Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, О точности оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 598–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:19:11

© 2013 г.

НОВАК С. Ю.*

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ¹⁾

В работе предложен простой метод получения непараметрических нижних границ точности статистического оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами. Установлены нижние границы среднеквадратических ошибок оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, константы хвоста распределения и экстремального квантиля. Из полученных результатов следует, что нормирующие последовательности робастных оценок должны специфическим образом зависеть от показателя скорости убывания хвоста распределения и константы хвоста распределения.

Ключевые слова и фразы: нижние границы, распределения с тяжелыми хвостами.

1. Введение. Распределения с тяжелыми хвостами возникают естественным образом в финансах, метеорологии, гидрологии, теории передачи информации и т.д. [10], [20]. В частности, замечено, что цены, замеренные через короткие промежутки времени, часто представляются случайными величинами с тяжело-хвостовыми распределениями [5], [10], [15].

Случайная величина X имеет *распределение с тяжелым правым хвостом* (РТХ), если

$$P(X \geq x) = L(x)x^{-\alpha} \quad (x > 0), \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, а (неизвестная) функция L медленно меняется на $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = 1 \quad (\forall t > 0).$$

Класс распределений с тяжелым правым хвостом мы обозначим через $\mathcal{H}$.

Число α в (1) называется *показателем скорости убывания хвоста распределения* (ПСУХ). Это основная характеристика хвоста распределения. Если $L(x) = C + o(1)$, то C называется константой хвоста распределения.

Задача оценивания ПСУХ оказалась непростой; она привлекала внимание исследователей на протяжении десятилетий (см. [10], [18], [20] и ссылки там). Установлена состоятельность и асимптотическая нормальность ряда оценок ПСУХ (см. [10], [18]). Тем не менее вопрос о нижней границе средне-квадратической ошибки оценок ПСУХ в общем случае оставался открытым.

Нижнюю границу средне-квадратической ошибки в случае регулярного параметрического семейства распределений устанавливает знаменитое неравенство Фреше–Рао–Крамера; нижние границы средне-квадратической ошибки известны также для параметрических семейств с определенными нерегулярностями [14], [21].

Отметим, что $\mathcal{H}$ является непараметрическим классом распределений. В задачах непараметрического оценивания типичной представляется ситуация, когда оценка является функцией управляющего (мешающего) параметра (ср. с (15)). Это значительно усложняет задачу статистического оценивания.

* Middlesex University, MUBS, The Burroughs, London NW44BT, UK; e-mail: s.novak@mdx.ac.uk

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Лондонского математического общества.

Первой работой, посвященной вопросу о нижних границах точности оценивания ПСУХ, является статья П. Холла и А. Вэлша [8], где был доказан следующий результат. Пусть $\mathcal{D}_A(\alpha_0, C_0, \varepsilon, b)$ — класс распределений на $(0; \infty)$ с плотностями

$$f(x) = C\alpha x^{-\alpha-1}(1+r(x)), \quad (2)$$

где $\sup_{x>0} |r(x)|x^{b\alpha} \leq A$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \varepsilon$, $|C - C_0| \leq \varepsilon$. Обозначим через $\hat{\alpha}_n \equiv \hat{\alpha}_n(X_1, \dots, X_n)$ произвольную оценку ПСУХ, где $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, и пусть $\{z_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{D}_A} \mathbf{P}_F(|\hat{\alpha}_n - \alpha| > z_n) = 0 \quad (\forall A > 0) \quad (3)$$

для некоторых $\alpha_0 > 0$, $C_0 > 0$, $b > 0$, $\varepsilon > 0$, то

$$z_n \gg n^{-b/(2b+1)}$$

(более точно, Холл и Вэлш получили указанный результат для случайных величин $Y_i = 1/X_i$, где распределение случайных величин X_i удовлетворяет (2)). Я. Бейрлант, К. Букьо и Б. Веркер [1] установили аналогичный результат для более широкого класса $\mathcal{P}$ распределений, но при условии, что оценки являются $\mathcal{O}_P(1)$ равномерно в $\mathcal{P}$.

Близкий результат принадлежит Й. Пфанцалю [19]. Пусть $\mathcal{D}_b$ — класс распределений с плотностями (2) такими, что $\sup_{x>0} |r(x)|x^{\alpha b} < \infty$, $\alpha > 0$. Обозначим

$$s_n(c, P_0) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{n,c}} |\alpha_P - \alpha_{P_0}|,$$

где α_P — показатель скорости убывания хвоста распределения P , $\mathcal{P}_{n,c} = \{P \in \mathcal{D}_b: d_{TV}(P_0^n; P^n) \leq c\}$ — окрестность распределения $P_0 \in \mathcal{D}_b$ и d_{TV} — расстояние по вариации. Пфанцаль показал, что никакая оценка не сходится к α_P равномерно по $\mathcal{P}_{n,c}$ со скоростью лучшей, чем $s_n(c, P_0)$, при этом

$$\inf_{0 < c < 1} c^{-2b/(1+2b)} \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{b/(1+2b)} s_n(c, P_0) > 0.$$

Д. Донохо и Р. Лиу [3] предложили нижнюю границу точности оценивания ПСУХ в терминах модулей непрерывности $\Delta_A(n, \varepsilon)$, однако они не вычисляют $\Delta_A(n, \varepsilon)$; утверждение, что некое распределение с тяжелым хвостом стохастически доминирует все РТХ с тем же ПСУХ, предложено без доказательства. Х. Дреес [4] вывел асимптотику минимаксного риска для аффинных оценок ПСУХ и отметил возможность численного вычисления асимптотики минимаксного риска для неаффинных оценок. П. Холл и А. Вэлш [8] показали также, что $z_n \gg (\ln n)n^{-b/(2b+1)}$, если в (3) $\hat{\alpha}_n - \alpha$ заменить на $\hat{C}_n - C$, где C — константа хвоста распределения, а $\hat{C}_n$ — ее произвольная оценка.

Среди непараметрических семейств тяжело-хвостовых распределений, рассматриваемых в литературе, отметим класс

$$\mathcal{H}_{a,b,c,d} = \left\{ \mathbf{P}: \mathbf{P}(X \geq x) = cx^{-1/a} \left(1 + dx^{-b/a}(1 + o(1)) \right) \right\} \quad (4)$$

распределений на $(1; \infty)$, где $a = 1/\alpha > 0$, $b > 0$, $c \equiv c(a) > 0$, $d \equiv d(a, b) \neq 0$ [17], [18]. Ряд других классов РТХ, а также сравнение оценки Хилла и RE-оценки ПСУХ можно найти в [18]. Параметрическое семейство Парето

$$\mathbf{P}(X \geq x) = x^{-1/a} \quad (x \geq 1, a > 0) \quad (5)$$

можно считать «предельной точкой» класса $\mathcal{H}_{a,b,1,d}$, когда второй индекс, b , стремится к бесконечности. Отметим, что

$$\mathbf{E} \left(\frac{a_n^*}{a} - 1 \right)^2 = \frac{1}{n}, \quad \left(\frac{a_n^*}{a} - 1 \right) \sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0; 1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

в случае независимых одинаково распределенных наблюдений над распределением Парето (5), где $a_n^* = n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln X_i$.

В настоящей работе предлагается простой способ получения непараметрических нижних границ средне-квадратической ошибки. В основе нашего подхода лежит лемма 1, представленная в п. 3. В следующем пункте мы применяем указанный подход к задачам непараметрического оценивания характеристик распределений с тяжелыми хвостами и выводим непараметрические нижние границы среднеквадратической ошибки оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, константы хвоста распределения и экстремального квантиля. Нижние границы средне-квадратической ошибки оценок ПСУХ и экстремальных квантилей получены, насколько нам известно, впервые. Нижние границы увеличиваются при уменьшении α , указывая, что задача оценивания становится сложнее для распределений с более тяжелыми хвостами. Из полученных результатов следует также, что нормализующие последовательности зависят специальным образом от ПСУХ и константы хвоста распределения. Доказательства отнесены в п. 3.

2. Нижние границы. Традиционный подход к получению непараметрических нижних границ предлагает выбрать «как можно больше функций распределений, отделенных друг от друга не менее, чем (небольшим расстоянием) $\delta > 0$ » [12], [13], [9]. Другой метод основан на построении двух «близких» функций распределения F_0 , F_1 [6], [8], [22]. Мы покажем ниже, что последний подход позволяет получать минимальные нижние границы средне-квадратической ошибки оценок ПСУХ, константы хвоста распределения и экстремального квантиля.

Подмечено, что точность оценивания в случае непараметрического класса распределений обычно хуже, чем в случае регулярного параметрического семейства. Точность оценивания зависит от «размерности» класса возможных распределений: чем богаче класс, тем труднее задача выбора между близкими альтернативами, и, следовательно, тем хуже точность оценивания. Например, в задаче непараметрического оценивания плотности исследователь имеет дело с классом распределений, удовлетворяющим определенному условию гладкости; чем более гладкими являются плотности, тем выше точность оценивания [12], в то время как при отсутствии каких-либо предположений о гладкости распределений скорость убывания средне-квадратической ошибки может быть сколь угодно плохой [2].

Аналогично, класс $\mathcal{H}$ распределений с тяжелым правым хвостом представляется слишком «богатым» для получения разумных выводов. В дальнейшем мы будем рассматривать класс

$$\mathcal{H}(b) = \left\{ P \in \mathcal{H}: \sup_{x > K_*(P)} |c_F^{-1} x^{\alpha_F} P(X \geq x) - 1| x^{b\alpha_F} < \infty \right\} \quad (7)$$

распределений на $(0; \infty)$, где $b > 0$, $K_*(P)$ обозначает нижнюю грань носителя распределения, $\alpha_F \equiv \alpha_P$ есть ПСУХ и $c_F \equiv c_P$ — константа хвоста распределения.

Если $P \in \mathcal{H}(b)$, то

$$P(X \geq x) = c_F x^{-\alpha_F} \left(1 + O(x^{-b\alpha_F}) \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Задача оценивания ПСУХ эквивалентна задаче оценивания индекса α по выборке независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением

$$F(y) \equiv \mathbf{P}(Y < y) = y^\alpha \ell(y) \quad (y > 0), \quad (8)$$

где функция ℓ медленно меняется в окрестности нуля. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает класс распределений, удовлетворяющих (8). Тогда $\alpha \equiv \alpha_F$ является функционалом от F :

$$\alpha_F = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\ln F(y)}{\ln y}. \quad (9)$$

Если $\ell(y)$ стремится к константе (скажем, c_F) при $y \downarrow 0$, то тогда c_F также является функционалом от F :

$$c_F = \lim_{y \downarrow 0} y^{-\alpha_F} F(y).$$

Отметим, что $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(1/Y) \in \mathcal{H}$. Традиция рассмотрения указанной эквивалентной задачи восходит к [7].

Классу $\mathcal{H}(b)$ соответствует следующий непараметрический класс распределений на $(0; \infty)$:

$$\mathcal{F}(b) = \left\{ F \in \mathcal{F}: \sup_{y < K^*(F)} |c_F^{-1} y^{-\alpha_F} F(y) - 1| y^{-b\alpha_F} < \infty \right\}, \quad (10)$$

где b — положительное число и $K^*(F)$ — правая грань носителя распределения F . Функция распределения $F \in \mathcal{F}(b)$ удовлетворяет соотношению

$$F(y) = c_F y^{\alpha_F} \left(1 + O(y^{b\alpha_F}) \right) \quad (y \rightarrow 0).$$

В частности, семейству Парето соответствует класс $\{F_a\}_{a>0}$, где $F_a(y) = y^{1/a}$, $0 < y \leq 1$. Более общим является параметрическое семейство $\{F_{\alpha,c}\}$, $\alpha > 0$, $0 < c \leq 1$, где

$$F_{\alpha,c}(y) = \left(\frac{y}{c} \right)^\alpha \quad (0 < y \leq c). \quad (11)$$

Если $Y_1, \dots, Y_n$ — выборка независимых случайных величин, распределенных согласно (11), то оценка максимального правдоподобия

$$\hat{a}_n^* \equiv \frac{1}{\hat{\alpha}_n^*} = \ln \left(\max_{i \leq n} Y_i \right) - n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln Y_i$$

имеет средне-квадратическую ошибку $\mathbf{E}(\hat{a}_n^*/a - 1)^2 = n^{-1}$. Так как непараметрический класс распределений $\mathcal{F}(b)$ значительно «богаче», точность минимаксного оценивания в $\mathcal{F}(b)$ имеет порядок убывания хуже, чем n^{-1} .

Обозначим

$$r = \frac{b}{1 + 2b}.$$

Когда речь идет о функции распределения F_i , мы полагаем $\alpha_i = \alpha_{F_i}$, $a_i = 1/\alpha_i$; $\mathbf{E}_i$ означает математическое ожидание по распределению F_i .

Теорема 1. Для любых $\alpha > 0$ и $c > 0$ существуют функции распределения $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$ такие, что $\alpha_{F_0} = \alpha$, $c_{F_0} = c^{-\alpha}$ и для любой оценки $\hat{a}_n$ показателя скорости убывания хвоста распределения и оценки $\hat{a}_n$ индекса a имеют место неравенства

$$\max_{i \in \{0;1\}} \alpha_{F_i}^{r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{a}_n}{\alpha_{F_i}} - 1 \right)^2 \geq \left(\frac{8r}{ne} \right)^r \frac{t_n}{2}, \quad (12)$$

$$\max_{i \in \{0;1\}} a_{F_i}^{-r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{a}_n}{a_{F_i}} - 1 \right)^2 \geq \left(\frac{8r}{ne} \right)^r \frac{t_n}{2} \quad (13)$$

при $n > 4 \max\{\alpha^2 c^{-2\alpha b}; c^\alpha \alpha^{-1/b}\}$, где

$$t_n = \left(1 - \left(\frac{4}{n} \right)^r \alpha^{-r/b} \max_{i \in \{0;1\}} (c^{r\alpha_{F_i}} \vee 1) \right) e^{-1/(4n)}.$$

Согласно (12), для любой оценки $\hat{a}_n$ существует функция распределения $F \in \mathcal{F}(b)$ такая, что

$$\mathbf{E}_F^{1/2} \left(\frac{\hat{a}_n}{\alpha_F} - 1 \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{8r}{ne} \right)^r \alpha_F^{-r/b} c_F^{-r} (1 + o(1)). \quad (14)$$

Чем меньше α_F , тем тяжелее хвост распределения и тем хуже становится нижняя граница $\mathbf{E}_F^{1/2}(\hat{\alpha}_n/\alpha_F - 1)^2$. Теорема 1 дает теоретическое обоснование известному мнению, что оценивать характеристики распределений с более тяжелыми хвостами труднее.

Важной особенностью нашего результата является зависимость нижней границы от α_F и c_F . Поэтому предлагаемые границы можно назвать «неравномерными».

Неравенства (12)–(14) показывают, что естественной нормирующей последовательностью для $\hat{\alpha}_n/\alpha_F - 1$ является

$$n^{-r} \alpha_F^{-r/b} c_F^{-r}$$

(ср. с (6), заметив, что $r \rightarrow 1/2$ и $r/b \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$). Более того, «равномерная» нижняя граница была бы бессмысленна: для любой оценки $\hat{\alpha}_n$

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(b)} \mathbf{E}_F \left(\frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_F} - 1 \right)^2 n^r \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Число b часто принимает значения 1 (как в случае распределения Фреше) или 2 (как в случае распределения Коши), см. [8], [10]. Следовательно, порядок убывания средне-квадратической ошибки ПСУХ в типичных ситуациях есть $n^{-1/3}$ или $n^{-2/5}$.

Обозначим через

$$\hat{a}_n^{\text{RE}}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(X_i/x) \mathbf{1}\{X_i \geq x\}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \geq x\}}, \quad \hat{\alpha}_n^{\text{RE}}(x) = \frac{1}{\hat{a}_n^{\text{RE}}(x)} \quad (15)$$

RE-оценки ПСУХ α и индекса $a = 1/\alpha$. RE-оценка, по-видимому, является единственной оценкой ПСУХ, для которой асимптотика средне-квадратической ошибки известна:

$$\mathbf{E} \left(\frac{\hat{a}_n^{\text{RE}}(x)}{a} - 1 \right) = v(x), \quad \mathbf{E} \left(\frac{\hat{a}_n^{\text{RE}}(x)}{a} - 1 \right)^2 \sim \frac{1}{n \mathbf{P}(X \geq x)} + v^2(x) \quad (16)$$

в случае независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелым хвостом, где

$$v(x) = a^{-1} \mathbf{E} \left\{ \ln \left(\frac{X}{x} \right) \middle| X \geq x \right\} - 1 \quad (17)$$

[16], [18]. RE-оценку ввели Ч.Голди и Р.Смит [11] (см. [8], [11], [18] об оценках константы хвоста распределения). Для RE-оценки $\hat{a}_n^{\text{RE}}(x_n)$ с пороговым параметром $x \equiv x_n \sim (n/(8r\alpha^2 c^\alpha))^{r/(\alpha b)}$ имеем

$$\max_{i \in \{0;1\}} a_{F_i}^{-r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_{F_i}^{1/2} \left(\frac{\hat{a}_n^{\text{RE}}}{a_{F_i}} - 1 \right)^2 \sim (8r)^{-r/(2b)} n^{-r} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (18)$$

где F_i есть функция распределения $\mathcal{L}_i(1/Y)$. Правая часть (18) отличается от правой части (13) лишь на множитель $e^r/\sqrt{2r}$.

Пусть $\hat{c}_n$ обозначает произвольную оценку константы хвоста распределения. Следующая теорема предлагает нижнюю границу средне-квадратической ошибки оценки $\hat{c}_n$.

Теорема 2. Для любых $\alpha > 0$ и $c > 0$ существуют функции распределения $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$ такие, что $\alpha_{F_0} = \alpha$, $c_{F_0} = c^{-\alpha}$ и

$$\max_{i \in \{0;1\}} t_{i,n} \alpha_{F_i}^{r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{c}_n}{c_{F_i}} - 1 \right)^2 \geq \frac{r}{2b} (\ln n) \left(\frac{8r}{ne} \right)^r \quad (19)$$

для всех достаточно больших n , где $\max_{i \in \{0;1\}} |t_{i,n} - 1| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы теперь переходим к задаче о нижних границах точности оценивания экстремального квантиля. Мы будем называть квантиль «экстремальным», если уровень q_n стремится к нулю с ростом n . Разумеется, имеется бесконечное число возможных порядков скорости убывания q_n . Следующая теорема 3 предлагает нижнюю границу средне-квадратической ошибки оценок экстремального квантиля в случае $q_n \asymp n^{-1/(1+2b)}$. А именно, рассматриваются квантили уровня $q_n = vn^{-1/(1+2b)}$, где v отделено от нуля.

Обозначим через

$$y_i \equiv y_i(q_n) = F_i^{-1}(q_n)$$

квантиль уровня q_n . Соответственно, $1/y_i$ есть верхний квантиль распределения $\mathcal{L}_i(1/Y)$. В финансовых приложениях (см., к примеру, [18] и ссылки там) уровень 0.05 может считаться экстремальным, так как эмпирический квантиль уровня $q \leq 0.05$ представляется ненадежным.

Теорема 3. Пусть $\hat{y}_n$ — произвольная оценка квантиля уровня q_n . Для любых $\alpha > 0$, $c > 0$ и $v < (8\alpha^2 r c^{-2\alpha b})^{r/b}$ существуют функции распределения $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$ такие, что $\alpha_{F_0} = \alpha$, $c_{F_0} = c^{-\alpha}$ и

$$\max_{i \in \{0;1\}} k_{i,n} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r |\ln w_i|^{-1} \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{y}_n}{y_i} - 1 \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{8r}{ne} \right)^r \quad (20)$$

для всех достаточно больших n , где $w_i = v^{1/\alpha_i} (8r\alpha_i^2 c_{F_i}^{2b})^{-r/(\alpha_i b)}$ и $\max_{i \in \{0;1\}} |k_{i,n} - 1| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Неравенство (20) останется в силе, если $\hat{y}_n/y_i - 1$ в его левой части заменить на $y_i/\hat{y}_n - 1$.

Чем меньше v , тем меньше q_n и, следовательно, тем труднее задача оценивания. Неравенство (20) согласуется с этим: $|\ln w_i|$ растет с убыванием v , увеличивая нижнюю границу.

Заметим, что $1/\hat{y}_n$ является оценкой верхнего квантиля уровня q_n РТХ $\mathcal{L}(1/Y)$.

3. Доказательства. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое семейство распределений. Приводимая ниже лемма 1 посвящена общей задаче оценивания функционала (характеристики) a_P неизвестного распределения $P \in \mathcal{P}$ по выборке $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин.

Мы будем считать, что функционал a_P является элементом метрического пространства $(\mathcal{X}, d)$. Оценкой $\hat{a}$ числа a_P называется измеримая функция $X_1, \dots, X_n$, принимающая значения в подпространстве $\{a_P: P \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{X}$.

Если даны два распределения $\{P_0, P_1\} \in \mathcal{P}$, мы обозначаем

$$a_i = a_{P_i}, \quad 2\delta = d(a_0; a_1),$$

$\mathbf{E}_i \equiv \mathbf{E}_{P_i}$ есть математическое ожидание по распределению P_i . Пусть R обозначает функцию потерь, а $d_H(P_0; P_1)$ есть расстояние Хеллингера.

Лемма 1. Если функция $R^{1/2}$ выпукла, то для любой оценки $\hat{a}$

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i R(d(\hat{a}; a_i)) \geq R(\delta) (1 - d_H^2)^{2n}. \quad (21)$$

В частности, для квадратичной функции потерь имеем

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2} d^2(\hat{a}; a_i) \geq \delta (1 - d_H^2)^n. \quad (22)$$

См. [9], [13], [22] и ссылки там касательно литературы по минимаксным нижним границам.

Доказательство леммы 1. Можно предполагать, что $a_1 \neq a_0$. Обозначим

$$\mathbf{E}_* = \max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i R(d(\hat{a}; a_i))$$

и напомним, что

$$d_{\text{H}}^2(P_0; P_1) = \frac{1}{2} \int (f_0^{1/2} - f_1^{1/2})^2 = 1 - \int \sqrt{f_0 f_1},$$

где f_i — плотность распределения P_i по отношению к некоторой мере (например, $P_0 + P_1$). Пусть $f_{i,n}$ обозначает плотность распределения $\mathcal{L}_i(X_1, \dots, X_n)$. По неравенству треугольника,

$$\delta \leq \frac{d(a_0; \hat{a})}{2} + \frac{d(\hat{a}; a_1)}{2}.$$

Так как функция $R^{1/2}$ выпукла, то $R^{1/2}(\delta) \leq R^{1/2}(d(\hat{a}; a_0))/2 + R^{1/2}(d(a_1; \hat{a}))/2$. Поэтому

$$2R^{1/2}(\delta)(1 - d_{\text{H}}^2)^n \leq \int R^{1/2}(d(\hat{a}; a_0))\sqrt{f_{0,n}}\sqrt{f_{1,n}} + \int R^{1/2}(d(a_1; \hat{a}))\sqrt{f_{0,n}}\sqrt{f_{1,n}}.$$

Это соотношение и неравенство Коши–Буняковского влекут

$$2R^{1/2}(\delta)(1 - d_{\text{H}}^2)^n \leq \mathbf{E}_0^{1/2} R(d(\hat{a}; a_0)) + \mathbf{E}_1^{1/2} R(d(\hat{a}; a_1)) \leq 2\mathbf{E}_*^{1/2},$$

откуда следует (21). Лемма 1 доказана.

Наш подход к задаче получения нижних границ использует два распределения P_0 и P_1 , где P_0 — распределение Парето, а $P_1 \equiv P_{1,n}$ есть «видоизмененная» версия P_0 . Затем мы применяем лемму 1, которая предоставляет неасимптотическую нижнюю границу точности оценивания при выборе из двух близких альтернатив.

Доказательство теоремы 1. Пусть заданы произвольные $\alpha > 0$ и $c > 0$. Мы будем иметь дело с функциями распределения F_0 и F_1 , где

$$F_0(y) = \left(\frac{y}{c}\right)^\alpha \mathbf{1}\{0 < y \leq c\},$$

$$F_1(y) = \left(\frac{h}{c}\right)^{-\gamma} \left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha_1} \mathbf{1}\{0 < y \leq h\} + \left(\frac{y}{c}\right)^\alpha \mathbf{1}\{h < y \leq c\},$$

$\alpha_1 > \alpha$, $h \in (0; c)$. Легко заметить, что $F_1 \leq F_0$ и

$$\alpha_{F_0} = \alpha, \quad \alpha_{F_1} = \alpha_1, \quad c_{F_0} = c^{-\alpha}, \quad c_{F_1} = c^{-\alpha} h^{-\gamma}. \quad (23)$$

Обозначим $\alpha_0 = \alpha$, и пусть

$$\alpha_1 = \alpha + \gamma, \quad \gamma = h^{\alpha b}.$$

Очевидно, что $F_0 \in \mathcal{F}(b)$. Проверим теперь, что $F_1 \in \mathcal{F}(b)$. Так как

$$c_{F_1}^{-1} y^{-\alpha_1} F_1(y) = y^{-\gamma} h^\gamma \quad (h < y \leq c),$$

имеем

$$\sup_{0 < y \leq c} |1 - c_{F_1}^{-1} y^{-\alpha_1} F_1(y)| y^{-b\alpha_1} = \sup_{h < y \leq c} (1 - y^{-\gamma} h^\gamma) y^{-b\alpha_1}. \quad (24)$$

Функция в правой части (24) достигает своего максимума на $y_0 = h(1 + \gamma/(b\alpha_1))^{1/\gamma}$ и не превосходит $e^{1/(e\alpha)}/(b\alpha)$.

Легко проверить, что

$$d_{\text{H}}^2(F_0; F_1) = \left(\frac{h}{c}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \gamma/\alpha}}{1 + \gamma/(2\alpha)}\right) \sim \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha}$$

при $\gamma \rightarrow 0$, и

$$d_{\text{H}}^2(F_0; F_1) \leq \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha}. \quad (25)$$

Неравенство (25) типично в задачах непараметрического оценивания. Непараметрический класс распределений обычно настолько «богат», что можно найти распределения $\{P_t, t \geq 0\}$ такие, что $d_H(P_0; P_t) \asymp |t|^\nu$, где $\nu > 1$, в то время как в случае регулярного параметрического семейства $d_H(P_0; P_t) \asymp |t|$.

Согласно лемме 1,

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha_{F_i})^2 \geq \frac{\gamma}{2} (1 - d_H^2)^n \geq \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha}\right)^n. \quad (26)$$

Максимум по γ в этом неравенстве достигается на $\gamma = \gamma_n$, где

$$\gamma_n \equiv \gamma_n(\alpha, b, c) = \frac{(8\alpha^2 c^\alpha)^r}{(1 + n/r)^r}, \quad (27)$$

и мы получим

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha_i)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{8r\alpha^2 c^\alpha}{n}\right)^r \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n-r}.$$

Заметим, что $h < c$ при $n \geq 8\alpha^2 r c^{-2b\alpha}$. Легко проверить, что $\alpha/\alpha_1 = 1 - \gamma/\alpha_1$, $\gamma = \gamma_n \leq (4\alpha^2 c^\alpha/n)^r$ и $c^{\alpha r} \leq c^{\alpha_1 r}$ при $c > 1$. Следовательно,

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{2r} \geq 1 - \frac{2r\gamma}{\alpha_1} \geq 1 - 2r \left(\frac{8r}{n}\right)^r \alpha_1^{2r-1} c^{\alpha r} \geq 1 - \left(\frac{4}{n}\right)^r \alpha_1^{2r-1} (c^{r\alpha_1} \vee 1). \quad (28)$$

Принимая во внимание (23), мы приходим к (12). Аналогично ($a_i := 1/\alpha_i$, $a := a_0$),

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2}(\hat{a}_n - a_i)^2 \geq \frac{aa_1}{2} \gamma \left(1 - \frac{\gamma^{1/r} a^2}{8c^{1/a}}\right)^n = \frac{a_1}{2} a^{1-2r} c^{r/a} \left(\frac{8r}{n}\right)^r \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n-r},$$

что влечет (13). Теорема доказана.

Что касается (18), если F_i есть функция распределения случайной величины $1/X$, $i \in \{0;1\}$, то представляется естественным положить

$$x_n = \frac{1}{h} = \gamma_n^{-a/b} \sim \left(\frac{n}{8r\alpha^2 c^\alpha}\right)^{r/(\alpha b)}.$$

Тогда $v(x_n) = 0$ ввиду (17), и (18) следует из (16).

Доказательство теоремы 2. Обозначим $c_i := c_{F_i}$, где функции распределения F_0 и F_1 — те же, что и раньше. Тогда

$$c_{F_1} - c_{F_0} = c^{-\alpha} (\gamma^{-\gamma/(\alpha b)} - 1) \geq \frac{c^{-\alpha} \gamma |\ln \gamma|}{\alpha b}.$$

Используя это неравенство и (22), мы выводим

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2}(\hat{c}_n - c_i)^2 \geq c^{-\alpha} (2\alpha b)^{-1} \gamma |\ln \gamma| \left(1 - \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha}\right)^n.$$

Полагая $\gamma = \gamma_n$ (см. (27)), получим

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2}(\hat{c}_n - c_i)^2 \geq r c^{\alpha(r-1)} (2\alpha^{r/b} b)^{-1} \left(\frac{8r}{ne}\right)^r \ln \left(\frac{n}{8r\alpha^2 c^\alpha}\right)$$

для всех достаточно больших n , откуда и следует (19). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Обозначим

$$\kappa = v^{1/\alpha} (8\alpha^2 c^\alpha r)^{-r/(\alpha b)}.$$

Нам будет удобно иметь дело с эквивалентной задачей оценивания квантилей уровня

$$q_n = \kappa^\alpha \gamma_n^{1/b} \sim v n^{-r/b},$$

где $\gamma = \gamma_n$ определено в (27).

Заметим, что $q_n = (\kappa h)^\alpha$. Пусть функции распределения F_0, F_1 — те же, что и раньше. Легко проверить, что

$$y_0 = \kappa h = c q_n^{1/\alpha} < h, \quad y_1 = (c\kappa)^{\alpha/\alpha_1} h, \quad c\kappa < 1.$$

Поскольку $e^x - 1 \geq x e^{x/2}$ ($x \geq 0$), мы выводим

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= c q_n^{1/\alpha_1} \left(\left(\frac{h}{c} \right)^{\gamma/\alpha_1} - q_n^{\gamma/(\alpha\alpha_1)} \right) \\ &= ((c\kappa)^{-\gamma/\alpha_1} - 1) c\kappa h \geq \gamma^{1+1/(\alpha b)} (c\kappa)^{1-\gamma/(2\alpha_1)} \frac{|\ln c\kappa|}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Это соотношение и (22) влекут

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2} (\hat{y}_n - y_i)^2 \geq \frac{|\ln c\kappa|}{2\alpha_1} c\kappa \gamma^{1+1/(\alpha b)} \left(1 - \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha} \right)^n. \quad (29)$$

Полагая $\gamma = \gamma_n$, получим

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{y}_n}{y_i} - 1 \right)^2 &\geq \frac{1}{y_i} \frac{|\ln c\kappa|}{2\alpha_1} c\kappa \gamma^{1+1/(\alpha b)} \left(1 - \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha} \right)^n \\ &= \frac{|\ln c\kappa|}{2\alpha_1} (c\kappa)^{1-\alpha/\alpha_i} \gamma_n \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{-n}. \end{aligned}$$

Используя (27) и (28), приходим к соотношению

$$\max_{i \in \{0;1\}} k_{i,n} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{\hat{y}_n}{y_i} - 1 \right)^2 \geq \frac{1}{2} |\ln c\kappa| \left(\frac{8r}{n\epsilon} \right)^r \quad (30)$$

для всех достаточно больших n . Заметим, что

$$c\kappa = v^{1/\alpha} (8\alpha^2 r c_{F_0}^{2b})^{-r/(\alpha b)}.$$

Следовательно, (20) вытекает из (30).

Поскольку

$$|1/y_1 - 1/y_0| = |y_1 - y_0|/(y_0 y_1) \geq |\ln c\kappa| (c\kappa)^{-1+\gamma/(2\alpha_1)} \gamma^{1-1/\alpha b} / \alpha_1,$$

мы имеем

$$\max_{i \in \{0;1\}} \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{y_i}{\hat{y}_n} - 1 \right)^2 \geq \frac{|\ln c\kappa|}{2\alpha_1} (c\kappa)^{\gamma/(2\alpha_1)} \gamma \left(1 - \frac{\gamma^{1/r}}{8\alpha^2 c^\alpha} \right)^n,$$

откуда вытекает следующий аналог неравенства (20): в условиях теоремы 3

$$\max_{i \in \{0;1\}} k_{i,n} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{y_i}{\hat{y}_n} - 1 \right)^2 \geq \frac{1}{2} |\ln c\kappa| \left(\frac{8r}{n\epsilon} \right)^r$$

и, следовательно,

$$\max_{i \in \{0;1\}} k_{i,n} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r |\ln w_i|^{-1} \mathbf{E}_i^{1/2} \left(\frac{y_i}{\hat{y}_n} - 1 \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{8r}{n\epsilon} \right)^r \quad (31)$$

для всех достаточно больших n . Неравенство (31) является минимаксной нижней границей средне-квадратической ошибки произвольной оценки $1/\hat{y}_n$ верхнего квантиля уровня q_n распределений $\mathcal{L}_i(1/Y) \in \mathcal{H}(b)$. Теорема 3 доказана.

Автор признателен рецензентам за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beirlant J., Bouquiaux C., Werker B. J. M.* Semiparametric lower bounds for tail index estimation. — J. Statist. Plann. Inference, 2006, v. 136, № 3, p. 705–729.
2. *Devroye L.* Another proof of a slow convergence result of Birgé. — Statist. Probab. Lett., 1995, v. 23, № 1, p. 63–67.
3. *Donoho D. L., Liu R. C.* Geometrizing rates of convergence. II, III. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 2, p. 633–667; p. 668–701.
4. *Drees H.* Minimax risk bounds in extreme values theory. — Ann. Statist., 2001, v. 29, № 1, p. 266–294.
5. *Fama E. F., Roll R.* Some properties of symmetric stable distributions. — J. Amer. Statist. Assoc., 1968, v. 63, p. 817–836.
6. *Farrell R. H.* On the best obtainable asymptotic rates of convergence in estimation of a density function at a point. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 170–180.
7. *Hall P.* On estimating the endpoint of a distribution. — Ann. Statist., 1982, v. 10, № 2, p. 556–568.
8. *Hall P., Welsh A. H.* Best attainable rates of convergence for estimates of parameters of regular variation. — Ann. Statist., 1984, v. 12, № 3, p. 1079–1084.
9. *Huber C.* Lower bounds for function estimation. — Festschrift for L. Le Cam. New York: Springer, 1997, p. 245–258.
10. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer-Verlag, 1997, 645 p.
11. *Goldie C. M., Smith R. L.* Slow variation with remainder: theory and applications. — Quart. J. Math. Oxford, 1987, v. 38, № 149, p. 45–71.
12. *Ибрагимов И. А., Хасьминский П. З.* Об оценке плотности распределения. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1980, т. 98, с. 61–85.
13. *Ибрагимов И. А., Хасьминский П. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
14. *Lenstra A. J.* Cramér–Rao revisited. — Bernoulli, 2005, v. 11, № 2, p. 263–282.
15. *Mandelbrot B. B.* New methods in statistical economics. — J. Political Economy, 1963, v. 71, p. 421–440.
16. *Новак С. Ю., Утев С. А.* Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, с. 92–101.
17. *Новак С. Ю.* О распределении отношения сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 533–560.
18. *Novak S. Y.* Advances in extreme value theory with applications to finance. — New Business and Finance Research Developments. Ed. by C. Keene. New York: Nova Science, 2009, p. 199–251.
19. *Pfanzagl J.* On local uniformity for estimators and confidence limits. — J. Statist. Plann. Inference, 2000, v. 84, № 1–2, p. 27–53.
20. *Resnick S. I.* Heavy tail modeling and teletraffic data. — Ann. Statist., 1997, v. 25, № 5, p. 1805–1869.
21. *Шемякин А. Е.* Об информационных неравенствах в теории параметрического оценивания. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 3, с. 121–123.
22. *Tsybakov A. B.* Introduction to Nonparametric Estimation. New York: Springer, 2009, 175 p.

Поступила в редакцию
20.XII.2009

Исправленный вариант
3.III.2013