Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Условная предельная теорема для максимума случайного блуждания в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 625–647

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:41:39

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука

Том 58

Выпуск 4, 2013 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2013 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

УСЛОВНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$, причем $p_0 + q_0 = 1$ и п.н. $p_0 > 0$, $q_0 > 0$. Рассматривается случайное блуждание в случайной среде (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$. Это означает, что при фиксированной случайной среде блуждающая частица совершает переход из состояния i либо в состояние $i + 1$ с вероятностью p_i , либо в состояние $i - 1$ с вероятностью q_i . Предполагается, что случайная величина $\ln(q_0/p_0)$ имеет нулевое математическое ожидание и конечную положительную дисперсию σ^2 . Пусть X_n — положение блуждающей частицы в момент времени n . Показано, что случайная величина $\sigma^2 \max_{0 \leq i \leq n} X_i / \ln^2 n$, рассматриваемая при условии, что $X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0$, сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к некоторой положительной случайной величине с известной функцией распределения.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание в случайной среде, ветвящийся процесс в случайной среде с иммиграцией, функциональные предельные теоремы.

1. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин (p_i, q_i) , $i \in \mathbf{Z}$, причем $p_0 + q_0 = 1$ и п.н. $p_0 > 0$, $q_0 > 0$. Совокупность $\{(p_i, q_i), i \in \mathbf{Z}\}$ называется *случайной средой*. Случайное блуждание в случайной среде (СБСС) задается в два этапа. Сначала разыгрывается случайная среда, а затем в соответствии с ней разыгрывается случайное блуждание на множестве целых чисел, при этом из состояния i блуждающая частица переходит в состояние $i + 1$ с вероятностью p_i , а в состояние $i - 1$ с вероятностью q_i .

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ-ННИО (грант №08-01-91-954) и программы «Динамические системы и теория управления» Президиума РАН.

Формализуем это определение. Как обычно, символы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ обозначают вероятность и математическое ожидание, а символы $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{E}}$ указывают еще и на то, что случайная среда фиксирована.

Последовательность целочисленных случайных величин $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *случайным блужданием в случайной среде* $\{(p_i, q_i), i \in \mathbf{Z}\}$, если $X_0 = 0$ и для произвольных $n \in \mathbf{N}_0, i \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = i) &= p_i, \\ \hat{\mathbf{P}}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = i) &= q_i.\end{aligned}$$

Предположим, что

$$\mathbf{E} \ln \frac{q_1}{p_1} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} \ln^2 \frac{q_1}{p_1} =: \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < \infty. \quad (2)$$

Известная *теорема Риттера* (см. [1]) утверждает, что если выполнены условия (1), (2) и п.н. $p_1 \in (\nu, 1 - \nu)$ при некотором постоянном $\nu \in (0, 0.5)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2 \max_{0 \leq i \leq n} X_i}{\ln^2 n} \xrightarrow{D} \beta,$$

где β — положительная случайная величина с преобразованием Лапласа

$$\mathbf{E} \exp(-\lambda\beta) = \frac{\tanh(\sqrt{2\lambda})}{\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

Целью настоящей работы является получение предельной теоремы при $n \rightarrow \infty$ для случайной величины $\max_{0 \leq i \leq n} X_i$, рассматриваемой при условии, что $X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0$ (т.е. получение условной версии теоремы Риттера).

Введем момент первого достижения уровня $n \in \mathbf{N}$ последовательностью $\{X_k, k \in \mathbf{N}_0\}$:

$$T_n = \min\{k: X_k = n\}.$$

Нетрудно показать, что при $n \in \mathbf{N}$

$$T_n = n + 2 \sum_{i=-\infty}^n \zeta_i^{(n)}, \quad (3)$$

где $\zeta_i^{(n)}$ — число переходов блуждающей частицы из состояния i в состояние $i - 1$ на временном промежутке $[0, T_n]$. Оказывается (см. [2]), что случайная последовательность $\{\zeta_n^{(n)}, \zeta_{n-1}^{(n)}, \zeta_{n-2}^{(n)}, \dots\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС) с единственным иммигрантом в каждом из поколений, начиная с нулевого и заканчивая $(n - 1)$ -м. При

этом $\zeta_{n-i}^{(n)}$ означает численность i -го поколения ВПСС без учета самих иммигрантов, в частности, $\zeta_n^{(n)} = 0$. Вероятность того, что (при фиксированной среде) представитель i -го поколения (или присоединившийся иммигрант) произведет k непосредственных потомков, равна $p_{n-i}q_{n-i}^k$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Предположим, что $\{Z_i^{(n)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ — ВПСС с единственным иммигрантом в каждом из поколений, начиная с нулевого и заканчивая $(n-1)$ -м, и с геометрическим распределением $\{p_{i+1}q_{i+1}^k, k \in \mathbf{N}_0\}$ числа непосредственных потомков представителя i -го поколения (или присоединившегося иммигранта), $i \in \mathbf{N}_0$. Этот процесс подробно рассматривался в работе [3]. В частности, для него получена функциональная предельная теорема. Ввиду соотношения (3) при $n \in \mathbf{N}$

$$T_n \stackrel{d}{=} n + 2 \sum_{i=0}^{+\infty} Z_i^{(n)}. \quad (4)$$

Чтобы получить условную версию теоремы Риттера, потребуется условная предельная теорема для процесса $\{Z_i^{(n)}, i \in \mathbf{N}_0\}$. Для ее формулировки необходимы некоторые обозначения и определения.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\varkappa_i = \ln \frac{q_i}{p_i}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Они формируют *сопровождающее случайное блуждание*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \varkappa_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ введем случайный процесс W_n :

$$W_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1].$$

При выполнении условий (1) и (2) справедлив условный принцип инвариантности Иглхарта (см. [4]): при $n \rightarrow \infty$

$$\{W_n \mid S_1 > 0, \dots, S_n > 0\} \xrightarrow{D} W^+, \quad (5)$$

где $W^+ = \{W^+(t), t \in [0, 1]\}$ — *броуновская извилина*, а символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода. Введем случайный процесс W^* : $W^*(t) = W^+(1-t) - W^+(1)$, $t \in [0, 1]$. Из соотношения (5), рассматривая вместо блуждания $\{S_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ блуждание $\tilde{S}_i = S_{n-i} - S_n$, $i = 0, 1, \dots, n$, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{W_n \mid S_n < S_0, \dots, S_n < S_{n-1}\} \xrightarrow{D} W^*. \quad (6)$$

Процесс W^* назовем *обращенной броуновской извилиной*. Можно показать, что стандартное броуновское движение $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$, рассматриваемое при условии, что $W(1) - \inf_{s \in [0, 1]} W(s) < \varepsilon$, где ε — положительное число, сходится по распределению в пространстве $C[0, 1]$ с топологией Скорохода к процессу W^* при $\varepsilon \rightarrow 0$ (другими словами, обращенная броуновская извилиная — это броуновское движение на отрезке $[0, 1]$, рассматриваемое при условии достижения минимума в последний момент).

Рассмотрим обращенную броуновскую извилину W^* и последовательность независимых случайных величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, распределенных по показательному закону с параметром 1. Предполагается, что процесс W^* и последовательность $\{\alpha_n, n \in \mathbf{N}\}$ независимы. Положим $L^*(t) = \inf_{s \in [0, t]} W^*(s)$, $t \in [0, 1]$, и назовем процесс $\{L^*(t), t \in [0, 1]\}$ (*нижним*) *уровнем обращенной броуновской извилины*.

Опишем распределение случайного процесса $Y^* = \{Y^*(t), t \in [0, 1]\}$, играющего важную роль в дальнейшем. Положим $Y^*(0) = Y^*(1) = 0$. Рассмотрим произвольное $m \in \mathbf{N}$ и произвольные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Случайный вектор $(Y^*(t_1), \dots, Y^*(t_m))$ совпадает по распределению со следующим случайным вектором $\hat{Y} := (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m)$. Первая координата $\hat{Y}_1$ равна α_1 , другие координаты $\hat{Y}_k$, $k \in \{2, \dots, m\}$, также являются членами последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Пусть известна координата $\hat{Y}_k$ при некотором $k < m$, например, $\hat{Y}_k = \alpha_i$ при некотором $i \in \mathbf{N}$. Если в момент t_{k+1} уровень обращенной броуновской извилины сохраняется, т.е. $L^*(t_{k+1}) = L^*(t_k)$, то $\hat{Y}_{k+1} = \hat{Y}_k$. Если же в момент t_{k+1} уровень обращенной броуновской извилины падает, т.е. $L^*(t_{k+1}) < L^*(t_k)$, то $\hat{Y}_{k+1} = \alpha_{i+1}$.

Положим при $n \in \mathbf{N}_0$

$$a_n = e^{-S_n}, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad (b_0 = 0).$$

Введем при $n \in \mathbf{N}$ случайный процесс Y_n : $Y_n(0) = 0$, а при $t \in (0, 1]$

$$Y_n(t) = \frac{a_{[nt]}}{b_{[nt]}} Z_{[nt]}^{(n)}.$$

Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость случайных процессов в смысле конечномерных распределений.

Теорема 1. *Если выполнены условия (1) и (2), то при $n \rightarrow \infty$*

$$\{Y_n \mid Y_n(1) = 0\} \Rightarrow Y^*.$$

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ введем случайный процесс U_n :

$$U_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln \left(Z_{[nt]}^{(n)} + 1 \right), \quad t \in [0, 1].$$

Пусть $W_0 = \{W_0(t), t \in [0, 1]\}$ — броуновский мост и, как и ранее, символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Теорема 2. Если выполнены условия (1) и (2), то при $n \rightarrow \infty$

$$\{U_n \mid U_n(1) = 0\} \xrightarrow{D} |W_0|.$$

Из теоремы 2 в качестве следствия получаем основной результат.

Теорема 3. Если выполнены условия (1) и (2), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2 \max_{0 \leq i \leq n} X_i}{\ln^2 n} \mid X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0 \right\} \xrightarrow{D} \eta,$$

где η является положительной случайной величиной, причем при $x > 0$

$$\mathbf{P}(\eta \leq x) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2(2k-1)^2}{x}\right),$$

а знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению случайных величин.

2. Доказательство теоремы 1. В работе [3] установлено, что при $m \in \mathbf{N}$, $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, $s_1, s_2, \dots, s_m \in [0, 1]$

$$\widehat{\mathbf{E}} \left(\begin{matrix} Z_{i_1}^{(n)} & Z_{i_2}^{(n)} & \dots & Z_{i_m}^{(n)} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{matrix} \right) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k)\delta_{k,m}}, \quad (7)$$

где при $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\beta_k = \frac{b_{i_{k-1}}}{b_{i_k}}, \quad \gamma_k = \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}}(1 - s_k),$$

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} \gamma_k + \frac{\beta_{k+1}\delta_{k+1,m}s_k}{1 + (1 - \beta_{k+1})\delta_{k+1,m}}, & k < m; \\ \gamma_m, & k = m. \end{cases}$$

Из соотношения (7) находим при $m \in \mathbf{N}$, $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m < i_{m+1} = n$, $s_1, s_2, \dots, s_m \in [0, 1]$, что

$$\widehat{\mathbf{E}} \left(\begin{matrix} Z_{i_1}^{(n)} & \dots & Z_{i_m}^{(n)} \\ s_1 & \dots & s_m \end{matrix} ; Z_n^{(n)} = 0 \right) = \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{1 + (1 - \beta_k)\delta_{k,m+1}} \Big|_{s_{m+1}=0}.$$

Заметим, что

$$\delta_{m+1,m+1} \Big|_{s_{m+1}=0} = \frac{b_n}{a_n},$$

$$\frac{1}{1 + (1 - \beta_{m+1})\delta_{m+1,m+1}} \Big|_{s_{m+1}=0} = \frac{1}{1 + (1 - b_{i_m}/b_n)(b_n/a_n)} = \frac{a_n}{b_{n+1} - b_{i_m}},$$

$$\delta_{m,m+1} \Big|_{s_{m+1}=0} = \gamma_m + \frac{b_{i_m}}{b_n} \frac{b_n}{a_n} s_m \frac{a_n}{b_{n+1} - b_{i_m}} = \gamma_m + \frac{b_{i_m} s_m}{b_{n+1} - b_{i_m}}.$$

Таким образом, при $0 < i_1 < \dots < i_m < n$, $s_1, \dots, s_m \in [0, 1]$

$$\hat{\mathbf{E}} \left(s_1^{Z_{i_1}^{(n)}} \dots s_m^{Z_{i_m}^{(n)}}; Z_n^{(n)} = 0 \right) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k) \rho_{k,m}} \frac{a_n}{b_{n+1} - b_{i_m}}, \quad (8)$$

где

$$\rho_{k,m} = \begin{cases} \gamma_k + \frac{\beta_{k+1} \rho_{k+1,m} s_k}{1 + (1 - \beta_{k+1}) \rho_{k+1,m}}, & k < m; \\ \gamma_m + \frac{b_{i_m} s_m}{b_{n+1} - b_{i_m}}, & k = m. \end{cases}$$

Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и моменты времени $t_1, \dots, t_m$ ($0 < t_1 < \dots < t_m < 1$). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — положительные числа. Из формулы (8) находим при $i_k = \lfloor nt_k \rfloor$, $s_k = s_k^{(n)} := \exp(-\lambda_k a_{\lfloor nt_k \rfloor} / b_{\lfloor nt_k \rfloor})$, $k \in \{1, \dots, m\}$, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right); Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \beta_k^{(n)}) \rho_{k,m}^{(n)}} \frac{a_n}{b_{n+1} - b_{\lfloor nt_m \rfloor}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где при $k = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(n)} &= \frac{b_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{b_{\lfloor nt_k \rfloor}}, \quad \gamma_k^{(n)} = \frac{b_{\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{\lfloor nt_k \rfloor}} \left(1 - \exp \left(- \lambda_k \frac{a_{\lfloor nt_k \rfloor}}{b_{\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \right), \\ \rho_{k,m}^{(n)} &= \begin{cases} \gamma_k^{(n)} + \frac{\beta_{k+1}^{(n)} \rho_{k+1,m}^{(n)} s_k^{(n)}}{1 + (1 - \beta_{k+1}^{(n)}) \rho_{k+1,m}^{(n)}}, & k < m; \\ \gamma_m^{(n)} + \frac{b_{\lfloor nt_m \rfloor} s_m^{(n)}}{b_{n+1} - b_{\lfloor nt_m \rfloor}}, & k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Переходя к случайному блужданию $\tilde{S}_i = S_{n-i} - S_n$, $i = 0, 1, \dots, n$, находим, что

$$a_{\lfloor nt_k \rfloor} = \frac{\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{a}_n}, \quad b_{\lfloor nt_k \rfloor} = \frac{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{a}_n},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \beta_k^{(n)} &= \frac{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}, \\ \gamma_k^{(n)} &= \frac{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \left(1 - \exp \left(- \lambda_k \frac{\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \right), \\ \frac{b_{\lfloor nt_m \rfloor}}{b_{n+1} - b_{\lfloor nt_m \rfloor}} &= \frac{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}}{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}}, \quad \frac{a_n}{b_{n+1} - b_{\lfloor nt_m \rfloor}} = \frac{1}{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}}, \\ s_k^{(n)} &= \exp \left(- \lambda_k \frac{\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \end{aligned}$$

$(\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}, \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}, \dots)$ означают то же для блуждания $\{\tilde{S}_i\}$, что $a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}, b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}, \dots$ означают для блуждания $\{S_i\}$. Поскольку блуждание $\{\tilde{S}_i\}$ также имеет нулевой снос и шаговую дисперсию σ^2 , то в дальнейшем при доказательстве теоремы 1 знак $\sim$ удобно опускать. Ввиду формулы (9)

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right); Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \hat{\beta}_k^{(n)}) \hat{\rho}_{k,m}^{(n)}} \frac{1}{b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где при $k = 1, \dots, m$

$$\hat{\beta}_k^{(n)} = \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}, \quad (11)$$

$$\hat{\gamma}_k^{(n)} = \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \left(1 - \exp \left(- \lambda_k \frac{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}}{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \right), \quad (12)$$

$$\hat{s}_k^{(n)} = \exp \left(- \lambda_k \frac{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}}{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}} \right), \quad (13)$$

$$\hat{\rho}_{k,m}^{(n)} = \begin{cases} \hat{\gamma}_k^{(n)} + \frac{\hat{\beta}_{k+1}^{(n)} \hat{\rho}_{k+1,m}^{(n)} \hat{s}_k^{(n)}}{1 + (1 - \hat{\beta}_{k+1}^{(n)}) \hat{\rho}_{k+1,m}^{(n)}}, & k < m; \\ \hat{\gamma}_m^{(n)} + \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}}{b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}} \hat{s}_m^{(n)}, & k = m. \end{cases} \quad (14)$$

Положим $L_n = \min_{0 \leq i \leq n} S_i$, $n \in \mathbf{N}_0$. Нам потребуется ряд результатов, касающихся случайного блуждания $\{S_n\}$, рассматриваемого при условии, что $L_n \geq -u$, где u — фиксированное положительное число.

Известно (см. [5, лемма 2.1]), что если выполнены условия (1) и (2), то: 1) существует такая положительная функция $A(u)$, $u > 0$, что для произвольного $u > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -u) \sim \frac{A(u)}{\sqrt{n}}, \quad (15)$$

причем функция $A(u)$ асимптотически линейна по u при $u \rightarrow \infty$; 2) существует такая положительная постоянная c , что для всех $n \in \mathbf{N}$ и $u > 0$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -u) \leq \frac{cA(u)}{\sqrt{n}}. \quad (16)$$

Покажем, что существует положительная функция $B(u)$, $u > 0$, такая, что для всех $n \in \mathbf{N}$ и $u > 0$

$$\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_{n+1}}; L_n < -u \right) \leq \frac{B(u)}{\sqrt{n}}, \quad (17)$$

причем

$$\lim_{u \rightarrow \infty} B(u) = 0. \quad (18)$$

Поскольку $b_{n+1} \geq \exp(-L_n)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{1}{b_{n+1}}; L_n < -u\right) &\leq \mathbf{E}(e^{L_n}; L_n < -u) \\ &\leq \sum_{l=\lfloor u \rfloor}^{+\infty} \mathbf{E}(e^{L_n}; -l-1 \leq L_n < -l) \leq \sum_{l=\lfloor u \rfloor}^{+\infty} e^{-l} \mathbf{P}(L_n \geq -l-1). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (16), находим, что

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{b_{n+1}}; L_n < -u\right) \leq c \sum_{l=\lfloor u \rfloor}^{+\infty} e^{-l} \frac{A(l+1)}{\sqrt{n}}.$$

Но это и означает справедливость соотношений (17) и (18).

Далее (см. [5, лемма 2.3]), если выполнены условия (1) и (2), то для произвольного $u > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\{W_n \mid L_n \geq -u\} \xrightarrow{D} W^+. \quad (19)$$

Поскольку $b_{n+1} - b_{\lfloor nt \rfloor} \geq \exp(-\min_{\lfloor nt \rfloor \leq i \leq n} S_i)$, то из (19) следует, что для произвольного $t \in (0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{n+1} - b_{\lfloor nt \rfloor}} \mid L_n \geq -u \right\} \xrightarrow{D} 0. \quad (20)$$

Известно также (см. [5, лемма 2.5]), что если выполнены условия (1) и (2), то для произвольных $u > 0$ и $t \in [0, 1)$

$$\{b_{n+1-\lfloor nt \rfloor} \mid L_n \geq -u\} \xrightarrow{D} \nu(u), \quad (21)$$

где $\nu(u)$ — некоторая случайная величина (одна и та же для всех $t \in [0, 1)$), причем $\nu(u) \geq 1$. Важно отметить, что соотношения (19) и (21) можно объединить в одно, при этом случайную величину $\nu(u)$ следует считать независимой от процесса W^+ .

Из формул (12), (13) на основании соотношения (20) находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\hat{\gamma}_k^{(n)} \mid L_n \geq -u\} \xrightarrow{D} \lambda_k, \quad (22)$$

$$\{\hat{s}_k^{(n)} \mid L_n \geq -u\} \xrightarrow{D} 1. \quad (23)$$

Положим при $n_1, n_2 \in \mathbf{N}_0$ ($n_1 < n_2$)

$$L_{n_1, n_2} = \min_{n_1 \leq i \leq n_2} S_i,$$

при $0 \leq u < v$

$$L^+(u, v) = \inf_{u \leq t \leq v} W^+(t).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $k_0 := 1 < k_1 < \dots < k_l < m + 1 := k_{l+1}$, где $l \in \{0, \dots, m-1\}$. Рассмотрим при $j \in \{0, \dots, l\}$ случайное событие $D_j^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$, состоящее в том, что $L_n \geq -u$ и при всех $k = k_j + 1, k_j + 2, \dots, k_{j+1} - 1$

$$L_{n - \lfloor nt_{k-1} \rfloor, n} + \varepsilon \sigma \sqrt{n} \leq L_{n - \lfloor nt_k \rfloor, n - \lfloor nt_{k-1} \rfloor},$$

а при $k = k_{j+1}$ (исключая $j = l$)

$$L_{n - \lfloor nt_{k-1} \rfloor, n} \geq L_{n - \lfloor nt_k \rfloor, n - \lfloor nt_{k-1} \rfloor} + \varepsilon \sigma \sqrt{n}.$$

Рассмотрим при $j \in \{0, \dots, l\}$ также случайное событие $D_j^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$, состоящее в том, что при всех $k = k_j + 1, k_j + 2, \dots, k_{j+1} - 1$

$$L^+(1 - t_{k-1}, 1) < L^+(1 - t_k, 1 - t_{k-1}),$$

а при $k = k_{j+1}$ (исключая $j = l$)

$$L^+(1 - t_{k-1}, 1) \geq L^+(1 - t_k, 1 - t_{k-1}).$$

Положим

$$D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) = \bigcap_{j=0}^l D_j^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}),$$

$$D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) = \bigcap_{j=0}^l D_j^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}).$$

Если событие $D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$ произошло и $k \in \{k_0, k_1, \dots, k_l\}$, то (см. (11))

$$\widehat{\beta}_k^{(n)} \leq \lfloor nt_{k-1} \rfloor \exp(L_{n - \lfloor nt_k \rfloor, n} - L_{n - \lfloor nt_{k-1} \rfloor, n}) \leq \lfloor nt_{k-1} \rfloor \exp(-\varepsilon \sigma \sqrt{n}),$$

поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \widehat{\beta}_k^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} 0; \quad (24)$$

а если $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0, k_1, \dots, k_l\}$, то

$$\left\{ \widehat{\beta}_k^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} 1. \quad (25)$$

Далее, если $k \in \{k_1, \dots, k_{l+1}\}$, то, применяя к формуле (14) соотношения (22)–(24), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \widehat{\rho}_{k-1, m}^{(n)} \mid D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \lambda_{k-1}; \quad (26)$$

а если $k \in \{2, \dots, m+1\} \setminus \{k_1, \dots, k_{l+1}\}$, то (вместо (24) применяем (25))

$$\left\{ \left(\widehat{\rho}_{k-1,m}^{(n)} - \widehat{\rho}_{k,m}^{(n)} \right) \mid D^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \lambda_{k-1}. \quad (27)$$

Положим

$$\xi_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + (1 - \widehat{\beta}_k^{(n)}) \widehat{\rho}_{k,m}^{(n)}}.$$

Запишем обобщение формулы (10) (также следующее из формулы (9)):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right) I \{ Z_n^{(n)} = 0 \} \mid L_n \geq -u \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\frac{\xi_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})}{b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}} \mid L_n \geq -u \right) \end{aligned} \quad (28)$$

($I\{A\}$ — индикатор случайного события A).

Из соотношений (24)–(27) находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \xi_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \mid D^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k}. \quad (29)$$

Поскольку $b_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то, ввиду соотношения (21), при $t \in [0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{b_{n+1-\lfloor nt \rfloor}} \mid L_n \geq -u \right\} \xrightarrow{D} \frac{1}{\nu(u)}. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) видно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})}{b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}} \mid D^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right\} \xrightarrow{D} \frac{1}{\nu(u)} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k}. \quad (31)$$

Обозначим $I_l(m)$ совокупность всех (упорядоченных по возрастанию) подмножеств мощности l множества $\{2, \dots, m\}$. В силу соотношения (19) при всех $l \in \{0, \dots, m-1\}$ и $(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(D^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \mid L_n \geq -u \right) = \mathbf{P}(D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})).$$

Очевидно, что разные события вида $D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$ попарно несовместны, поэтому предел (сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$) вероятности произведения двух разных событий вида $D^{(n,\varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})$ равен нулю. Кроме того,

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{l=0}^{m-1} \left(\bigcup_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right) \right) = 1,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\bigcup_{l=0}^{m-1} \left(\bigcup_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right) \middle| L_n \geq -u \right) = 1.$$

В силу сказанного и соотношений (28), (31)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right) I \{ Z_n^{(n)} = 0 \} \middle| L_n \geq -u \right) \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{\xi_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})}{b_{n+1-\lfloor nt_m \rfloor}} \middle| D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right) \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(D^{(n, \varepsilon)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \middle| L_n \geq -u \right) \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k} \mathbf{E} \left(\frac{1}{\nu(u)}; D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) \right). \quad (32) \end{aligned}$$

При $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0$ из формул (28) и (32) находим, что

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0, L_n \geq -u \right) = \mathbf{E} \left(\frac{1}{b_{n+1}}; L_n \geq -u \right) \quad (33)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \middle| L_n \geq -u \right) = \mathbf{E} \left(\frac{1}{\nu(u)} \right). \quad (34)$$

Аналогично соотношению (33) устанавливается, что

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0, L_n < -u \right) = \mathbf{E} \left(\frac{1}{b_{n+1}}; L_n < -u \right).$$

Следовательно (см. (17)),

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0, L_n < -u \right) \leq \frac{B(u)}{\sqrt{n}}. \quad (35)$$

Из соотношений (34) и (35), учитывая (15) и (18), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \right) \sim \frac{c_0}{\sqrt{n}}, \quad (36)$$

где

$$c_0 = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) \mathbf{E} \left(\frac{1}{\nu(u)} \right) \quad (37)$$

(в [6, доказательство леммы 4.2] показано, что $0 < c_0 < +\infty$).

Используя те же соображения, из соотношения (32) находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right); Z_n^{(n)} = 0 \right)$$

$$\sim \frac{c_0}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k} \mathbf{P}(D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})). \quad (38)$$

Из соотношений (36) и (38) следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right) \middle| Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{(k_1, \dots, k_l) \in I_l(m)} \prod_{j=0}^l \frac{1}{1 + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \lambda_k} \mathbf{P}(D^+(t_{k_1}, \dots, t_{k_l})). \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что правая часть (39) совпадает с преобразованием Лапласа случайного вектора $(Y^*(t_1), \dots, Y^*(t_m))$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_n(t_k) \right) \middle| Z_n^{(n)} = 0 \right) = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k Y^*(t_k) \right).$$

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ введем случайный процесс V_n : $V_n(0) = 0$, а при $t \in (0, 1]$

$$V_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln \frac{b_{\lfloor nt \rfloor}}{a_{\lfloor nt \rfloor}}.$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{V_n \mid Z_n^{(n)} = 0\} \Rightarrow |W_0|. \quad (40)$$

При доказательстве соотношения (40) потребуется представление процесса $|W_0|$ через броуновскую извилину. Рассмотрим случайный процесс V :

$$V(t) = W^+(1-t) - L^+(1-t, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Оказывается (см. [7, доказательство теоремы 3.1]), что

$$|W_0| \stackrel{d}{=} V. \quad (41)$$

Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и моменты времени $t_1, \dots, t_m$ ($0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — положительные числа. Ввиду (41), чтобы доказать соотношение (40), достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V_n(t_k) \right) \middle| Z_n^{(n)} = 0 \right] = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V(t_k) \right). \quad (42)$$

Из формулы (8) находим, что

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V_n(t_k) \right); Z_n^{(n)} = 0 \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V_n(t_k) \right) \frac{a_n}{b_{n+1}} \right].$$

Откуда, снова переходя к случайному блужданию $\tilde{S}_i = S_{n-i} - S_n$, $i = 0, 1, \dots, n$, получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V_n(t_k) \right); Z_n^{(n)} = 0 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\sigma \sqrt{n}} \ln \frac{\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{\tilde{a}_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \frac{1}{\tilde{b}_{n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Из соотношений (36) и (43) видно, что соотношение (42) справедливо, если (знак $\sim$ опускаем, как и прежде)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_0} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\sigma \sqrt{n}} \ln \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \frac{1}{b_{n+1}} \right] \\ &= \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V(t_k) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Ясно, что при $t \in (0, 1]$

$$S_{n-\lfloor nt \rfloor} - L_{n+1-\lfloor nt \rfloor, n} \leq \ln \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt \rfloor}}{a_{n-\lfloor nt \rfloor}} \leq S_{n-\lfloor nt \rfloor} - L_{n+1-\lfloor nt \rfloor, n} + \ln n.$$

Следовательно (см. (19)), при фиксированном $u > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\sigma \sqrt{n}} \ln \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \mid L_n \geq -u \right\} \xrightarrow{D} \sum_{k=1}^m \lambda_k V(t_k). \quad (45)$$

Кроме того, известно, что случайная последовательность $\{b_{n+1}\}$ и случайный процесс W_n , рассматриваемые при условии, что $L_n \geq -u$, асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$. Добавляя к сказанному соотношение (30), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\sigma \sqrt{n}} \ln \frac{b_{n+1} - b_{n+1-\lfloor nt_k \rfloor}}{a_{n-\lfloor nt_k \rfloor}} \right) \frac{1}{b_{n+1}} \mid L_n \geq -u \right] \\ &= \mathbf{E} \frac{1}{\nu(u)} \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k V(t_k) \right). \end{aligned}$$

Откуда, вспоминая (15), (17) и (18) и представление для постоянной c_0 (см. (37)), получаем требуемое соотношение (44). Следовательно, справедливы соотношения (42) и (40).

Из соотношения (40) следует, что при $t \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{\lfloor nt \rfloor}} \mid Z_n^{(n)} = 0 \right\} \xrightarrow{D} 0.$$

Из этого факта и теоремы 1 находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{\lfloor nt \rfloor}} (Z_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)} + 1), t \in (0, 1) \mid Z_n^{(n)} = 0 \right\} \Rightarrow \{Y^*(t), t \in (0, 1)\}. \quad (46)$$

Поскольку все сечения процесса в правой части (46) п.н. положительны, в качестве следствия получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{V_n - U_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right\} \Rightarrow 0. \quad (47)$$

Из соотношений (40) и (47) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{U_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right\} \Rightarrow |W_0|, \quad (48)$$

т.е. сходимость конечномерных распределений в теореме 2 установлена.

Введем для функции $x \in D[a, b]$, $0 \leq a < b < +\infty$, модуль непрерывности:

$$w_x(\delta; a, b) = \sup_{\substack{t, s: |t-s| \leq \delta, \\ t, s \in [a, b]}} |x(t) - x(s)|, \quad \delta > 0.$$

Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, 1) \geq \varepsilon \mid Z_n^{(n)} = 0\right) = 0. \quad (49)$$

Заметим, что для произвольного $a \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, 1) \geq \varepsilon \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \leq P_1(n, \delta, a) + P_2(n, \delta, a), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n, \delta, a) &= \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid Z_n^{(n)} = 0\right), \\ P_2(n, \delta, a) &= \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; a, 1) \geq \frac{\varepsilon}{2} \mid Z_n^{(n)} = 0\right). \end{aligned}$$

Сначала исследуем первое слагаемое в правой части (50). Для произвольного $u \in (0, +\infty)$

$$P_1(n, \delta, a) = P_{11}(n, \delta, a, u) + P_{12}(n, \delta, a, u), \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} P_{11}(n, \delta, a, u) &= \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, U_n(a) \leq u \mid Z_n^{(n)} = 0\right), \\ P_{12}(n, \delta, a, u) &= \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, U_n(a) > u \mid Z_n^{(n)} = 0\right). \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду соотношения (48) при $u \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(U_n(a) \leq u \mid Z_n^{(n)} = 0\right) = \mathbf{P}(|W_0(a)| \leq u) \in (0, 1). \quad (52)$$

Распределение случайной величины $|W_0(a)|$ является абсолютно непрерывным, поэтому

$$\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{P}(|W_0(a)| \leq u) = 0. \quad (53)$$

Поскольку при $u \in (0, +\infty)$

$$P_{11}(n, \delta, a, u) \leq \mathbf{P} \left(U_n(a) \leq u \mid Z_n^{(n)} = 0 \right),$$

то из соотношений (52) и (53) следует, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{11}(n, \delta, a, u) = 0. \quad (54)$$

Зафиксируем произвольное $u \in (0, +\infty)$. Если $U_n(a) > u$, то $Z_{[na]}^{(n)} \geq f_n(u)$, где $f_n(u) := \lfloor \exp(u\sigma\sqrt{n}) \rfloor$. Ввиду того, что процесс $\{Z_i^{(n)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ является марковской цепью, находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, U_n(a) > u, Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=f_n(u)}^{+\infty} \mathbf{P} \left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, Z_{[na]}^{(n)} = k, Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=f_n(u)}^{+\infty} \mathbf{P} \left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, Z_{[na]}^{(n)} = k \right) \mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \mid Z_{[na]}^{(n)} = k \right). \end{aligned}$$

Поскольку последняя вероятность не возрастает по k , в итоге получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}, U_n(a) > u, Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \mid Z_{[na]}^{(n)} = f_n(u) \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \mid Z_{[na]}^{(n)} = f_n(u) \right) > 0 \quad (56)$$

(действительно, неравенство (55) справедливо и при $\varepsilon = 0$, причем его левая часть положительна при всех достаточно больших n ввиду соотношений (36) и (52)). Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n^{(n)} = 0) & \geq \mathbf{P} \left(U_n(a) \leq u, Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{f_n(u)-1} \mathbf{P} \left(Z_{[na]}^{(n)} = k, Z_n^{(n)} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{f_n(u)-1} \mathbf{P} \left(Z_{[na]}^{(n)} = k \right) \mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \mid Z_{[na]}^{(n)} = k \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \right) \geq \mathbf{P}(U_n(a) \leq u) \mathbf{P} \left(Z_n^{(n)} = 0 \mid Z_{[na]}^{(n)} = f_n(u) \right), \quad (57)$$

причем обе вероятности в правой части положительны при всех достаточно больших n (см. (52) и (56)). Из соотношений (55) и (57) получаем, что при всех достаточно больших n

$$P_{12}(n, \delta, a, u) \leq \frac{\mathbf{P}(w_{U_n}(\delta; 0, a) \geq \varepsilon/2)}{\mathbf{P}(U_n(a) \leq u)}.$$

В [3, теорема 2] установлено, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(w_{U_n}(\delta; 0, 1) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

Откуда, учитывая соотношение (52), находим, что при любом $u \in (0, +\infty)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{12}(n, \delta, a, u) = 0. \quad (58)$$

Из соотношений (51), (54) и (58) следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_1(n, \delta, a) = 0. \quad (59)$$

Теперь исследуем второе слагаемое в правой части (50). Заметим, что

$$w_{U_n}(\delta; a, 1) \leq 2 \sup_{t \in [a, 1]} |U_n(t) - U_n(a)|. \quad (60)$$

Пусть $Z_{i,j}^{(m)}$ обозначает численность потомков в i -м поколении от иммигрантов, присоединившихся по одному к поколениям начиная с j -го и кончая $(j+m-1)$ -м ($i, j, m \in \mathbf{N}$, причем $i \geq j$, $j+m \leq n$). Очевидно, что при $t \in [a, 1]$

$$Z_{[nt]}^{(n)} = Z_{[nt]}^{(\lfloor na \rfloor)} + Z_{[nt], [na]}^{(\lfloor n \rfloor - \lfloor na \rfloor)}.$$

При этом случайный процесс $\{Z_{[nt]}^{(\lfloor na \rfloor)}, t \geq a\}$ является ВПСС (без иммигрантов), причем численность начального поколения равна $Z_{[na]}^{(n)}$. Положим при $t \in [a, 1]$

$$U_n^{(a)}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln \left(Z_{[nt]}^{(\lfloor na \rfloor)} + 1 \right).$$

В работе [3, соотношение (25)] показано, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a, 1]} |U_n(t) - U_n(a)| &\leq \sup_{t \in [a, 1]} \left| U_n^{(a)}(t) - U_n^{(a)}(a) \right| \\ &+ \sup_{t \in [a, 1]} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln \left(Z_{[nt], [na]}^{(n - \lfloor na \rfloor)} + 1 \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Положим $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/8$. Из соотношений (60) и (61) следует, что для произвольного $u \in (0, +\infty)$

$$P_2(n, \delta, a) \leq P_{21}(n, \delta, a, u) + P_{22}(n, \delta, a, u) + P_{23}(n, \delta, a), \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} P_{21}(n, \delta, a, u) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [a, 1]} |U_n^{(a)}(t) - U_n^{(a)}(a)| \geq \tilde{\varepsilon}, U_n(a) \leq u \mid Z_n^{(n)} = 0 \right), \\ P_{22}(n, \delta, a, u) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [a, 1]} |U_n^{(a)}(t) - U_n^{(a)}(a)| \geq \tilde{\varepsilon}, U_n(a) > u \mid Z_n^{(n)} = 0 \right), \\ P_{23}(n, \delta, a) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [a, 1]} \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln \left(Z_{[nt], [na]}^{(n - [na])} + 1 \right) \geq \tilde{\varepsilon} \mid Z_n^{(n)} = 0 \right). \end{aligned}$$

Аналогично соотношению (54) показывается, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{21}(n, \delta, a, u) = 0. \quad (63)$$

При исследовании второго слагаемого в правой части (62) зафиксируем $u \in (0, +\infty)$. Поскольку траектории броуновского моста непрерывны и $W_0(1) = 0$ п.н., то

$$\lim_{a \rightarrow 1} \mathbf{P}(|W_0(a)| > u) = 0$$

и, значит (см. (52)),

$$\lim_{a \rightarrow 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(U_n(a) > u \mid Z_n^{(n)} = 0 \right) = \lim_{a \rightarrow 1} \mathbf{P}(|W_0(a)| > u) = 0.$$

Поскольку $P_{22}(n, \delta, a, u) \leq \mathbf{P}(U_n(a) > u \mid Z_n^{(n)} = 0)$, в итоге получаем, что при любом $u \in (0, +\infty)$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{22}(n, \delta, a, u) = 0. \quad (64)$$

Покажем, что

$$\lim_{a \rightarrow 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{23}(n, \delta, a) = 0. \quad (65)$$

Заметим, что случайная последовательность $(a_0 Z_0^{(n)}, a_1 Z_1^{(n)}, \dots, a_n Z_n^{(n)})$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным субмартингалом. Действительно, при $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} Z_{i+1}^{(n)} \mid Z_i^{(n)} \right) &= \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} (Z_{i+1}^{(i)} + Z_{i+1, i}^{(1)}) \mid Z_i^{(n)} \right) \\ &\geq \widehat{\mathbf{E}} \left(a_{i+1} Z_{i+1}^{(i)} \mid Z_i^{(n)} \right) = a_{i+1} \exp(\kappa_{i+1}) Z_i^{(n)} = a_i Z_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Поэтому, ввиду неравенства Дуба, при $x \in (0, +\infty)$

$$\mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_n} Z_i^{(n)} \geq x \right) \leq x^{-1}$$

(здесь учтено, что $\widehat{\mathbf{E}} Z_n^{(n)} = b_n/a_n$). Применяя это неравенство к процессу $\{Z_{[nt], [na]}^{(n - [na])}, t \in [a, 1]\}$ и учитывая (36), находим, что при достаточно

больших n

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt],[na]}^{(n-[na])}}{b_n - b_{[na]}} \geq d_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \leq \frac{2\sqrt{n}}{c_0 d_n}, \quad (66)$$

где $d_n = \exp(\sigma\sqrt{n}\tilde{\varepsilon}/3)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a,1]} \frac{b_n - b_{[na]}}{a_{[nt]}} &\leq n \exp\left(\sup_{t \in [a,1]} (S_{[nt]} - L_{[na],n})\right) \\ &\leq n \exp\left(2\sigma\sqrt{n} \sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)|\right), \end{aligned}$$

то при достаточно больших n

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} \frac{b_n - b_{[na]}}{a_{[nt]}} \geq d_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\exp\left(2\sigma\sqrt{n} \sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)|\right) \geq n^{-1}d_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\exp\left(2\sigma\sqrt{n} \sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)|\right) \geq \sqrt{d_n} \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)| \geq \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \mid Z_n^{(n)} = 0\right). \end{aligned} \quad (67)$$

При достаточно больших n

$$\begin{aligned} P_{23}(n, \delta, a) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} Z_{[nt],[na]}^{(n-[na])} \geq \exp(\sigma\sqrt{n}\tilde{\varepsilon}) - 1 \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} \frac{a_{[nt]} Z_{[nt],[na]}^{(n-[na])}}{b_n - b_{[na]}} \geq d_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} \frac{b_n - b_{[na]}}{a_{[nt]}} \geq d_n \mid Z_n^{(n)} = 0\right). \end{aligned}$$

Применяя теперь соотношения (66) и (67), получаем, что при достаточно больших n

$$P_{23}(n, \delta, a) \leq \frac{2\sqrt{n}}{c_0 d_n} + \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)| \geq \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \mid Z_n^{(n)} = 0\right). \quad (68)$$

Для произвольной ограниченной и непрерывной числовой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left(f\left(\sup_{t \in [a,1]} |W_n(t) - W_n(1)|\right) \mid Z_n^{(n)} = 0\right) = \mathbf{E}f\left(\sup_{t \in [0,1-a]} |W^+(t)|\right). \quad (69)$$

Вывод соотношения (69) осуществляется так же, как и вывод соотношения (42). При этом роль ключевого соотношения (45) выполняет следующее утверждение (см. (19)): при фиксированном $u \in (0, +\infty)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \sup_{t \in [a, 1]} |W_n(1-t)| \mid L_n \geq -u \right\} \xrightarrow{D} \sup_{t \in [a, 1]} |W^+(1-t)| = \sup_{t \in [0, 1-a]} |W^+(t)|.$$

Из соотношений (68) и (69) находим, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_{23}(n, \delta, a) \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-a]} |W^+(t)| \geq \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \right). \quad (70)$$

Поскольку траектории броуновской извилины непрерывны и $W^+(0) = 0$ п.н., то

$$\lim_{a \rightarrow 1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-a]} |W^+(t)| \geq \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \right) = 0. \quad (71)$$

Из соотношений (70) и (71) получаем требуемое утверждение (65).

Из соотношений (62)–(65) вытекает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_2(n, \delta, a) = 0. \quad (72)$$

А из соотношений (50), (59) и (72) следует справедливость (49). В свою очередь, из соотношений (48) и (49) вытекает утверждение теоремы 2.

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$M_n = \sup_{i \in \mathbf{N}_0} Z_i^{(n)}, \quad \Sigma_n = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(n)}.$$

Следствие 1. Если выполнены условия (1) и (2), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(\Sigma_n + 1) \mid Z_n^{(n)} = 0 \right\} \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0, 1]} |W_0(t)|.$$

Доказательство. Заметим, что если $Z_n^{(n)} = 0$, то $M_n = \sup_{t \in [0, 1]} Z_{[nt]}^{(n)}$. Поэтому на основании теоремы 2 находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(M_n + 1) \mid Z_n^{(n)} = 0 \right\} \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0, 1]} |W_0(t)|.$$

Откуда, учитывая, что при $Z_n^{(n)} = 0$ выполняются неравенства

$$M_n \leq \Sigma_n \leq nM_n,$$

получаем требуемое утверждение.

4. Доказательство теоремы 3. Введем момент первого достижения полуоси $(-\infty, 0)$ последовательностью $\{X_n\}$:

$$T = \min\{n: X_n < 0\}.$$

Зафиксируем $x \in (0, +\infty)$ и положим $m = m_n(x) = \lfloor x(\ln^2 n)/\sigma^2 \rfloor + 1$, тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2 \max_{i \leq n} X_i}{\ln^2 n} > x; X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{i \leq n} X_i \geq m; X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0\right) = \mathbf{P}(T_m \leq n < T) \end{aligned} \quad (73)$$

и

$$\mathbf{P}(X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0) = \mathbf{P}(T > n). \quad (74)$$

Запишем представление

$$\mathbf{P}(T_m \leq n < T) = \mathbf{P}(T > n, T_m < T) - \mathbf{P}(n < T_m < T). \quad (75)$$

Сначала рассмотрим первую вероятность в правой части (75). Назовем *правосторонней экскурсией*, совершаемой из состояния 0, участок траектории СБСС на временном промежутке $[0, T)$. Событие $\{T_m < T\}$ означает, что величина отклонения правосторонней экскурсии СБСС от начального состояния больше или равна m . Событие $\{T > n\}$ означает, что продолжительность правосторонней экскурсии СБСС больше n .

Положим $\xi_0 = 0$. При $i \in \mathbf{N}$ обозначим ξ_i число скачков, которые делает блуждающая частица из состояния $i-1$ в состояние i за все время правосторонней экскурсии, совершаемой из состояния 0. Оказывается, что $\{\xi_i, i \in \mathbf{N}_0\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде с одним иммигрантом в нулевом поколении. Вероятность того, что (при фиксированной среде) численность потомства одной частицы i -го поколения равна k , совпадает с $p_i^k q_i$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Нетрудно понять, что

$$\{T_m < T\} = \{T_\xi \geq m\}, \quad (76)$$

$$\{T > n\} = \{2\Sigma_\xi > n\}, \quad (77)$$

где T_ξ — продолжительность жизни, а Σ_ξ — общее число частиц процесса $\{\xi_n\}$. Таким образом,

$$\{T > n, T_m < T\} = \{2\Sigma_\xi > n, T_\xi \geq m\}. \quad (78)$$

Известно (см. [5] и [8]), что если выполнены условия (1), (2), то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_\xi \geq n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (79)$$

$$\mathbf{P}(\Sigma_\xi \geq n) \sim \frac{c_2}{\ln n}, \quad (80)$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, причем $c_2 = c_1 \sigma \sqrt{\pi/2}$. Кроме того (см. [9, доказательство теоремы 3]), при фиксированном $u \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\ln \Sigma_\xi}{\sigma \sqrt{n}} > u \mid T_\xi \geq n \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2k^2 u^2). \quad (81)$$

Из соотношений (79) и (81) следует, что при $u \in (0, \infty)$ и $m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\ln \Sigma_\xi}{\sigma \sqrt{m}} > u, T_\xi \geq m \right) \sim \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2k^2 u^2) \right) \frac{c_1}{\sqrt{m}}.$$

Откуда, рассматривая $m = m_n(x)$, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(2\Sigma_\xi > n, T_\xi \geq m) &= \mathbf{P} \left(\frac{\ln \Sigma_\xi}{\sigma \sqrt{m}} > \frac{\ln(n/2)}{\sigma \sqrt{m}}, T_\xi \geq m \right) \\ &\sim \mathbf{P} \left(\frac{\ln \Sigma_\xi}{\sigma \sqrt{m}} > \frac{1}{\sqrt{x}}, T_\xi \geq m \right) \sim \left(\sqrt{\frac{\pi x}{2}} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{2k^2}{x} \right) \right) \frac{c_1}{\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Вспоминая (80), получаем, что при $m = m_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(2\Sigma_\xi > n, T_\xi \geq m)}{\mathbf{P}(2\Sigma_\xi > n)} = 1 - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{2k^2}{x} \right),$$

или (см. (77) и (78))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim \frac{\mathbf{P}(T > n, T_m < T)}{\mathbf{P}(T > n)} = 1 - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{2k^2}{x} \right). \quad (82)$$

При рассмотрении второй вероятности $\mathbf{P}(n < T_m < T)$ в правой части (75) вспомним формулу (3) и заметим, что $\{T_m < T\} = \{\zeta_0^{(m)} = 0\}$. Следовательно,

$$\{n < T_m < T\} = \left\{ n < m + 2 \sum_{i=-\infty}^m \zeta_i^{(m)}; \zeta_0^{(m)} = 0 \right\}$$

и, значит,

$$\mathbf{P}(n < T_m < T) = \mathbf{P} \left(\frac{n-m}{2} < \Sigma_m, Z_m^{(m)} = 0 \right), \quad (83)$$

где, напомним, $\Sigma_m = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(m)}$. В частности (см. также (76)),

$$\mathbf{P}(Z_m^{(m)} = 0) = \mathbf{P}(T_m < T) = \mathbf{P}(T_\xi \geq m)$$

и, следовательно (см. (36) и (79)), $c_0 = c_1$.

Учитывая последний факт, из следствия 1 и соотношения (36) видим, что при $u \in (0, \infty)$ и $m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\ln(\Sigma_m + 1)}{\sigma \sqrt{m}} > u, Z_m^{(m)} = 0 \right) \sim \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_0(t)| > u \right) \frac{c_1}{\sqrt{m}}.$$

Откуда, рассматривая $m = m_n(x)$, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{n-m}{2} < \Sigma_m, Z_m^{(m)} = 0\right) \\ & \sim \mathbf{P}\left(\frac{\ln(\Sigma_m + 1)}{\sigma\sqrt{m}} > \frac{\ln((n-m)/2 + 1)}{\sigma\sqrt{m}}, Z_m^{(m)} = 0\right) \\ & \sim \mathbf{P}\left(\frac{\ln(\Sigma_m + 1)}{\sigma\sqrt{m}} > \frac{1}{\sqrt{x}}, Z_m^{(m)} = 0\right) \sim \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_0(t)| > \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{c_1}{\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Вспоминая (80), получаем, что при $m = m_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}((n-m)/2 < \Sigma_m, Z_m^{(m)} = 0)}{\mathbf{P}(2\Sigma_\xi > n)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_0(t)| > \frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

или (см. (77) и (83))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(n < T_m < T)}{\mathbf{P}(T > n)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_0(t)| > \frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad (84)$$

Хорошо известно, что для любого $u \geq 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |W_0(t)| \leq u\right) = K(u), \quad (85)$$

где $K(u)$ — функция распределения Колмогорова, т.е.

$$K(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 u^2}, \quad u > 0.$$

Из соотношений (84), (85) находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_m < T \leq n)}{\mathbf{P}(T > n)} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2/x}. \quad (86)$$

Из соотношений (73)–(75) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2 \max_{0 \leq i \leq n} X_i}{\ln^2 n} > x \mid X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0\right) \\ & = \frac{\mathbf{P}(T > n, T_m < T) - \mathbf{P}(n < T_m < T)}{\mathbf{P}(T > n)}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношения (82) и (86), получаем утверждение доказываемой теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Из соотношения (84) нетрудно вывести, что если выполнены условия (1) и (2), то при $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\ln T_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \mid T_n < T\right) = K(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ritter G. A.* Random walk in a random environment, critical case. A thesis. Cornell: Cornell Univ., 1976, 73 p.
2. *Kesten H., Kozlov M. V., Spitzer F.* A limit law for random walk in a random environment. — *Compositio Math.*, 1975, v. 30, p. 145–168.
3. *Афанасьев В. И.* О времени достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, т. 57, в. 4, с. 625–648.
4. *Doney R. A.* Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1985, v. 70, p. 351–360.
5. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
6. *Geiger J., Kersting G.* The survival probability of a critical branching process in a random environment. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
7. *Bertoin J., Pitman J.* Path transformations connecting Brownian bridge, excursion and meander. — *Bull. Sci. Math.*, 1994, v. 118, № 2, p. 147–166.
8. *Афанасьев В. И.* О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. — *Дискрет. матем.*, 1999, т. 11, № 2, с. 86–102.
9. *Афанасьев В. И.* О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. — *Дискрет. матем.*, 1999, т. 11, № 4, с. 33–47.

Поступила в редакцию
3.XII.2012