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_1 &= \ln \left(\frac{P'_0 \prod_{s \leq 1} (1 - a'_s)}{\exp \{ \nu'_2 \{ (0, 1] \setminus \{a'_s > 0\} \} \}} \right), \\ C_2 &= \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds, \\ g(\alpha, x) &= \varphi_\alpha(1, 1+x) = 1 + (1-\alpha)x - (1+x)^{1-\alpha}, \\ \tilde{\nu}(B) &= \nu(Y - 1 \in B \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Теперь очевидно, что из условия (Е) вытекает совпадение интегралов Хеллингера: $H(\alpha; P, P') = H(\alpha; Q, Q')$, $0 < \alpha < 1$. Обратное утверждение верно в силу [11, лемма 7.9].

Идея второго способа доказательства теоремы 2 состоит в следующем. Хорошо известно, что эксперименты (P, P') и (Q, Q') эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}aw(Z_1^P | P) = \mathcal{L}aw(Z_1^Q | Q)$, где Z^P и Z^Q — обобщенные процессы плотности меры P' относительно P и меры Q' относительно Q соответственно. Поэтому достаточно показать, что распределение $\mathcal{L}aw(Z_1^P | P)$ определяется, причем однозначно, через величины, стоящие в левых частях соотношений (Е).

Доказательство этого факта существенно опирается на формулу для обобщенного процесса плотности, приводимую в следующем предложении, которое является следствием более общей формулы для обобщенного процесса плотности распределений двух семимартингалов с независимыми приращениями, доказанной в статье [2].

Предложение 1. Пусть $P \in \mathcal{P}_{L,0}$, $P' \in \mathcal{P}_I$ и $P \not\ll P'$. Тогда обобщенный процесс плотности Z меры P' относительно P задается P -н.н. следующей формулой:

$$Z = P'_0 \mathcal{E}(N) D = P'_0 \mathcal{E}(N - \Psi), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} N_t &= \beta \cdot X_t^c + (Y - 1) * (\mu - \nu)_t, \\ D_t &= \frac{\prod_{0 < s \leq t} (1 - a'_s)}{\exp(\nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq t, a'_s = 0\})}, \\ \Psi_t &= \nu'_2([0, t] \times \mathbf{R}^d) \end{aligned}$$

и X^c — непрерывная мартингальная составляющая канонического процесса X по мере P .

Доказательство теоремы 2 (второй способ). Обозначим

$$\begin{aligned} N^1 &= -1_{\{x=-1\}} * (\mu^N - \nu^N) = -1_{\{Y=0\}} * (\mu - \nu), \\ N^2 &= N - N^1 = \beta \cdot X_t^c + (Y - 1)1_{\{Y>0\}} * (\mu - \nu)_t, \\ Z^1 &= \mathcal{E}(N^1), \quad Z^2 = \mathcal{E}(N^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где μ^N и ν^N — соответственно мера скачков процесса N и ее компенсатор (относительно P).

Ясно, что N^1 есть чисто разрывный локальный мартингал (по мере P) и

$$N_t^1 = - \sum_{s \leq t} 1_{\{\Delta N_s = -1\}} + \nu^N([0, t] \times \{-1\}). \quad (7)$$

В частности, $\Delta N^1 \Delta N^2 = 0$ и $[N^1, N^2] = 0$, поэтому из первого соотношения в (5) и формулы Йора следует, что

$$Z^P = P'_0 Z^1 Z^2 D. \quad (8)$$

Дальнейшая часть доказательства опирается на лемму 4 из приложения, которая применима как к N , так и к N^1 (с нулевым β и $1_{\{Y>0\}}$ в качестве Y) и N^2 (с $Y1_{\{Y>0\}} + 1_{\{Y=0\}}$ в качестве Y). Значит, N^1 и N^2 являются локальными мартингалами с независимыми приращениями, и несложно показать, что они независимы между собой, так как $[N^1, N^2] = 0$. Следовательно, Z^1 и Z^2 независимы.

Известно, что стохастическая экспонента от локального мартингала с независимыми приращениями и со скачками не менее -1 является не только локальным мартингалом, но и мартингалом (например, это вытекает из следствия 8.30 [11]), поэтому из (8) следует, что

$$E_P Z_1^P = P'_0 D_1 = \frac{P'_0 \prod_{0 < s \leq 1} (1 - a'_s)}{\exp(\nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_s = 0\})}. \quad (9)$$

В силу (7) случайная величина Z_1^1 принимает два значения: 0 и $\exp\{\nu^N([0, 1] \times \{-1\})\} = e^{\nu(Y=0)}$, где равенство имеет место в силу леммы 4. В силу мартингальности Z^1 имеем $P\{Z_1^1 = 0\} = 1 - e^{-\nu(Y=0)}$.

В силу леммы 4 процесс $\hat{N} = \ln Z^2$ есть семимартингал с независимыми приращениями без фиксированных скачков, поэтому $\hat{N}_1$ имеет безгранично делимое распределение с характеристической функцией

$$Ee^{iu\hat{N}_1} = \exp\left\{iuB_1^{\hat{N}} - \frac{1}{2}u^2C_1^{\hat{N}} + \int (e^{iux} - 1 - iuh_1(x))\nu^{\hat{N}}([0, 1] \times dx)\right\}, \quad (10)$$

где $(B^{\hat{N}}, C^{\hat{N}}, \nu^{\hat{N}})$ — триплет локальных характеристик семимартингала $\hat{N}$ по мере P относительно функции усечения $h_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, явный вид которого указан в лемме 4. В частности,

$$B_1^{\hat{N}} = \int_{\{Y>0\}} (h_1(\ln Y) - Y + 1) d\nu - \frac{C_1^{\hat{N}}}{2}, \quad (11)$$

$$C_1^{\hat{N}} = \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds, \quad (12)$$

$$\nu^{\hat{N}}([0, 1] \times B) = \nu(Y > 0, \ln Y \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus \{0\}). \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) следует, что величины $\int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds$ и $\nu(Y \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus \{0, 1\})$, определяют $C_1^{\hat{N}}$ и $\nu^{\hat{N}}([0, 1] \times B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. То же верно относительно $B_1^{\hat{N}}$, так как подынтегральная функция в (11) обращается в 0 при $Y = 1$. Значит, указанные величины однозначно определяют распределения $\hat{N}_1$ и $Z_1^2 = e^{\hat{N}_1}$ в силу (10). Как указано выше, распределение $\mathcal{L}aw(Z_1^1 | P)$ полностью определяется величиной $\nu(Y = 0)$. В силу независимости Z^1 и Z^2 из (8) получаем, что $\mathcal{L}aw(Z_1^P | P)$ однозначно определяется величинами, входящими в левые части соотношений (Е).

Пусть, наоборот, известно $\mathcal{L}aw(Z_1^P | P)$. Тогда из (9) определяется левая часть третьего соотношения в (Е).

Поскольку $P'_0 D_1 > 0$ ввиду теоремы 4 и $Z_1^2 > 0$ P -п.н. (так как $\Delta N^2 > -1$), имеем $P\{Z_1^P = 0\} = P\{Z_1^1 = 0\} = 1 - e^{-\nu(Y=0)}$, что позволяет определить $\nu(Y = 0)$ и $\mathcal{L}aw(Z_1^1 | P)$.

Поэтому, в силу независимости Z^1 и Z^2 , $\mathcal{L}aw(Z_1^P | P)$ определяет распределение $\mathcal{L}aw(Z_1^1 | P)$, а значит, и $\hat{N}_1$. В силу (10) определены также $C_1^{\hat{N}}$ и мера $\nu^{\hat{N}}([0, 1] \times dx)$, что ввиду (12) и (13) позволяет определить $\int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds$ и $\nu(Y \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \setminus \{0, 1\})$.

Таким образом, теорема 2 доказана.

3. Доказательство основной теоремы. Заметим, что если $P' \perp P$, то эксперимент (P, P') будет вполне информативным и, значит, более информативным, чем $(P, \bar{P})$. Поэтому, не ограничивая общности, мы полагаем ниже, что $P' \not\perp P$, тогда согласно теореме 4 имеем, в частности, $C'_t = ct$. Таким образом, везде ниже $C'_t = ct$ и $\bar{c} = c$.

Как отмечалось выше, схема доказательства теоремы 1 состоит в следующем: на пространстве $\mathbb{D}(\mathbf{R})$ будет построена пара мер $Q \in \mathcal{P}_{L,0}$, $Q' \in \mathcal{P}_L$, для которых можно показать, что эксперимент (Q, Q') эквивалентен (P, P') и более информативен, чем $(P, \bar{P})$. Для доказательства первого из этих утверждений используется теорема 2 (см. лемму 2), а для доказательства второго — лемма о сравнении [1, лемма 5.1] (см. лемму 3).

Основной шаг построения мер Q, Q' состоит в построении отвечающих им мер Леви G и G' . Основное требование на G и G' состоит в том, чтобы выполнялось второе условие из (Е). Этого не всегда можно достичь, если в качестве G брать F (например, если F сосредоточена в точке a , а функция $Y(t, a)$ не является постоянной п.н. по мере Лебега). Другой «естественный» кандидат на роль G , образ меры ν при отображении Y , не всегда является мерой Леви. Дополнительные требования на G и G' исходят из того, что меры Q и Q' должны быть несингулярны. Наличие сингулярной компоненты у G' по отношению к G также связано с проверкой выполнения условий (Е). Одна из возможных конструкций мер G и G' , удовлетворяющих всем необходимым требованиям, приводится в следующей лемме.

Лемма 1. *Существуют мера G на $(0, \infty)$ и функция $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$, для которых выполнены следующие условия:*

- a) $\int (x^2 \wedge 1) G(dx) < \infty$,
- b) $\int (x^2 \wedge 1) \varphi(x) G(dx) < \infty$,
- c) $\mathcal{L}aw(\varphi(x) | G) = \mathcal{L}aw(Y(t, x) | \nu)$,
- d) $\int (\sqrt{\varphi(x)} - 1)^2 G(dx) < \infty$,
- e) $\int |h_1(x)(\varphi(x) - 1)| G(dx) < \infty$,

где $h_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная функция усечения.

Доказательство. Введем разбиение $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ на множества

$$D_1 = \{x \in \mathbf{R}^d: |x| \geq 1\},$$

$$D_N = \left\{x \in \mathbf{R}^d: \frac{1}{N} \leq |x| < \frac{1}{N-1}\right\}, \quad N \geq 2,$$

и разбиение $(0, \infty)$ на множества

$$B_{1+} = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\},$$

$$B_{N+} = \left\{x \in \mathbf{R}: \frac{1}{N} \leq x < \frac{1}{N-1}\right\}, \quad N \geq 2.$$

Зафиксируем также взаимно однозначные монотонные отображения $\psi_N: \mathbf{R}_+ \rightarrow B_{N+}$.

Введем меры $G_N(B)$ на $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ равенством

$$G_N(B) = \nu((t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^d: x \in D_N, Y(t, x) \in B), \quad N \geq 1,$$

и положим

$$G(B) = \sum_N G_N \circ \psi_N^{-1}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}),$$

где $G_N \circ \psi_N^{-1}$ — образ меры G_N при отображении ψ_N . Определим также

$$\varphi(x) = \sum_N \psi_N^{-1}(x) 1_{B_{N+}}(x), \quad x > 0.$$

Условие а) выполнено, поскольку

$$G(B_{N+}) = G_N(\mathbf{R}_+) = F(D_N) \leq N^2 \int_{D_N} (|x|^2 \wedge 1) F(dx),$$

что дает

$$\begin{aligned} \int (x^2 \wedge 1) G(dx) &= \sum_N \int_{B_{N+}} (x^2 \wedge 1) G(dx) \leq \sum_N \frac{1}{(N-1)^2 \vee 1} G(B_{N+}) \\ &\leq \sum_N \frac{N^2}{(N-1)^2 \vee 1} \int_{D_N} (|x|^2 \wedge 1) F(dx) \\ &\leq 4 \sum_N \int_{D_N} (|x|^2 \wedge 1) F(dx) = 4 \int (|x|^2 \wedge 1) F(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично проверяем условие б):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+} (x^2 \wedge 1) \varphi(x) G(dx) &= \sum_N \int_{B_{N+}} (x^2 \wedge 1) \varphi(x) G(dx) \\ &\leq \sum_N \frac{1}{(N-1)^2 \vee 1} \int_{B_{N+}} \varphi(x) G(dx) \\ &= \sum_N \frac{1}{(N-1)^2 \vee 1} \int_{B_{N+}} \psi_N^{-1}(x) (G_N \circ \psi_N^{-1})(dx) \\ &= \sum_N \frac{1}{(N-1)^2 \vee 1} \int_{\mathbf{R}_+} x G_N(dx) \\ &= \sum_N \frac{1}{(N-1)^2 \vee 1} \iint_{[0,1] \times D_N} Y(t, x) \nu(dt, dx) \\ &\leq \sum_N \frac{N^2}{(N-1)^2 \vee 1} \iint_{[0,1] \times D_N} (|x|^2 \wedge 1) Y(t, x) \nu(dt, dx) \\ &\leq 4 \iint (|x|^2 \wedge 1) Y(t, x) \nu(dt, dx) \\ &\leq 4 \iint (|x|^2 \wedge 1) \nu'(dt, dx) < \infty. \end{aligned}$$

Далее, выполнение условия с) следует из построения меры G , выполнение условия d) очевидно ввиду с).

Заметим также, что существует такое $N_0 \geq 2$, что для произвольных функций усечения $h_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ при $N \geq N_0$ имеем $h_1(x) = x$ на B_{N+} и $h(x) = x$ на D_N . Тогда для $N \geq N_0$

$$\begin{aligned} \int_{B_{N+}} |h_1(x)(\varphi(x) - 1)| G(dx) &= \int_{B_{N+}} |x(\psi_N^{-1}(x) - 1)| (G_N \circ \psi_N^{-1})(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} |\psi_N(x)(x - 1)| G_N(dx) \\ &= \int_{[0,1] \times D_N} |\psi_N(Y(t, x))(Y(t, x) - 1)| \nu(dt, dx) \\ &\leq \frac{1}{N-1} \int_{[0,1] \times D_N} |Y(t, x) - 1| \nu(dt, dx) \\ &\leq \frac{N}{N-1} \int_{[0,1] \times D_N} |x| |Y(t, x) - 1| \nu(dt, dx) \\ &\leq 2 \int_{[0,1] \times D_N} |h(x)| |Y(t, x) - 1| \nu(dt, dx), \end{aligned}$$

откуда следует выполнение условия е), если воспользоваться теоремой 4 и заметить, что интеграл, стоящий в левой части предыдущей цепочки соотношений, конечен также для $N < N_0$ в силу а) и б). Лемма 1 доказана.

В дальнейшем всюду предполагается, что G и φ удовлетворяют условиям леммы 1, а мера G' задается соотношением

$$G'(B) = \int_B \varphi(x) G(dx) + K \delta_{\{-1\}}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

где $\delta_{\{-1\}}$ есть мера Дирака в точке -1 и

$$K = \nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_s = 0\} - \ln \prod_{t \leq 1: a'_t > 0} (1 - a'_t).$$

Конечность константы K вытекает из несингулярности $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ (см. теорему 4), значит, G' — мера Леви ввиду условия б) леммы 1.

Введем триплеты

$$\mathbb{T}^{\mathbf{Q}} = (0, t, dt G(dx)), \quad \mathbb{T}^{\mathbf{Q}'} = (b't, t, dt G'(dx)),$$

где

$$b' = \sqrt{\int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds} + \int_{\mathbf{R}_+} h_1(x)(\varphi(x) - 1) G(dx) + h_1(-1)K.$$

Пусть мера $\mathbf{Q}$ такова, что канонический процесс X является процессом Леви с триплетом $\mathbb{T}^{\mathbf{Q}}$. Определим также меру $\mathbf{Q}'$ как меру, по

которой X является процессом с независимыми приращениями с триплетом $\mathbb{T}^{Q'}$, причем $Q'_0 = P'_0$. Выполнение условий леммы 1 гарантирует существование мер Q и Q' , а также тот факт, что $Q \not\ll Q'$ (для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 4).

Лемма 2. *Эксперименты (P, P') и (Q, Q') эквивалентны.*

Доказательство. Проверим выполнение условий (E). Из определения меры G' следует, что $Y^Q(t, x) = \varphi(x)$, поэтому выполнено второе условие из (E). Далее, из определения b' находим, что $\beta^Q = \sqrt{\int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds}$, откуда следует выполнение первого условия из (E). Наконец, имеем $Q'_0 = P'_0$, $a'_{Q,t} \equiv 0$ и $\nu'_{Q,2}([0, 1] \times \mathbf{R}) = K$, поэтому выполнение третьего условия из (E) следует из определения константы K . Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь эксперимент $(P, \bar{P})$. Нам понадобится представление для обобщенного процесса плотности $\bar{P}$ относительно P в виде $\bar{P}_0 \mathcal{E}(\bar{N} - \bar{\Psi})$ (см. правую часть соотношения (5)) и явный вид соответствующих параметров $\bar{\beta}, \bar{Y}$, а также сингулярной компоненты меры $\bar{F}(dx)$ относительно $F(dx)$. Предварительно, конечно, следует проверить, что $P \not\ll \bar{P}$.

Пусть

$$\nu'_2([0, 1] \times A) = \int_A Y_2(x) F(dx) + F'(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d),$$

есть разложение меры $\nu'_2([0, 1] \times dx)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты относительно $F(dx)$. Таким образом,

$$\bar{F}(A) = \int_A \bar{Y}(x) F(dx) + F'(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d),$$

где $\bar{Y}(x) = \int_0^1 Y(t, x) dt + Y_2(x)$.

Теперь несложно проверить, что условие (ii) теоремы 4 для мер P и $\bar{P}$ выполнено, поскольку оно выполняется для мер P и P' (детальное рассуждение предоставляется читателю).

Пусть g — такая симметрическая неотрицательно определенная матрица, что $c = g^\top g$. Так как $\int_0^1 (g\beta_s)^\top g\beta_s ds = \int_0^1 \beta_s^\top c\beta_s ds < \infty$, то интеграл $\int_0^1 g\beta_s ds$ определен и конечен. Далее, очевидно, что существует такой вектор $\bar{\beta}$, что $g\bar{\beta} = \int_0^1 g\beta_s ds$, и, следовательно, $c\bar{\beta} = \int_0^1 c\beta_s ds$. Зафиксируем $\bar{\beta}$. Несложно убедиться, что для пары мер $(P, \bar{P})$ в разложении (18) два последних члена обращаются в нуль (т.е. выполнено условие (iv) в теореме 10), а в роли функции β выступает функция, тождественно равная $\bar{\beta}$.

Выполнение условий (i), (iii), (vi) в теореме 4 для пары мер $(P, \bar{P})$ очевидно, а проверка выполнения условия (v) также предоставляется

читателю. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \bar{\beta} \cdot X^c + (\bar{Y} - 1) * (\mu - \nu), \\ \bar{\Psi}_t &= tF'(\mathbf{R}^d).\end{aligned}\quad (14)$$

Аналогичное представление для обобщенного процесса плотности Q' относительно Q имеет вид $Q'_0 \mathcal{E}(N^Q - \Psi^Q)$, где N^Q имеет представление, аналогичное (14), с коэффициентами β^Q и Y^Q , а $\Psi_t^Q = Kt$.

Согласно лемме 4 из приложения, третьи характеристики процессов $\bar{N}$ и N^Q имеют вид

$$\nu^{\bar{N}}(dt, dx) = dt F_{\bar{N}}(dx), \quad \nu^{N^Q}(dt, dx) = dt F_{N^Q}(dx),$$

где

$$\begin{aligned}F_{\bar{N}}(B) &= F\{x: \bar{Y}(x) - 1 \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus \{0\}), \\ F_{N^Q}(B) &= G\{x: \varphi(x) - 1 \in B\} \\ &= \nu\{(t, x): Y(t, x) - 1 \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus \{0\}),\end{aligned}$$

соответственно, вторые характеристики имеют вид $C_t^{\bar{N}} = \bar{\beta}^\top c \bar{\beta} t$, $C_t^{N^Q} = (\beta^Q)^2 t$. Из однородности всех трех характеристик по времени следует, что процессы $\bar{N}$ и N^Q являются процессами Леви по мерам P и Q соответственно.

Лемма 3. *Для введенных выше мер $P, \bar{P}, Q, Q'$ эксперимент $(P, \bar{P})$ менее информативен, чем (Q, Q') .*

Доказательство. Заметим, что процессы плотности в начальный момент совпадают, поскольку $\bar{P}_0 = Q'_0$, и в силу леммы 5 достаточно рассмотреть случай $\bar{P}_0 = Q'_0 = 1$. Поэтому мы можем воспользоваться леммой о сравнении, причем, как это следует из предшествующих формулировке леммы 3 рассуждений, в ситуации, когда процессы плотности суть стохастические экспоненты от процессов Леви. В этом случае условия леммы о сравнении принимают более простой вид (см. [1, п. 5.4, условия (5.32)–(5.34)]). А именно, утверждение леммы 3 будет доказано, если проверить следующие условия (15)–(17):

$$\bar{\beta}^\top c \bar{\beta} \leq (\beta^Q)^2, \quad (15)$$

для каждого $w \in (-1, 0)$

$$\int (w - x)^+ F_{\bar{N}}(dx) \leq \int (w - x)^+ F_{N^Q}(dx), \quad (16)$$

для каждого $w \in (0, \infty)$

$$\int (x - w)^+ F_{\bar{N}}(dx) + F'(\mathbf{R}^d) \leq \int (x - w)^+ F_{N^Q}(dx) + K. \quad (17)$$

Условие (15) выполнено, так как

$$\begin{aligned}\bar{\beta}^\top c\bar{\beta} &= (g\bar{\beta})^\top (g\bar{\beta}) = \left(\int_0^1 g\beta_s ds \right)^\top \left(\int_0^1 g\beta_s ds \right) \\ &\leq \int_0^1 (g\beta_s)^\top (g\beta_s) ds = \int_0^1 \beta_s^\top c\beta_s ds = (\beta^Q)^2.\end{aligned}$$

Далее, для $w \in (-1, 0)$

$$\begin{aligned}\int (w-x)^+ F_{\bar{N}}(dx) &= \int (1+w-\bar{Y}(x))^+ F(dx) \\ &\leq \int \left(1+w - \int Y(t,x) dt \right)^+ F(dx) \leq \iint (1+w-Y(t,x))^+ dt F(dx) \\ &= \int (w-x)^+ F_{NQ}(dx),\end{aligned}$$

т.е. условие (16) выполнено.

Наконец, для $w \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}\int (x-w)^+ F_{\bar{N}}(dx) + F'(\mathbf{R}^d) &= \int (\bar{Y}(x) - 1 - w)^+ F(dx) + F'(\mathbf{R}^d) \\ &\leq \int \left(\int Y(t,x) dt - 1 - w \right)^+ F(dx) + \int Y_2(x) F(dx) + F'(\mathbf{R}^d) \\ &\leq \iint (Y(t,x) - 1 - w)^+ dt F(dx) + \nu'_2([0, 1] \times \mathbf{R}^d) \\ &\leq \int (x-w)^+ F_{NQ}(dx) + K,\end{aligned}$$

где последнее неравенство в цепочке следует из того, что

$$\begin{aligned}\nu'_2([0, 1] \times \mathbf{R}^d) &= \nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_s = 0\} + \sum_{t \leq 1} a'_t \\ &\leq \nu'_2\{(s, x): 0 < s \leq 1, a'_s = 0\} - \ln \prod_{t \leq 1: a'_t > 0} (1 - a'_t) = K.\end{aligned}$$

Таким образом, условие (17) также выполнено. Лемма 3 доказана.

Утверждение теоремы 1 есть непосредственное следствие лемм 2 и 3.

4. Применение к одной задаче минимизации f -дивергенции. Укажем на некоторую связь данной работы с результатами ряда работ (среди которых наиболее близкими являются [8], [10] и [14]), мотивированных приложениями к финансовой математике.

Пусть S — d -мерный семимартингал на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, интерпретируемый как дисконтированный процесс цен d активов. Пусть $\mathcal{M}^a(S)$ — множество вероятностных мер $\bar{\mathbb{Q}}$, абсолютно непрерывных относительно $\mathbb{Q}$ и таких, что S — локальный мартингал

относительно $\tilde{Q}$. В задаче максимизации полезности стандартный подход состоит в том, что сначала решается двойственная задача, заключающаяся в минимизации f -дивергенции $J_f(\tilde{Q}, Q)$ по $\tilde{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ для некоторых $f \in \mathcal{C}$ (см., например, [16] и [20]).

Весьма распространенное предположение о модели финансового рынка состоит в том, что процесс цен S есть экспонента от процесса Леви (см., например, [5], [7], [8]–[10], [13]–[15]). В силу [12, теорема II.8.10] это эквивалентно тому, что $S = \mathcal{E}(L)$, где L — процесс Леви с $\Delta L > -1$. Заметим, что S является локальным мартингалом по мере $\tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда L является локальным мартингалом по мере $\tilde{Q}$, т.е. $\mathcal{M}^a(S) = \mathcal{M}^a(L)$.

Поэтому естественно рассмотреть следующую задачу. Пусть L — процесс Леви относительно меры Q на некотором стохастическом базисе. Пусть $\mathcal{M}^a(L)$ — множество вероятностных мер $\tilde{Q}$, абсолютно непрерывных относительно Q и таких, что L — локальный мартингал относительно $\tilde{Q}$. Требуется минимизировать f -дивергенцию $J_f(\tilde{Q}, Q)$ по $\tilde{Q} \in \mathcal{M}^a(L)$.

Для некоторых выпуклых функций f при тех или иных предположениях было доказано, что если эта задача имеет решение, то экстремум достигается на мере, по которой L является процессом Леви, а именно, случай $f(x) = x \ln x$ рассматривается в [8], случай $f(x) = x^q$ для $q \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ — в [14], а из результатов работы [10] несложно вывести условия, при которых такой результат справедлив для $f(x) = -\ln x$. Для произвольной выпуклой функции f , по-видимому, среди экстремальных точек не обязательно найдется мартингальная мера, по которой L является процессом Леви (см., например, [4]).

Однако следующий результат показывает, что если экстремум (конечный) достигается на мере $Q' \in \mathcal{M}^a(L)$, относительно которой L есть процесс с независимыми приращениями, то экстремум будет также достигаться и на некоторой мере $\bar{Q} \in \mathcal{M}^a(L)$, по которой L есть процесс Леви (меры $\bar{Q}$ и Q' не обязаны совпадать, так как если f не строго выпукла, то экстремум может достигаться в разных точках).

Теорема 3. Пусть на произвольном измеримом пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ заданы d -мерный процесс L на интервале $[0, 1]$ с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, мера Q , относительно которой L является процессом Леви, и мера $Q' \ll Q$, относительно которой L является мартингалом с независимыми приращениями. Тогда на том же пространстве найдется мера $\bar{Q}$ такая, что

- 1) $\bar{Q} \ll Q$,
- 2) L — мартингал и процесс Леви относительно меры $\bar{Q}$,
- 3) $J_f(\bar{Q}, Q) \leq J_f(Q', Q)$ для всех $f \in \mathcal{C}$.

Если $Q' \sim Q$, то $\bar{Q} \sim Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим (B, C, ν) детерминированную и однородную по времени версию триплета L относительно меры Q (см., например, [12, следствие II.4.19]), где

$$B_t(\omega) = bt, \quad C_t(\omega) = ct, \quad \nu(\omega; dt, dx) = dt F(dx).$$

Обозначим (B', C', ν') детерминированную версию триплета L относительно меры Q' .

Пусть P и P' — меры на пространстве Скорохода, отвечающие распределениям L по мерам Q и Q' соответственно, тогда триплеты канонического процесса X относительно P и P' будут соответственно (B, C, ν) и (B', C', ν') в силу того, что триплеты процессов с независимыми приращениями однозначно определяются по их распределениям (см., например, [12, теоремы II.4.15, II.5.2 и следствие II.5.11]). Очевидно, что из $Q' \ll Q$ следует, что $P' \ll P$, в частности, $C'_t = ct$ и $X_0 = 0$ P - и P' -п.н.

По распределению P' построим распределение $\bar{P} \in \mathcal{P}_L$ как в п. 1. Отметим, что $\bar{P} \in \mathcal{P}_{L,0}$ в силу совпадения начальных распределений процесса X по мерам P' и $\bar{P}$.

Далее, абсолютная непрерывность сохраняется при переходе к менее информативному эксперименту, поэтому $\bar{P} \ll P$ и $\bar{P} \sim P$, если $Q' \sim Q$ и, значит, $P' \sim P$.

Поскольку $P, \bar{P} \in \mathcal{P}_{L,0}$, процесс плотности $\bar{P}$ относительно P имеет вид $\mathcal{E}(N^X)$ с $N^X = \beta \cdot X^c + (Y - 1) * (\mu^X - \nu^X)$, где параметры Гирсанова β, Y не зависят ни от случая, ни от времени; здесь $\nu^X = \nu$ есть P -компенсатор меры скачков μ^X канонического процесса X . В частности, $\beta \in L^2_{\text{loc}}(X^c, P)$ и $(Y - 1) \in G_{\text{loc}}(\mu^X, P)$. Поскольку триплеты процесса X относительно P и процесса L относительно Q совпадают и детерминированы, то, учитывая [12, теорема II.1.33], мы получим, что корректно определен процесс $Z = \mathcal{E}(N^L)$ с $N^L = \beta \cdot L^c + (Y - 1) * (\mu^L - \nu^L)$, где $\nu^L = \nu$ есть Q -компенсатор меры скачков μ^L процесса L .

По лемме 4 (см. п. 5 ниже) триплеты процессов N^X и N^L относительно мер P и Q соответственно совпадают. Отсюда легко следует, что распределения стохастических экспонент $\mathcal{E}(N^X)$ и $\mathcal{E}(N^L)$ по мерам P и Q соответственно совпадают. Действительно, если $Y > 0$ F -п.в., это следует из [12, теорема II.8.10]. В общем случае применим тот же прием с выделением скачков процессов N^X и N^L , равных -1 , как при втором способе доказательства теоремы 3.

Далее, процесс Z является неотрицательным локальным мартингалом, а в силу [11, следствие 8.30] — мартингалом со средним 1. Таким образом, Z есть процесс плотности некоторой вероятностной меры $\bar{Q}$ относительно Q , и из доказанного в предыдущем абзаце следует, что эксперименты $(P, \bar{P})$ и $(Q, \bar{Q})$ эквивалентны.

По теореме Гирсанова для семимартингалов (см. теорему III.3.24 в [12]) семимартингал L по мере $\bar{Q}$ имеет те же характеристики, что и

X относительно меры $\bar{P}$, в частности, L есть процесс Леви по мере $\bar{Q}$. В силу того, что свойство семимартингала быть локальным мартингалом выражается в терминах триплетов его характеристик, оно сохраняется при переходе от Q' к P' и от $\bar{P}$ к $\bar{Q}$, а в п. 1 доказано, что оно сохраняется и при переходе от P' к $\bar{P}$, поэтому L есть локальный мартингал, а значит, и мартингал по мере $\bar{Q}$.

Наконец,

$$\mathcal{J}_f(\bar{Q}, Q) = \mathcal{J}_f(\bar{P}, P) \leq \mathcal{J}_f(P', P) \leq \mathcal{J}_f(Q', Q),$$

где первое равенство следует из эквивалентности экспериментов $(Q, \bar{Q})$ и $(P, \bar{P})$, второе неравенство есть следствие теоремы 1, а третье неравенство — следствие рандомизационного критерия (см., например, [17, следствие 4.17]). Теорема 3 доказана.

5. Приложение: вспомогательные результаты. Пусть, как и в п. 2, $P \in \mathcal{P}_{L,0}$, $P' \in \mathcal{P}_I$. Для удобства читателя мы сформулируем критерий отсутствия сингулярности P и P' , неоднократно используемый в работе. Введем еще несколько объектов, помимо введенных в п. 2.

Обозначим P_H, P'_H распределения X_0 по мерам P, P' соответственно. Далее, существуют непрерывная возрастающая функция A_t и две функции c_t, c'_t со значениями в множестве симметрических неотрицательно определенных матриц размера $d \times d$ такие, что $C = c \cdot A$, $C' = c' \cdot A$.

Положим $\Sigma = \{t: |h(x)(U - U')| * \lambda_t < \infty\}$. На множестве Σ существует разложение

$$B' = B + h(x)(U' - U) * \lambda + (c\beta) \cdot A + \beta^\perp \cdot A + \tilde{B}, \quad (18)$$

где β и $\beta^\perp$ — измеримые функции из Σ в $\mathbf{R}^d$, $\tilde{B}$ — функция из Σ в $\mathbf{R}^d$ с ограниченной вариацией на компактных интервалах, $d\tilde{B}$ и dA взаимно сингулярны на Σ и для всех t вектор $\beta_t^\perp$ ортогонален образу $\mathbf{R}^d$ при линейном отображении, связанном с матрицей c_t .

Введем также

$$h^0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} (\beta^\top c\beta 1_\Sigma) \cdot A + \frac{1}{2} (\sqrt{U} - \sqrt{U'})^2 * \lambda + \frac{1}{2} \sum_{s \leq \cdot} (1 - \sqrt{1 - a'_s})^2.$$

Теорема 4 (критерий отсутствия сингулярности, теорема IV.4.33 из [12]). *Для того чтобы P' и P были несингулярны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

- (i) P'_H и P_H несингулярны; (ii) $|h(x)(U - U')| * \lambda_1 < \infty$;
- (iii) $C_t = C'_t$ для всех $t \in [0, 1]$; (iv) $\beta^\perp \cdot A_t + \tilde{B}_t = 0$ для всех $t \in [0, 1]$;
- (v) $h^0(1/2)_1 < \infty$; (vi) $a'_t < 1$ для всех $t \in [0, 1]$.

В следующей вспомогательной лемме вычисляются характеристики процесса, представимого в виде суммы стохастических интегралов по непрерывной мартингальной составляющей и скомпенсированной мере скачков процесса Леви с *детерминированными* подынтегральными функциями. Предполагается, что $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ есть d -мерный случайный процесс на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$.

Предполагается также, что первая характеристика триплета процесса X отвечает функции усечения $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, а первые характеристики триплетов вводимых в лемме 4 процессов N и $\hat{N}$ отвечают функции усечения $h_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Лемма 4. Пусть X есть d -мерный процесс Леви относительно меры $\mathbf{P}$ с характеристиками $(bt, ct, dt F(dx))$, X^c — непрерывная мартингальная составляющая X и μ^X — его мера скачков. Обозначим $\nu^X = dt F(dx)$. Пусть заданы также функции $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ и $Y: [0, 1] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$, причем $\beta \in L^2_{\text{loc}}(X^c)$, $Y - 1 \in G_{\text{loc}}(\mu^X)$ (определения соответствующих классов см. в [12, пп. III.4.3, II.1.27]).

Тогда процесс $N = \beta \cdot X^c + (Y - 1) * (\mu^X - \nu^X)$ является мартингалом с независимыми приращениями и версия его характеристик (B^N, C^N, ν^N) задается соотношениями

$$B^N = (h_1(x) - x) * \nu^N, \quad C_t^N = \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds,$$

$$\nu^N(A) = \nu^X \left\{ (t, x): Y(t, x) \neq 1, (t, Y(t, x) - 1) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}([0, 1] \times \mathbf{R}).$$

Пусть дополнительно $Y > 0$ всюду, тогда процесс $\hat{N} = \ln \mathcal{E}(N)$ корректно определен, является семимартингалом с независимыми приращениями и его характеристики $(B^{\hat{N}}, C^{\hat{N}}, \nu^{\hat{N}})$ задаются соотношениями

$$B^{\hat{N}} = (h_1(\ln(1 + x)) - x) * \nu^N - \frac{C^{\hat{N}}}{2}, \quad C_t^{\hat{N}} = \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds,$$

$$\nu^{\hat{N}}(A) = \nu^X \left\{ (t, x): Y(t, x) \neq 1, (t, \ln Y(t, x)) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}([0, 1] \times \mathbf{R}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Процесс N является локальным мартингалом в силу свойств стохастических интегралов; из этих свойств также следует, что

$$C_t^N = \langle N^c, N^c \rangle_t = \int_0^1 \beta_s^\top c \beta_s ds.$$

Далее, пусть $A \in \mathcal{B}([0, 1] \times \mathbf{R})$, $\tilde{A} = \{(t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^d: Y(t, x) \neq 1, (t, Y(t, x) - 1) \in A\}$. Поскольку $\Delta N_t = (Y(t, \Delta X_t) - 1)1_{\{\Delta X_t \neq 0\}}$, имеем $1_A * \mu^N = 1_{\tilde{A}} * \mu^X$.

Предположим дополнительно, что $A \subseteq [0, 1] \times \{x: |x| > \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда процесс $1_A * \mu^N$ локально интегрируем и его

компенсатором является $1_A * \nu^N$, который, таким образом, совпадает с компенсатором процесса $1_{\tilde{A}} * \mu^X$, равным $1_{\tilde{A}} * \nu^X$. Это доказывает формулу для $\nu^N(A)$ при $A \subseteq [0, 1] \times \{x: |x| > \varepsilon\}$, что, очевидно, достаточно, так как ν^N не нагружает множество $[0, 1] \times \{0\}$ и $\tilde{A} = \emptyset$, если $A \subseteq [0, 1] \times \{0\}$.

Выражение для первой характеристики B^N получим из того, что N является локальным мартингалом (см. [12, предложение II.2.29]).

Если функция Y строго положительна, имеем $\Delta N > -1$ и $\mathcal{E}(N) > 0$, $\mathcal{E}(N)_- > 0$ Р-п.н., поэтому процесс $\hat{N} = \ln \mathcal{E}(N)$ корректно определен и является семимартингалом. Более того, его характеристики можно вычислить через характеристики N с помощью теоремы II.8.10 из [12]. Формулу для $\nu^{\hat{N}}$ можно также получить аналогично формуле для ν^N с учетом того, что $\Delta \hat{N}_t = \ln(1 + \Delta N) = [\ln Y(t, \Delta X_t)]1_{\{\Delta X_t \neq 0\}}$.

Наконец, из того, что построенные версии триплетов для N и $\hat{N}$ являются детерминированными, следует, что N и $\hat{N}$ являются процессами с независимыми приращениями, а из [11, теорема 5.16] следует, что N — мартингал. Лемма 4 доказана.

Следующее вспомогательное утверждение используется в доказательстве леммы 3 в п. 3.

Лемма 5. Пусть для некоторого $0 < c < 1$ обобщенные плотности экспериментов $(\hat{P}, P)$, $(\bar{P}, P)$, $(\hat{Q}, Q)$, $(\bar{Q}, Q)$ связаны следующими соотношениями:

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = Z^P, \quad \frac{d\bar{P}}{dP} = cZ^P, \quad \frac{d\hat{Q}}{dQ} = Z^Q, \quad \frac{d\bar{Q}}{dQ} = cZ^Q.$$

Соотношение $(\hat{P}, P) \succ (\hat{Q}, Q)$ справедливо тогда и только тогда, когда $(\bar{P}, P) \succ (\bar{Q}, Q)$.

Доказательство. Поставим в соответствие каждому $\pi \in [0, 1]$ число $\hat{\pi} = c\pi/(1 - \pi + c\pi)$. Очевидно, что это взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя и $f_{\hat{\pi}}(x) = f_{\pi}(cx)/(1 - \pi + c\pi)$, где $f_{\pi}(x) = \max\{1 - \pi - \pi x, 0\}$, $\pi \in [0, 1]$. Далее, имеем

$$J_{f_{\pi}}(\bar{P}, P) = E_P f_{\pi}(cZ^P), \quad J_{f_{\hat{\pi}}}(\hat{P}, P) = E_P f_{\hat{\pi}}(Z^P) = \frac{E_P f_{\pi}(cZ^P)}{1 - \pi + c\pi},$$

$$J_{f_{\pi}}(\bar{Q}, Q) = E_Q f_{\pi}(cZ^Q), \quad J_{f_{\hat{\pi}}}(\hat{Q}, Q) = E_Q f_{\hat{\pi}}(Z^Q) = \frac{E_Q f_{\pi}(cZ^Q)}{1 - \pi + c\pi},$$

откуда с использованием соотношения для минимального байесовского риска $b_{(\bar{P}, P)}(\pi) = 1 - \pi - J_{f_{\pi}}(\bar{P}, P)$ и одного из эквивалентных определений сравнимости экспериментов через сравнимость минимальных байесовских рисков (см., например, [1, предложение 2.1]) следует утверждение леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуцин А. А., Мордецки Э. Границы цен опционов для семимартингаловых моделей рынка. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 80–122.
2. Хитол С. А. Формула для обобщенного процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 716–729.
3. Ширяев А. Н., Черный А. С. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 12–56.
4. Cawston S., Vostrikova L. An f -divergence approach for optimal portfolios in exponential Lévy models. arXiv:1012.3136 12/2010.
5. Chan T. Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 2, p. 504–528.
6. Coquet F., Jacod J. Convergence des surmartingales. Application aux vraisemblances partielles. — Lecture Notes in Math., 1990, v. 24, p. 282–299.
7. Eberlein E., Jacod J. On the range of options prices. — Finance Stoch., 1997, v. 1, № 2, p. 131–140.
8. Esche F., Schweizer M. Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why. — Stochastic Process. Appl., 2005, v. 115, № 2, p. 299–327.
9. Hubalek F., Sgarra C. Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models. — Quant. Finance, 2006, v. 6, № 2, p. 125–145.
10. Hurd T. R. A note on log-optimal portfolios in exponential Lévy markets. — Statist. Decisions, 2004, v. 22, № 3, p. 225–233.
11. Jacod J. Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. — Lecture Notes in Math., 1979, v. 714, p. 1–539.
12. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 661 p. (Grundlehren Math. Wiss., v. 228.)
13. Jakubenas P. On option pricing in certain incomplete markets. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 123–142.
14. Jeanblanc M., Klöppel S., Miyahara Y. Minimal f^q -martingale measures of exponential Lévy processes. — Ann. Appl. Probab., 2007, v. 17, № 5-6, p. 1615–1638.
15. Kallsen J. Optimal portfolios for exponential Lévy processes. — Math. Methods Oper. Res., 2000, v. 51, № 3, p. 357–374.
16. Kramkov D., Schachermayer W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
17. Liese F., Miescke K.-J. Statistical Decision Theory. New York: Springer, 2008.
18. Liese F., Vajda I. Convex Statistical Distances. Leipzig: Teubner, 1987, 224 p.
19. Mémín J., Shiryaev A. N. Distance de Hellinger–Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissements indépendants. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, v. 70, № 1, p. 67–89.
20. Schachermayer W. Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
21. Shiryaev A. N., Spokoiny V. G. Statistical Experiments and Decisions. Asymptotic Theory. River Edge: World Scientific Publishing Co., 2000, 281 p.
22. Strasser H. Mathematical Theory of Statistics. Berlin: de Gruyter, 1985, 492 p.
23. Torgersen E. Comparison of Statistical Experiments. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991, 675 p.

Поступила в редакцию
3.V.2011

Исправленный вариант
29.VI.2011