Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Сюлюкин, Об асимптотических разложениях для сверток распределений, принадлежащих зонам притяжения устойчивых законов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 608–614

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:40:01

© 2013 г.

СЮЛЮКИН А. В.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ СВЕРТОК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ЗОНАМ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ

Рассмотрены асимптотические разложения, уточняющие предельные теоремы с предельными устойчивыми распределениями. Получены явные оценки остаточных частей таких разложений.

Ключевые слова и фразы: предельные теоремы в схеме накопленных сумм, асимптотические разложения, точность аппроксимации.

Хорошо известна задача об асимптотических разложениях, уточняющих предельные теоремы с устойчивыми предельными законами. Одни из первых результатов здесь принадлежат Г. Крамеру (см. [5, гл. IV, § 7, п. 2, с. 239]). Дальнейшее развитие эта задача получила в работах [1], [10]–[12] и др.

В цитированных статьях установлены асимптотические разложения для нормированных свертков распределений с оценками остаточных частей, выписанных в терминах o -символики. Явные оценки остаточных частей не приводятся, между тем такие оценки известны для разложений Эджворта (и их модификаций), уточняющих центральную предельную теорему (см. [7]). Цель настоящей статьи — выписать несколько асимптотических разложений для случая устойчивых предельных распределений с явными оценками их остаточных частей. Приведенные разложения являются частными случаями разложений из [10] и аналогами разложения из [8], вместе с тем они достаточно просты и с их помощью можно моделировать распределения (в том числе n -мерные), близкие к устойчивым законам. Отметим, что приемы, предложенные в работе, могут быть использованы и для оценки остаточных частей более общих разложений из [10] и [11].

1. Одномерные разложения. Введем обозначения: $P(x)$ — функция распределения, соответствующая вероятностной мере P ; $S(x)$ — функция распределения некоторого устойчивого закона; $s(x)$ — плотность $S(x)$; $\phi_S(t)$ — характеристическая функция S ; $0 < \alpha < 2$, $d > 0$, α, d — числа, определяемые из соотношения $|\phi_S(t)| = e^{-d|t|^\alpha}$; $S_{n-l}(x) = S((n/(n-l))^{1/\alpha}x)$; $s_{n-l}(x)$ — плотность $S_{n-l}(x)$; $n, l, n-l \in \mathbf{N}$;

$$\Delta_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d(P - S)(x), \quad |\Delta|_j = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^j d(P - S)(x), \quad j \in \mathbf{Z}_+;$$

$$B_k^j(d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^j e^{-d(k/n)|t|^\alpha} dt, \quad \text{где } j \in \mathbf{Z}_+, k, n \in \mathbf{N}, d \in \mathbf{R};$$

$$\alpha(T) = \max_{t \geq T} \max \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|^\alpha} \right\}.$$

Везде далее, где будут использованы величины Δ_j , $|\Delta|_j$, предполагается, что они конечны. Отметим, что $|\Delta|_j$ — вариация с весом $|x|^j$ между распределениями P и S . Будем называть $|\Delta|_j$ псевдомоментом порядка j распределения P .

Нам понадобится следующее условие на характеристическую функцию $f(t)$ распределения P :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty \quad \text{для некоторого } \nu > 0. \quad (1)$$

* Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия; e-mail: syulyukin@yandex.ru

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, абсолютный псевдомомент порядка $m+1$, $m \in \mathbf{N}$, распределения P конечен и выполнено условие (1). Тогда для $n > \nu + M$, где $M = M(m) = [m/(1-\alpha)] + 2$, существует плотность $p_n(x)$ распределения $P^{*n}(n^{1/\alpha}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, такая, что

$$p_n(x) = s(x) + \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{l+k} s_{n-l}^{(l+k)}(x)}{n^{(l+k)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_l = l+k}} \frac{\Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + R_{m+1},$$

где для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} |R_{m+1}| &\leq \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \frac{B_{n-l}^{l+m}(d)}{n^{(l+m)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_l = l+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \cdots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + C_n^M \frac{|\Delta|_1^M B_{n-M}^M(d/2)}{n^{M/\alpha}} \\ &+ \frac{2^M}{\pi} n^{1/\alpha} C_n^M \alpha^{n-\nu-M}(T) \int_T^\infty \max^\nu \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|^\alpha} \right\} dt, \\ T &= \min \left\{ \left(\frac{1}{4|\Delta|_1} \right)^{1/(1-\alpha)}, \left(\frac{1}{2d} \right)^{1/\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Число $M = M(m)$ выбрано наименьшим целым числом, для которого

$$C_n^M \frac{|\Delta|_2^M B_{n-M}^M(d/2)}{(2!)^M n^{M/\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/\alpha-1}}\right), \quad R_{m+1} = O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/\alpha-1}}\right).$$

Индекс $m+1$ у величины R_{m+1} указывает на то, что в оценке остаточной части используются абсолютные псевдомоменты вплоть до порядка $m+1$.

Заметим, что производные любых порядков плотностей устойчивых распределений существуют. Явные выражения для них в общем случае неизвестны, но для производных плотностей устойчивых законов можно получать представления в виде асимптотических рядов. Асимптотические ряды для самих плотностей можно найти, например, в [2], [3].

Теорема 2. Пусть $\alpha \in [1, 2)$, первый псевдомомент распределения P равен нулю, абсолютный псевдомомент порядка $m+2$, $m \in \mathbf{N}$, конечен и выполнено условие (1). Тогда для $n > \nu + M$, где

$$M = M(m) = \begin{cases} \left[\frac{m}{2-\alpha} \right] + 2, & \alpha \in (1, 2), \\ m+1, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2)$$

существует плотность $p_n(x)$ распределения $P^{*n}(n^{1/\alpha}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, такая, что

$$p_n(x) = s(x) + \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{2l+k} s_{n-l}^{(2l+k)}(x)}{n^{(2l+k)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+k}} \frac{\Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + R_{m+2},$$

где для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} |R_{m+2}| &\leq \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \frac{B_{n-l}^{2l+m}(d)}{n^{(2l+m)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \cdots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + C_n^M \frac{|\Delta|_2^M B_{n-M}^M(d/2)}{(2!)^M n^{2M/\alpha}} \\ &+ \frac{2^M}{\pi} n^{1/\alpha} C_n^M \alpha^{n-\nu-M}(T) \int_T^\infty \max^\nu \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|^\alpha} \right\} dt, \\ T &= \min \left(\left(\frac{1}{2|\Delta|_2} \right)^{1/(2-\alpha)}, \left(\frac{1}{2d} \right)^{1/\alpha} \right). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Число $M = M(m)$ выбрано наименьшим целым числом, для которого

$$C_n^M \frac{|\Delta|_2^M B_{n-M}^{2M}(d/2)}{(2!)^M n^{2M/\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^{(m+2)\alpha-1}}\right), \quad R_{m+2} = O\left(\frac{1}{n^{(m+2)/\alpha-1}}\right).$$

Из утверждения о конечности некоторого абсолютного псевдомомента распределения P следует, что разность характеристических функций распределений P и S разлагается в нуле в отрезок ряда Тейлора. Приведем асимптотическое разложение с явной оценкой в случае, когда отношение характеристических функций разложимо в ряд Тейлора.

Теорема 3. Если

$$f(t) = \phi_S(t) \left(1 + \alpha_1 it + \dots + \alpha_{m+1} \frac{(it)^{m+1}}{(m+1)!} + \beta_{m+2} \frac{(it)^{m+2}}{(m+2)!} \gamma(t) \right),$$

где $\gamma(t)$ — комплекснозначная функция, $|\gamma(t)| \leq 1$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq m+1$, $\beta_{m+2} > 0$, $m \in \mathbf{N}$, то для плотности $p_n(x)$ верно разложение из теоремы 1 с заменой, для всех встречающихся в этом разложении j , величин $s_{n-l}^{(j)}(x)$, Δ_j из главной части на $s^{(j)}(x)$, α_j , а величин

$$B_{n-l}^j(d), \quad B_{n-M}^M\left(\frac{d}{2}\right), \quad |\Delta|_j, \quad T = \min \left\{ \left(\frac{1}{4|\Delta|_1} \right)^{1/(1-\alpha)}, \left(\frac{1}{2d} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

на

$$B_n^j(d), \quad B_n^M\left(\frac{d}{2}\right), \quad \beta_j, \quad T = \left(\frac{d}{2|\Delta|_1} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

из оценки остаточной части.

З а м е ч а н и е 3. Для характеристической функции $f(t)$ из теоремы 3 условие (1) выполнено при любом $\nu > 0$.

Далее для краткости мы будем формулировать утверждения для случая $\alpha \in [1, 2)$.

Аналогом теоремы 2 для функций распределения является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\alpha \in [1, 2)$, первый псевдомомент между распределениями P и S равен нулю, абсолютный псевдомомент порядка $m+2$, $m \in \mathbf{N}$, конечен. Тогда для функции распределения $P_n(x)$ меры $P^{*n}(n^{1/\alpha}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, при $n > \nu + M$, где M определено в (2), верно разложение

$$P_n(x) = S(x) + \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{2l+k} S_{n-l}^{(2l+k)}(x)}{n^{(2l+k)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+k}} \frac{\Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + R_{m+2},$$

где для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} |R_{m+2}| &\leq \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \frac{B_{n-l}^{2l+m-1}(d)}{n^{(2l+m)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \cdots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} \\ &\quad + C_n^M \frac{|\Delta|_2^M B_{n-M}^{2M-1}(d/2)}{(2!)^M n^{2M/\alpha}} + \frac{24\eta_{M,n}}{\pi T^n n^{n/\alpha}} \\ &\quad + \frac{2^{M+1}(n-1)}{\pi} C_n^M \theta^{n-M} \max\{0, \ln(Tn^{1/\alpha})\}, \\ \eta_{M,n} &= \sum_{j=0}^{M-1} \frac{C_n^j B_{n-j}^{2j} |\Delta|_2^j}{2^j n^{2j/\alpha}}, \quad \theta = \sup_{|t| \geq T} |f(t)|, \end{aligned}$$

$$T = \min \left\{ \left(\frac{1}{2|\Delta|_2} \right)^{1/(2-\alpha)}, \left(\frac{1}{2d} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

З а м е ч а н и е 4. Если характеристическая функция $f(t)$ распределения P такова, что $\overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$, то $\theta < 1$; при этом $\eta_{M,n} \rightarrow (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-d|t|^\alpha} dt$, $n \rightarrow \infty$.

2. Многомерное разложение. Пусть $x \in \mathbf{R}^D$, и пусть характеристическая функция $\phi_S(t)$, $t \in \mathbf{R}^D$, устойчивого распределения $S(x) = S(\alpha, \Lambda, \mu, x)$, $0 < \alpha < 2$, имеет вид

$$\phi_S(t) = \exp \left(it^T \mu - \int_{\mathbf{S}} \left(|t^T u|^\alpha + i\nu(t^T u, \alpha) \right) \Lambda(du) \right),$$

где

$$\nu(y, \alpha) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(y) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) |y|^\alpha, & \alpha \neq 1, y \in \mathbf{R}, \\ \frac{2}{\pi} y \ln |y|, & \alpha = 1, \end{cases}$$

Λ — конечная мера на единичной сфере $\mathbf{S} = \{u \in \mathbf{R}^D: |u| = 1\}$, $\mu \in \mathbf{R}^D$. Для $x \in \mathbf{R}^D$ введем следующие обозначения: $P(x)$ — функция распределения, соответствующая вероятностной мере P ; $S(x)$ — функция распределения некоторого устойчивого закона; $s(x)$ — плотность $S(x)$; $S_{n-l}(x) = S((n/(n-l))^{1/\alpha} x)$; $s_{n-l}(x)$ — плотность $S_{n-l}(x)$; $n, l, n-l \in \mathbf{N}$; $s_{n-l}^{(l)}(x)[h]$ — l -я производная по Фреше, взятая в вектор-точке x и примененная к вектору h (подробнее см. [4], [6]); $Q = P - S$;

$$|\Delta|_j = \sup_{|e|=1, e \in \mathbf{R}^D} \int_{\mathbf{R}^D} |(x, e)|^j |d(P - S)(x)|, \quad j \in \mathbf{Z}_+;$$

$$\alpha(T) = \max_{|t| \geq T} \max \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|^\alpha} \right\};$$

$$\Delta_1(e) = \int_{\mathbf{R}^D} (x, e) d(P - S)(x); \quad B_k^j(d) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathbf{R}^D} |t|^j e^{-d(k/n)|t|^\alpha} dt,$$

где $j \in \mathbf{Z}_+$, $k, n \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{R}$. Обобщение условия (1) на D -мерный случай имеет вид

$$\int_{\mathbf{R}^D} |f(t)|^\nu dt < \infty \quad \text{для некоторого } \nu > 0. \quad (3)$$

Теорема 5. Пусть $\Delta_1(e) = 0$ для любого $e \in \mathbf{R}^D$, и пусть выполнены остальные D -мерные аналоги условий теоремы 2. Тогда при $n > \nu + M$, где M определено в (2), справедливо разложение

$$p_n(x) = s(x) + \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{2l+m} \times \int_{\mathbf{R}^D} \dots \int_{\mathbf{R}^D} \frac{s_{n-l}^{(2l+k)}(x)[h_1 + \dots + h_l]}{n^{(2l+k)/\alpha} (2l+k)!} Q(dh_1) \dots Q(dh_l) + R_{m+2},$$

где для любого $x \in \mathbf{R}^D$

$$|R_{m+2}| \leq \sum_{l=1}^{M-1} C_n^l \frac{B_{n-l}^{2l+m}(d)}{n^{(2l+m)/\alpha}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \dots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \dots i_l!} + C_n^M \frac{|\Delta|_2^M B_{n-M}^{2M}(d/2)}{(2!)^M n^{2M/\alpha}} + \frac{2^M}{(2\pi)^D} n^{D/\alpha} C_n^M \alpha^{n-\nu-M}(T) \int_{|t| \geq T} \max^\nu \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|^\alpha} \right\} dt,$$

$$T = \min \left\{ \left(\frac{1}{2|\Delta|_2} \right)^{1/(2-\alpha)}, \left(\frac{1}{2d} \right)^{1/\alpha} \right\}, \quad d = \Lambda(\mathbf{S}).$$

Рассмотрим двумерное распределение Коши с плотностью $\kappa(x, y) = (2\pi)^{-1}(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$. В условиях теоремы 5 с предельным распределением $\kappa(x, y)$ и $m = 1$ имеем:

$$p_n(x, y) = \kappa(x, y) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \frac{\kappa_1^{-5/2}(x, y)}{2\pi n} \\ \times \left(\frac{15}{2} \frac{n}{n-1} \kappa_1^{-1}(x, y) (\Delta_{2,x} x^2 + 2\Delta_{2,xy} xy + \Delta_{2,y} y^2) - 3\Delta_{2,x} - 3\Delta_{2,y}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\Delta_{2,x} = \int_{\mathbf{R}^2} x^2 dQ(x, y), \quad \Delta_{2,xy} = \int_{\mathbf{R}^2} xy dQ(x, y), \\ \kappa_1(x, y) = \left\{1 + \left(\frac{n}{n-1} x\right)^2 + \left(\frac{n}{n-1} y\right)^2\right\}^{-1}.$$

3. Об оптимизации разложений. Известны так называемые короткие, средние и длинные асимптотические разложения в центральной предельной теореме (см. [7]). Аналогичные утверждения можно сформулировать и в случае сходимости к произвольному устойчивому закону. Например, в следующем утверждении приводится некоторый набор асимптотических разложений. Каждое разложение получается с помощью выбора индексов суммирования $N(l)$ (см. далее).

Теорема 6 (о выборе оптимального разложения). Пусть выполнены условия теоремы 2 с $\alpha = 1$. Пусть $N(l)$ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $l+1 \leq N(l) \leq 2l$, $1 \leq l \leq m$. Тогда при $n > m + \nu + 1$ справедливо разложение

$$p_n(x) = s(x) + \sum_{l=1}^m C_n^l \sum_{k=0}^{m+N(l)-2l-1} \frac{(-1)^{2l+k} s_{n-l}^{(2l+k)}(x)}{n^{2l+k}} \\ \times \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = 2l+k}} \frac{\Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} + R_{m+1},$$

где для любого $x \in \mathbf{R}$

$$|R_{m+1}| \leq \sum_{l=1}^m C_n^l \frac{B_{n-l}^{N(l)+m}(d)}{n^{N(l)+m}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = N(l)+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \cdots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} \\ + C_n^{m+1} \frac{|\Delta|_2^{m+1} B_{n-m-1}^{2(m+1)}(d/2)}{(2!)^{m+1} n^{2(m+1)}} \\ + \frac{2^{m+1}}{\pi} n C_n^{m+1} \alpha^{n-\nu-m-1}(T) \int_T^\infty \max^\nu \left\{ |f(t)|, e^{-d|t|} \right\} dt, \\ T = \min \left\{ \frac{1}{2|\Delta|_2}, \frac{1}{2d} \right\}.$$

Числа $N(l)$ можно выбрать следующим образом:

$$N(l) = N(l; n, m, |\Delta|_2, \dots, |\Delta|_{m+2}) \\ = \arg \min_{l+1 \leq N \leq 2l} \left\{ f(N): f(N) = C_n^l \frac{B_{n-l}^{N+m}}{n^{N+m}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \geq 2 \\ i_1 + \dots + i_l = N+m}} \frac{|\Delta|_{i_1} \cdots |\Delta|_{i_l}}{i_1! \cdots i_l!} \right\}. \quad (4)$$

Здесь нам удобнее обозначить остаточную часть R_{m+1} , а не R_{m+2} , как в теореме 2. Разложение с индексами $N(l) = 2l$ естественно назвать длинным разложением. Подобные разложения выписаны во всех предыдущих утверждениях. Разло-

жение с $N(l) = l + 1$ короткое, остальные разложения средние. Разложение с индексами $N(l)$, определенными в (4), является разложением с наименьшей оценкой остаточной части из всех разложений в теореме 6.

4. Пояснения. Схема доказательства сформулированных утверждений следующая. Для нормированной n -кратной свертки распределения P выписывается разложение Бергстрёма. Остаточная часть разложения Бергстрёма оценивается методом характеристических функций и, в случае разложений для распределений, с помощью неравенства Берри–Эссеена. Главные части разложения Бергстрёма раскладываются в ряды типа Эджворта, а для уменьшения оценки остаточных частей используется комбинаторное соотношение (лемма 1 ниже), которое позволяет оценить остаточную часть разложения, грубо говоря, следующими по порядку членами главного разложения и только ими (см. [8]).

Лемма 1. Пусть $F_k = \sum_{i=k}^{\infty} f_i$, $k \in \mathbf{N}$, — сходящиеся ряды вещественных чисел. Тогда для $F_k^n = (\sum_{i=k}^{\infty} f_i)^n$ справедливо соотношение

$$F_k^n = \sum_{i=nk}^m \sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_l=n, \\ m_0k+m_1(k+1)+\dots+m_l(k+l)=i}} \frac{n!}{m_0!m_1!\dots m_l!} f_k^{m_0} f_{k+1}^{m_1} \dots f_{k+l}^{m_l} + R_{m+1}^n, \quad (5)$$

где

$$R_{m+1}^n = \sum_{\substack{m_0+m_1+\dots+m_l=n, \\ m_0k+m_1(k+1)+\dots+m_l(k+l)=m+1, \\ m_l \neq 0}} C_{m_0+\dots+m_l}^{m_1+\dots+m_l} f_k^{m_0} \dots C_{m_{l-2}+\dots+m_l}^{m_{l-1}+m_l} f_{k+l-2}^{m_{l-2}} \dots f_{k+l}^{m_{l-1}} \\ \times \left(\sum_{i=0}^{m_{l-1}} C_{m_{l-1}+m_{l-1}-i}^{m_{l-1}-1} F_{k+l-1}^i f_{k+l-1}^{m_{l-1}-i} \right) C_{m_l}^0 F_{k+l}^{m_l}$$

(здесь $n, m \in \mathbf{N}$, $l, m_0, \dots, m_l \in \mathbf{Z}_+$, $nk \leq m$).

З а м е ч а н и е 5. В (5) слагаемые $(n!/(m_0!m_1!\dots m_l!))f_k^{m_0}f_{k+1}^{m_1}\dots f_{k+l}^{m_l}$ можно заменить на $C_{m_0+\dots+m_l}^{m_1+\dots+m_l}f_k^{m_0}C_{m_1+\dots+m_l}^{m_2+\dots+m_l}f_{k+1}^{m_1}\dots C_{m_{l-1}+m_l}^{m_l}f_{k+l-1}^{m_{l-1}}C_{m_l}^0f_{k+l}^{m_l}$. Величина R_{m+1}^n зависит и от k .

Например, $(f_1 + f_2 + \dots)^3 = (f_1 + F_2)^3 = f_1^3 + f_1^2F_2 + f_1F_1F_2 + F_1^2F_2$.

Автор благодарит В. В. Сенатова за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Аналог асимптотического разложения Эджворта–Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения. — Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс: Гос. изд-во полит. и науч. лит. ЛитССР, 1962, с. 49–50.
2. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Осмоловский И. Ю. О некоторых свойствах многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 373–378.
5. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967, 495 с.
6. Сенатов В. В. Об одном многомерном аналоге разложения Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 603–610.
7. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009, 350 с.
8. Сюлюкин А. В. Об асимптотических разложениях Бергстрёма–Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 176–185.

9. Ярославцева Л. С. Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 390–393.
10. Кристоф Г. Асимптотические разложения в случае устойчивого предельного закона. I. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, № 2, с. 87–100.
11. Christoph G., Wolf W. Convergence Theorems with a Stable Limit Law. Berlin: Akademie Verlag, 1992, 200 p.
12. Миталаускас А., Статулявичус В. Асимптотическое разложение в случае устойчивого аппроксимирующего закона. — Литов. матем. сб., 1976, т. 16, № 4, с. 149–166.

Поступила в редакцию
19.IV.2012

© 2013 г.

JAIMUNGAL S.*, KREININ A.** , VALOV A.***

THE GENERALIZED SHIRYAEV PROBLEM AND SKOROKHOD EMBEDDING¹⁾

Рассматривается связь между знаменитой проблемой вложения Скорохода и обратной задачей Ширяева для распределения момента первого достижения в случае броуновского движения: для заданного распределения вероятностей F найти границу такую, что распределение момента первого ее достижения процессом есть F . Рандомизируя начальное состояние процесса, мы показываем, что обратная задача допускает аналитическое решение. Рандомизация начального состояния позволяет значительно расширить класс рассматриваемых распределений в случае линейной границы, а также выявить связь с проблемой вложения Скорохода.

Ключевые слова и фразы: момент первого достижения, обратная задача Ширяева о границе, вложение Скорохода.

1. Introduction. Let X_t be an arbitrary process with the left-continuous sample paths and let $b(t)$ be a continuous absorbing boundary satisfying the condition $X_0 \geq b(0)$. The random variable

$$\tau = \begin{cases} \inf\{t \geq 0: X_t < b(t)\} & \text{if there exists } t \text{ such that } X_t < b(t), \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is called the first hitting time for the process X_t . The problem

$$\begin{aligned} &\text{Given a process, } X_t, \text{ and the boundary, } b(t), \\ &\text{find the distribution } F_\tau(t) = \mathbf{P}(\tau \leq t). \end{aligned} \tag{1}$$

is the starting point of a very rich research area in the theory of stochastic processes. If X_t is a diffusion process, the problem of finding the distribution of τ is a classical one. The first papers on the problem were published by P. Lévy, A. Khinchin, and A. Kolmogorov in the 1920s. These results are discussed in the monograph²⁾ by Khinchin [17]. Khinchin

* Department of Statistics, University of Toronto, Toronto, ON, Canada; e-mail: sebastian.jaimungal@utoronto.ca

** IBM Canada Ltd.; Department of Computer Sci., University of Toronto, Toronto, ON, Canada; e-mail: alex.kreinin@ca.ibm.com

*** Department of Statistics, University of Toronto, Toronto, ON, Canada; e-mail: valov@utoronto.ca

¹⁾ This research was supported in part by the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) of Canada.

²⁾ Khinchin called (1) the second problem of diffusion.