Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Кремена, В. И. Питербарг, Ю. Хюслер, О форме траекторий гауссовских процессов, имеющих массивные высокие выбросы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 672–694

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:26:01

© 2013 г.

КРЕМЕНА Е. В.^{*}, ПИТЕРБАРГ В. И.^{*},
ХЮСЛЕР Ю.^{**}О ФОРМЕ ТРАЕКТОРИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ,
ИМЕЮЩИХ МАССИВНЫЕ ВЫСОКИЕ ВЫБРОСЫ¹⁾

Изучены формы траекторий гауссовского гладкого стационарного процесса, которые выходят за высокий уровень либо в одной точке, либо в двух различных точках, расстояние между которыми превосходит заданное число. Оказалось, что такие траектории с достаточно высокой точностью следуют их ожидаемым значениям.

Ключевые слова и фразы: гауссовский процесс, траектория, асимптотика вероятности высокого выброса, асимптотика вероятности массивного выброса.

1. Введение и основные результаты. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский дифференцируемый в среднем квадратическом стационарный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. В настоящей статье изучается поведение траекторий этого процесса, достигших высокого уровня в одной или двух отстоящих друг от друга точках. Поведение траекторий гладкого гауссовского процесса, достигших высокого уровня, исследовалось достаточно подробно в контексте так называемой модели Слепяна (см., например, [6]). Обозначим $\lambda_2 = \mathbf{E} X'(t)^2$. Тогда множество всех траекторий, имеющих пересечение уровня u снизу вверх, распределено в эргодическом смысле как $ur(t) - \zeta r'(t)/\lambda_2 + \kappa(t)$, где ζ — рэлеевская случайная величина, $\kappa(t)$ — не зависящий от нее гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$r(s-t) - r(s)r(t) - \frac{r'(s)r'(t)}{\lambda_2}$$

(см. [6]). Заметим, что эта ковариационная функция является ковариационной функцией исходного процесса $X(t)$ при условии заданных в

^{*}Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: janesbond088@yahoo.com; piter@mech.math.msu.su

^{**}University of Bern, Sidlerstrasse 5, CH-3012, Bern, Switzerland.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00050).

нуле его значения и значения его первой производной. В статье [7] рассмотрена похожая задача для траекторий, имеющих высокий локальный максимум. И в этом случае соответствующий условный процесс осциллирует вокруг некоторой большой (также порядка u) детерминированной функции. Далее, форма выбросов гауссовского процесса за высокий уровень изучена в [2], [11], [10]. В [9] для недифференцируемых гауссовских процессов рассмотрено предельное поведение условных конечномерных распределений выбросов за высокий уровень при условии, что они произошли. В настоящей работе нас интересует как предельная форма траекторий процесса при условии, что $X(t)$ превышает высокий уровень u в некоторой точке на отрезке $[0, T]$, так и форма траекторий при условии, что $X(t)$ имеет более массивный выброс, то есть, превышает значение u в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии не менее заданного положительного числа. В то время как асимптотика вероятности первого условия (превышение траекторией уровня u) хорошо известна (см., например, [5]), асимптотика вероятности второго условия известна только для недифференцируемых гауссовских стационарных процессов, удовлетворяющих условию Пикандса

$$1 - r(t) \sim C|t|^\alpha, \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2) \quad (1)$$

(см. [14]).

Мы рассматриваем два типа выбросов траекторий процесса за высокий уровень на фиксированном временном отрезке $[0, T]$: простые выбросы, т.е. события вида

$$\bigcup_{t \in [0, T]} \{X(t) > u\}, \quad (2)$$

и двойные, или массивные, выбросы, содержащие две точки, разделенные фиксированным временным интервалом, т.е.

$$\bigcup_{s, t \in [0, T], t-s \geq \varepsilon} \{X(s) > u, X(t) > u\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

и изучаем предельное поведение траекторий процесса $X(t) = X(t, \omega)$ для ω , принадлежащих одному из этих двух событий и при неограниченно возрастающем u .

В то время как рассмотрения траекторий с простыми высокими выбросами применяемыми нами методами принципиально мало отличаются для негладкого $\alpha < 2$ и гладкого $\alpha = 2$ случаев, рассмотрение траекторий с двойными выбросами, как отмечено в [14], требует принципиально иного подхода. Поэтому двойные (массивные) выбросы рассмотрены здесь более детально.

1.1. Простые выбросы. Предположим, что выполнено следующее условие.

A1. $r(t)$ дважды дифференцируема, $r(0) = -r''(0) = 1$ и $r(t) < 1$ для любых $t \in (0, T]$.

В [4] показано, что если это выполнено и выполнено условие Пикандса (1), то для любых $T, S, \delta > 0$, $d \in (0, 1)$ имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{P}\left(\exists t \in [0, T]: X(t) > u, |X(t+s) - ur(s)| \leq u^d \sqrt{1 - r^2(s)}, \right. \\ \left. \forall s: |s| \in [\delta, S]\right) \sim \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, T]} X(t) > u\right), \quad (4)$$

при $u \rightarrow \infty$, т.е. при условии, что произошел выброс за высокий уровень, траектории процесса с подавляющей вероятностью остаются в относительно узкой (по сравнению с u) полосе произвольно длительное время. Здесь и далее отношение эквивалентности $\sim$ означает, что отношение сравниваемых величин стремится к единице. Этот результат уточняется в первой части настоящей работы для случая гладких процессов ($\alpha = 2$ в условии Пикандса). Пусть $g(t)$ — положительная функция, обладающая свойством

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0(\omega) > 0, \frac{|X(t)|}{g(t)\sqrt{1 - r^2(t)}} \leq 1 \quad \forall t \in (0, t_0(\omega)) \mid X(0) = 0\right) = 1. \quad (5)$$

То есть, функция $g(t)\sqrt{1 - r^2(t)}$ — локальная верхняя функция для траекторий условного процесса $X(t)$ при условии $X(0) = 0$ (см. [8]). Необходимые и достаточные условия для функции, $g(t)$, чтобы $\sqrt{1 - r^2(t)}g(t)$ была локальной верхней функцией можно извлечь из результатов [3] для верхней функции при $t \rightarrow \infty$ заменой $t \rightarrow 1/t$. Например, можно взять $g(t) = C\sqrt{|\ln|\ln t||}$ с достаточно большим C . Пусть $\{T_s, s \in \mathbf{R}\}$ обозначает группу операторов сдвига вдоль траекторий $X(t)$. Рассмотрим случайные процессы

$$Y_u(t) = \frac{X(t) - ur(t)}{\sqrt{1 - r^2(t)}}$$

и введем события

$$B_{g,S}(u) := \left\{ |Y_u(t)| \leq g(t) \quad \forall t: |t| \in (0, S] \right\}, \\ A_{g,T,S}(u) := \bigcup_{t \in [0, T]} \{X(t) > u, T_t B_{g,S}(u)\}.$$

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — гауссовский стационарный процесс, для которого выполнено условие **A1**. Пусть функция g удовлетворяет условию (5). Тогда для любых $T, S > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(A_{g,T,S}(u)) \sim \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \mathbf{P}\left(|Y(s)| \leq g(s), |s| \in (0, S]\right) \quad (6)$$

при $u \rightarrow \infty$, где $Y(s)$ — гауссовский процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией

$$\text{cov}((Y(s), Y(t))) = \frac{r(t-s) - r(s)r(t)}{\sqrt{1-r^2(t)}\sqrt{1-r^2(s)}}. \quad (7)$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left(\max_{[0,T]} X(t) > u\right) \sim \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

(см. [13]), то утверждение теоремы можно переписать следующим образом:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(A_{g,T,S}(u) \mid \max_{[0,T]} X(t) > u\right) = \mathbf{P}\left(|Y(s)| \leq g(s), |s| \in (0, S]\right). \quad (8)$$

Заметим, что случайный гауссовский процесс $\sqrt{1-r^2(t)}Y(t)$ распределен как $X(t)$ при условии $X(0) = 0$. Заметим также, что можно легко перейти к произвольным значениям $r(0)$ и $r''(0)$ масштабированием пространственной и временной переменных.

В качестве примера рассмотрим простейшую локальную верхнюю функцию с $g(s) = g_\delta(s) = \infty$ при $s \in (0, \delta]$, $\delta > 0$ и $g_\delta(s) = G > 0$ при $s \in (\delta, S]$. Интересно взять G большим, а δ малым, т.е. мы строим асимптотическую доверительную полосу для траекторий с высокими выбросами. Приведем соответствующее утверждение, обобщающее (4).

Теорема 2. Для любой положительной убывающей функции $\delta = \delta(G) \searrow 0$ при $G \nearrow \infty$,

$$\lim_{G \rightarrow \infty} \frac{\lim_{u \rightarrow \infty} e^{u^2/2} \mathbf{P}(\cup_{t \in [0,T]} \{X(t) > u, T_t B_{u,\delta,g_\delta}\})}{e^{-G^2/2} \int_\delta^S C(t)^{-1} dt} = \frac{T}{\pi^2},$$

если только знаменатель стремится к нулю, где $C(t) = \sqrt{(1-r^2(t))/2}$.

Теорема 1 позволяет оценить снизу вероятность существования высокого выброса с длинной основания не меньшей чем ε , для этого надо рассмотреть более высокий уровень cu , $c > 1$. Он должен быть столь большим, чтобы расстояние между решениями уравнения $cur(t) = u$ было больше, чем ε , например, можно взять $c > 1/r(\varepsilon/2)$. Мы предполагаем для простоты, что $r(t) > r(\varepsilon/2)$ для всех $t < \varepsilon/2$ и $r(t) < r(\varepsilon/2)$ для всех $t > \varepsilon/2$. В силу теоремы 1, для достаточно больших u

$$\mathbf{P}(\exists t \in [0, T]: X(t+s) > u \ \forall s \in [0, \varepsilon]) \geq \mathbf{P}\left(\max_{[0,T]} X(t) \geq \frac{u}{r(\varepsilon/2)}\right). \quad (9)$$

Из результатов, приведенных ниже, следует более точная оценка снизу, которая при определенных условиях является асимптотически точной. Мы увидим, что типичной формой таких массивных выбросов является $u(r(t) + r(\varepsilon - t))/(1 + r(\varepsilon))$, а не $ur(t)/r(\varepsilon/2)$, т.е. вышеприведенное неравенство является, действительно, лишь оценкой снизу.

1.2. Массивные выбросы. В работе [14] рассмотрено поведение вероятностей выбросов за высокий уровень u , содержащих две точки, разделенные положительным фиксированным ε , для траекторий гауссовского стационарного процесса, удовлетворяющего условию Пикандса (1). В этой статье также показано, что форма таких выбросов в определенной степени детерминирована. Там же замечено, что доказательства в случае гладких процессов, $\alpha = 2$, требуют принципиально иных рассуждений. Настоящая работа выполняет эту программу. Мы рассматриваем поведение траекторий гауссовского стационарного процесса с дифференцируемыми в среднем квадратическом траекториями, для которых выполнено событие (3). Понятно, что вероятность появления таких траекторий много меньше вероятности превышения уровня u , т.е. вероятности события (2). Поведение вероятностей любых событий, связанных с такими выбросами, зависит от максимального значения функции $r(t)$ на интервале $t \in [\varepsilon, T]$. Мы ограничимся наиболее естественным случаем, когда максимум достигается в точке ε . В силу того, что $r(t) < 1$ при $t > 0$, это выполнено всегда для достаточно малых ε . Или, например, естественно предположить в силу гладкости, что для малых T функция $r(t)$ убывает на $[0, T]$, поэтому для любого $0 < \varepsilon < T$ выполнено неравенство $r(\varepsilon) > r(T)$. Как и в [14], рассмотрение случая, когда максимум достигается внутри интервала $[\varepsilon, T]$, также возможно предлагаемыми здесь методами, однако это сильно удлинит текст статьи. Уточним это условие. Введем множество точек

$$\mathcal{E}(T) := \{\varepsilon \in (0, T) : r'(\varepsilon) < 0, r(\varepsilon) > r(t), t \in (\varepsilon, T]\}.$$

и предположим, что выполнено следующее условие.

A2. $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$.

Мы покажем, что поведение массивного выброса повторяет поведение условного математического ожидания $m_2(t) = \mathbf{E}(X(t) \mid X(0) = X(\varepsilon) = 1)$, относительно слабо осциллируя вокруг него. Нам понадобится выражение для условной дисперсии $d_2^2(t) = \mathbf{D}(X(t) \mid X(0), X(\varepsilon))$. Имеем,

$$m_2(t) = \frac{r(t) + r(\varepsilon - t)}{1 + r(\varepsilon)},$$

$$d_2^2(t) = \frac{1 + 2r(\varepsilon)r(t)r(\varepsilon - t) - r^2(\varepsilon) - r^2(t) - r^2(\varepsilon - t)}{1 - r^2(\varepsilon)}.$$

Обозначим

$$Z_u(t) = \frac{X(t) - um_2(t)}{d_2(t)}$$

и введем события

$$B_{g_2, S_1, S_2}(u) := \{|Z_u(t)| \leq g_2(t), \forall t \in [-S_1, S_2]\},$$

и

$$A_{g_2, T, S_1, S_2}(u) := \{\exists s, t \in [0, T]: t-s \geq \varepsilon, X(s) > u, X(t) > u, T_s B_{g_2, S_1, S_2}(u)\},$$

где $S_1 > 0$, $S_2 > \varepsilon$ и $g_2(t)$ — положительная функция такая, что

$$\mathbf{P}(\exists t(\omega) > 0: |X(t)| \leq g_2(t)d_2(t), \\ \forall t \in (-t(\omega), t(\omega)) \cap (\varepsilon - t(\omega), \varepsilon + t(\omega)) \mid X(0) = X(\varepsilon) = 0) = 1, \quad (10)$$

т.е. $g_2(t)d_2(t)$ — верхняя локальная функция в точках 0 и ε для траекторий условного процесса $X(t)$ при условии $X(0) = X(\varepsilon) = 0$. Введем функцию

$$\Psi_2(u, r) = \frac{(1+r)^{3/2}}{2\pi u^2 \sqrt{1-r}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right).$$

Она появится в выражениях для асимптотик вероятностей массивных выбросов. Нетрудно показать, что если $r(t) < 1$, то

$$\mathbf{P}(X(0) > u, X(t) > u) \sim \Psi_2(u, r(t)) \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Пусть $Z(t)$ — гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t) \mid X(0), X(\varepsilon)). \quad (11)$$

Заметим, что распределение процесса $Z(t)$ совпадает с условным распределением процесса $d_2(t)Z_0(t) = X(t)$ при условии $X(0) = X(\varepsilon) = 0$.

Исследование вероятности

$$P(u; \varepsilon, T) := \mathbf{P}(\exists s, t \in [0, T]: t \geq s + \varepsilon, X(s) \geq u, X(t) \geq u)$$

играет ключевую роль.

Теорема 3. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и п.н. непрерывными траекториями. Пусть ковариационная функция $r(t)$ этого процесса удовлетворяет условиям **A1** и **A2**. Тогда для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}(T)$

$$\mathbf{P}(A_{g_2, T, S_1, S_2}(u)) \sim P(u; \varepsilon, T) \mathbf{P}(\forall s \in [-S_1, S_2]: |Z(s)| \leq g_2(s)),$$

в свою очередь,

$$P(u; \varepsilon, T) \sim \frac{(T-\varepsilon)|r'(\varepsilon)|}{(1+r(\varepsilon))^2} u^2 \Psi_2(u, r(\varepsilon))$$

при $u \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Из доказательства теоремы следует, что

$$P(u; \varepsilon, T) \sim \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, T-\varepsilon]} (X(t) \wedge X(t+\varepsilon)) > u\right)$$

при $u \rightarrow \infty$, где $a \wedge b = \min(a, b)$.

Если функция $m_2(t)$ больше единицы на интервале $(0, \varepsilon)$, то из утверждения теоремы следует, что траектории, превысившие уровень u в двух точках с расстоянием не менее ε , будут в основной своей массе находиться над этим уровнем и между этими точками, в то время как перед первой точкой и за второй траектории опустятся под уровень u . Это замечание можно формализовать аналогично утверждению теоремы 2 с использованием теоремы 4.

2. Доказательство теорем 1 и 2. При условии $X(0) = u$, среднее и дисперсия случайного условного процесса Y_u равны соответственно нулю и единице. Следующая лемма говорит о его условной ковариационной функции.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\left((Y_u(t) - Y_u(s)) \mid X(0)\right) &= \frac{2(1 - r(t-s))}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} \\ &\quad - 2 \frac{1 - r(t)r(s) - \sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\leq \frac{2(1 - r(t-s))}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}}. \quad (13)$$

Доказательство. Имея в виду, что $\mathbf{D}X(0) = 1$, и пользуясь формулами для условных гауссовских распределений, получаем, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}(Y_u(t) - Y_u(s) \mid X(0)) \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{X(t)}{\sqrt{1 - r^2(t)}} - \frac{X(s)}{\sqrt{1 - r^2(s)}}\right)^2 - \left(\frac{r(t)}{\sqrt{1 - r^2(t)}} - \frac{r(s)}{\sqrt{1 - r^2(s)}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{1 - r^2(t)} + \frac{1}{1 - r^2(s)} - \frac{2r(t-s)}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} - \frac{r^2(t)}{1 - r^2(t)} \\ &\quad - \frac{r^2(s)}{1 - r^2(s)} + \frac{2r(s)r(t)}{\sqrt{1 - r^2(s)}\sqrt{1 - r^2(t)}} \\ &= 2 - \frac{2r(t-s)}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} + \frac{2r(s)r(t)}{\sqrt{1 - r^2(s)}\sqrt{1 - r^2(t)}} \\ &= \frac{2(1 - r(t-s))}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} + 2 - \frac{2}{\sqrt{1 - r^2(t)}\sqrt{1 - r^2(s)}} \\ &\quad + \frac{2r(s)r(t)}{\sqrt{1 - r^2(s)}\sqrt{1 - r^2(t)}}, \end{aligned}$$

откуда следует первое утверждение. Второе утверждение следует из очевидного (после возведения в квадрат) неравенства

$$1 - r(s)r(t) \geq \sqrt{1 - r^2(t)} \sqrt{1 - r^2(s)}.$$

Заметим также, что из (12) легко извлечь выражение для условной ковариационной функции, которое совпадает с ковариационной функцией процесса $Y(t)$, анонсированной в формулировке теоремы. Лемма доказана.

Для вычисления асимптотики вероятности события $A_{g,T,S}(u)$ мы применим метод двойных сумм, описанный в [12] и [13]. В соответствии с этим методом рассмотрим сначала вероятность события $A_{g,u^{-1}\Lambda,S}(u)$ (имея в виду, что α из условия Пикандса в рассматриваемом случае равно 2). Подобно доказательству леммы 6.1 из [13], произведем замену времени $t \mapsto u^{-1}t$ и обозначим $\chi_u(t) = u(X(u^{-1}t) - u) + v$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{g,u^{-1}\Lambda,S}(u)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v-v^2/(2u^2)} \\ &\quad \times \mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0, \Lambda u^{-1}]} \{X(t) > u, T_t B_{g,S}(u)\} \mid X(0) = u - \frac{v}{u}\right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v-v^2/(2u^2)} \\ &\quad \times \mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0, \Lambda]} \{\chi_u(t) > v, T_{u^{-1}t} B_{g,S}(u)\} \mid \chi_u(0) = 0\right) dv. \end{aligned}$$

Предел вероятности под интегралом существует и вычисляется очень похоже тому, как это делается в [13]. Сначала вычисляем пределы среднего и ковариации гауссовского векторного процесса $(\chi_u(t), Y_u(t))$, $t \in [0, \Lambda]$, при условии $\chi_u(0) = 0$, т.е. $X(0) = u - v/u$. Имеем

$$\mathbf{E}(\chi_u(t) \mid \chi_u(0) = 0) = -u^2(1 - r(u^{-1}t)) + v(1 - r(u^{-1}t)), \quad (14)$$

$$\mathbf{D}(\chi_u(t) - \chi_u(s) \mid \chi_u(0) = 0) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= 2u^2(1 - r^2(u^{-1}(t-s)) - u^2(r(u^{-1}t) - r(u^{-1}s))^2 \\ &\leq 2.1|t-s|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

для всех достаточно больших u . Далее,

$$\mathbf{E}(Y_u(s) \mid \chi_u(0) = 0) = -\frac{vr(s)}{u\sqrt{1 - r^2(s)}}, \quad (17)$$

т.е. условные среднее, дисперсия и ковариационная функция процесса $Y_u(t)$ совпадают с соответствующими характеристиками процесса $Y(t)$ из формулировки теоремы 1. Теперь вычислим условную взаимную ковариационную функцию между процессами $\chi_u(t)$ и $T_{t/u}Y_u(s) = Y_u(s+t/u)$

и ее предел при $u \rightarrow \infty$. Это удобно делать, вычисляя условную дисперсию их суммы:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{D}(\chi_u(t) + Y_u(s + u^{-1}t) \mid \chi_u(0) = 0) \\
 &= \mathbf{D}\left(uX(u^{-1}t) + \frac{X(s + u^{-1}t)}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}} \mid X(0)\right) \\
 &= \mathbf{D}\left(uX(u^{-1}t) + \frac{X(s + u^{-1}t)}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}}\right) \\
 &\quad - \left(\text{cov}\left(uX(u^{-1}t) + \frac{X(s + u^{-1}t)}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}}, X(0)\right)\right)^2 \\
 &= u^2 + \frac{1}{1 - r^2(s + u^{-1}t)} + \frac{2ur(s)}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}} \\
 &\quad - u^2r^2(u^{-1}t) - \frac{r^2(s + u^{-1}t)}{1 - r^2(s + u^{-1}t)} - \frac{2ur(u^{-1}t)r(s + u^{-1}t)}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}} \\
 &= u^2(1 - r^2(u^{-1}t)) + 1 + \frac{2u(r(s) - r(u^{-1}t)r(s + u^{-1}t))}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, условная взаимная ковариационная функция равна

$$\frac{u[r(s) - r(s + u^{-1}t)] + ur(s + u^{-1}t)(1 - r(u^{-1}t))}{\sqrt{1 - r^2(s + u^{-1}t)}} = -\frac{tr'(s)}{1 - r^2(s)} + O(u^{-1}). \quad (18)$$

Из (13) и (16) следует слабая сходимость при $u \rightarrow \infty$ условного распределения векторного процесса

$$\{\chi_u(t), t \in [0, \Lambda], Y_u(s), |s| \in [\delta, S]\}_{u \geq 1},$$

при условии $X(0) = u - v/u$ для любого положительного δ . Действительно, условное математическое ожидание процессов $\chi_u(t)$ и $Y_u(s)$ сходятся к $-|t|^2$ и 0, соответственно, см. (14) и (17). Условная дисперсия приращений процесса $\chi_u(t)$ сходится к $2(t-s)^2$, а условная ковариационная функция процесса $Y_u(s)$ не зависит от u и v , они равны соответствующим характеристикам процесса $Y(t)$. Наконец, для условной взаимной ковариационной функции выполнено (18). Итак, имеет место слабая сходимость условных распределений пары (χ_u, Y_u) к паре $(\sqrt{2}\xi t - t^2, Y(t))$, где ξ — гауссовская стандартная величина, коррелированная с $Y(t)$ вышеуказанным способом. Поэтому для любого $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0, \Lambda]} \left\{\chi_u(t) > v, \forall s, |s| \in (\delta, S]: \right. \right. \\
 \left. \left. |T_{t/u}Y_u(s)| \leq T_{t/u}g(s)\right\} \mid X(0) = u - \frac{v}{u}\right)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, \Lambda]} \sqrt{2}\xi t - t^2 > v, \forall s, |s| \in (\delta, S]: |Y(s)| \leq g(t+s)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, \Lambda]} \sqrt{2}\xi t - t^2 > v\right) \mathbf{P}\left(\forall s, |s| \in (\delta, S]: |Y(s)| \leq g(s)\right) \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$ ($T_{t/u}$ — оператор сдвига!). Поскольку $g(t)$ является локальной верхней функцией как для $Y(s)$, так и для условного процесса $Y_u(s)$ при условии $X(0) = u$, в этом соотношении можно положить $\delta = 0$. Действительно, рассмотрим вероятность

$$P_{a,b} := \mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0, \Lambda u^{-1}]} \left\{X(t) > u, \exists s, |s| \in (a, b]: \left|T_t Y_u(s)\right| > T_t g(s)\right\} \middle| X(0) = u - v/u\right),$$

$0 < a < b \leq S$. Имеем

$$P_{\delta,S} \leq P_{0,S} \leq P_{0,\delta} + P_{\delta,S}$$

и

$$P_{\delta,S} \rightarrow \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, \Lambda]} \sqrt{2}\xi t - t^2 > v, \exists s, |s| \in (\delta, S]: |Y(s)| > g(s)\right)$$

при $u \rightarrow \infty$. Поскольку $g(t)$ — верхняя функция, то $P_{0,\delta} \rightarrow 0$ и $\mathbf{P}(\exists s, |s| \in (0, \delta]: |Y(s)| > g(s)) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Применим теперь лемму 6.1 из [13], замечая, что приведенные там вероятности под интегралом мажорируют наши (надо просто опустить все события, относящиеся к Y_u). Поступив таким образом, получаем мажорированную сходимост, что дает следующий результат.

Лемма 2. Пусть для ковариационной функции централизованного стационарного гауссовского процесса $X(t)$ выполнено условие **A1**. Пусть для функции $g(t)$ выполнено (5). Тогда для любого положительного S выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0, \Lambda u^{-1}]} \{X(t) > u, T_t B_{u,S,g}\}\right) \\ &\sim H_2(\Lambda) \Psi(u) \mathbf{P}(\forall s, |s| \in (0, S]: |Y(s)| \leq g(s)), \end{aligned}$$

где $Y(s)$ — централизованный гауссовский процесс с единичной дисперсией и дисперсией приращений (12);

$$H_2(\Lambda) = \mathbf{E} \exp\left(\max_{[0, \Lambda]} (\sqrt{2}\xi t - t^2)\right),$$

ξ — гауссовская стандартная случайная величина и

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sim \mathbf{P}(X(0) > u)$$

при $u \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы Пикандса [12], приведенному в [13]. Его идея состоит в следующем. Разобьем интервал $[0, T]$ на малые интервалы Λ_k длины Λu^{-1} (с учетом того, что $\alpha = 2$) и применим неравенство Бонферрони для суммы событий

$$\bigcup_{t \in [0, T]} \{X(t) > u, T_t B_{u, S, g}\} = \bigcup_k \bigcup_{t \in \Lambda_k} \{X(t) > u, T_t B_{u, S, g}\},$$

с очевидной манипуляцией с остаточным интервалом. К вероятностям в верхней оценке неравенства применяем лемму 2. Далее, вероятности попарных пересечений событий на Λ_k оцениваем сверху вероятностями совместного превышения максимума на двух малых интервалах, двойная сумма которых уже оценена в упомянутом выше доказательстве теоремы Пикандса. Заметим, что $H_2 := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_2(\Lambda)/\Lambda = \pi^{-1/2}$ [13].

Доказательство теоремы 2 состоит в вычислении асимптотики при $G \rightarrow \infty$ вероятности в правой части (6) с функцией $g_\delta(t)$. Искомая асимптотика следует из следующего обобщения одномерного варианта теоремы 7.1 из [13], доказательство которого следует той же схеме, что и в [13], поэтому мы его не приводим.

Теорема 4. Пусть для гауссовского случайного процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, с нулевым средним существует положительная непрерывная функция C_t такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что ковариационная функция $R(s, t)$ удовлетворяет для всех t соотношениям

$$(1 - \varepsilon)|t_2 - t_1|^\alpha \leq 1 - R(C_t t_1, C_t t_2) \leq (1 + \varepsilon)|t_2 - t_1|^\alpha$$

для любых t_1, t_2 таких, что $|t - t_i| \leq \delta$, $i = 1, 2$.

Дополнительно предположим, что $R(s, t) < 1$ для всех различных s, t . Тогда для любых функций t_u, T_u таких, что

$$\left(\frac{T_u}{C_{T_u}} - \frac{t_u}{C_{t_u}}\right)u^{2/\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad F_{C, A}(u) := \int_{t_u}^{T_u} \frac{1}{C_t} dt u^{2/\alpha} \Psi(u) \rightarrow 0$$

при $u \rightarrow \infty$, имеет место следующая асимптотика:

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [t_u, T_u]} \xi(t) > u\right) = H_\alpha F_{C, A}(u)(1 + \gamma(u)),$$

где H_α — константа Пикандса [13] и $\gamma(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ и зависит только от u, α .

3. Доказательство теоремы 3. Далее нам понадобится оценка двух вероятностей

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbf{P}\left(X(0) \leq u, \max_{[-\kappa u^{-1}, 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \kappa u^{-1}]} X(t) > u\right), \\ p_2 &= \mathbf{P}\left(X(\varepsilon) \leq u, \max_{[-\kappa u^{-1}, 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \kappa u^{-1}]} X(t) > u\right), \end{aligned} \quad \kappa > 0.$$

Лемма 3. Для любого достаточно малого $\kappa > 0$ и $i = 1, 2$

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} u^2 \exp\left(\frac{u^2}{1+r(\varepsilon)}\right) p_i = 0.$$

Доказательство. Случаи p_1 и p_2 симметричны, если изменить время $t \mapsto \varepsilon - t$, поэтому достаточно рассмотреть p_1 . Производя замену переменных $x \mapsto u - x/u$ и $y \mapsto u - y/u$, после элементарных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{[-\kappa u^{-1}, 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \kappa u^{-1}]} X(t) > u \mid \begin{matrix} X(0) = x, \\ X(\varepsilon) = y \end{matrix}\right) \\ &\quad \times f_{X(0), X(\varepsilon)}(x, y) dx dy. \\ &= u^{-2} \int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_u f_{X(0), X(\varepsilon)}\left(u - \frac{x}{u}, u - \frac{y}{u}\right) dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\tilde{P}_u = \mathbf{P}\left(\max_{[-\kappa, 0]} \xi_u(s) > x, \max_{[0, \kappa]} \eta_u(t) > y \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0\right),$$

и $\xi_u(s) = u(X(u^{-1}s) - u) + x$ и $\eta_u(t) = u(X(\tau + u^{-1}t) - u) + y$. Используя выражение для двумерной гауссовской плотности, получаем, что

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2\pi u^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{x+y}{1+r} - \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2u^2(1-r^2)}\right) \tilde{P}_u dx dy, \end{aligned}$$

где $r = r(\varepsilon)$.

Теперь оценим условные математические ожидания гауссовских процессов $\xi_u(t)$ и $\eta_u(t)$. Имеем

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} + R_t R_0^{-1} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E} \eta_u(0) \end{pmatrix},$$

где

$$R_t := \mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \mathbf{E} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) - \mathbf{E} \eta_u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E} \eta_u(0) \end{pmatrix}^{\top} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \xi_u(0) &= \mathbf{E} \xi_u(t) = x - u^2, \quad \mathbf{E} \eta_u(0) = \mathbf{E} \eta_u(t) = y - u^2, \\ \mathbf{D} \xi_u(0) &= \mathbf{D} \eta_u(0) = u^2, \quad \text{cov}(\xi_u(0), \eta_u(0)) = u^2 r(\tau), \\ \text{cov}(\xi_u(0), \xi_u(t)) &= \text{cov}(\eta_u(0), \eta_u(t)) = u^2 r(u^{-1}t), \\ \text{cov}(\xi_u(0), \eta_u(t)) &= u^2 r(\varepsilon + u^{-1}t), \quad \text{cov}(\xi_u(t), \eta_u(0)) = u^2 r(\varepsilon - u^{-1}t). \end{aligned}$$

В силу условий теоремы,

$$\begin{aligned} r(u^{-1}t) &= 1 - u^{-2}|t|^2 + o(u^{-2}), \\ r(\varepsilon \pm u^{-1}t) &= r(\varepsilon) \pm u^{-1}tr'(\varepsilon + \theta_{\pm}u^{-1}t), \end{aligned}$$

где $|\theta_{\pm}| \leq 1$. Отсюда следует, что

$$R_t = R_0 + u \begin{pmatrix} 0 & -r't \\ r't & 0 \end{pmatrix} + o(u),$$

где $r' = r'(\varepsilon)$, и

$$R_t R_0^{-1} = I + \frac{u^{-1}}{1 - r^2} \begin{pmatrix} rr't & -r't \\ r't & -rr't \end{pmatrix} + o(u^{-1})$$

при $u \rightarrow \infty$. Таким образом

$$\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{ur't}{1 - r^2} \begin{pmatrix} r - 1 \\ 1 - r \end{pmatrix} + o(u) \quad (20)$$

при $u \rightarrow \infty$. Далее будем использовать символ $\tilde{\mathbf{E}}$ для условного математического ожидания при $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$. Процесс $\xi_u(s)$ рассматривается на $[-\kappa, 0]$, тогда как $\eta_u(t)$ рассматривается на $[0, \kappa]$, κ — малое положительное число. Следовательно, поскольку $r' = r'(\varepsilon) < 0$,

$$\tilde{\mathbf{E}}\xi_u(t) := \mathbf{E}(\xi_u(t) | \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0) \leq -a \frac{u|r'|t}{1 + r}, \quad t \leq 0, \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}\eta_u(t) := \mathbf{E}(\eta_u(t) | \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0) \leq -a \frac{u|r'|t}{1 + r}, \quad t \geq 0, \quad (22)$$

для любого $a \in (0, 1)$ и достаточно больших u .

Теперь вычислим условную ковариационную матрицу вектора $(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1))$ при заданных $(\xi_u(0), \eta_u(0))$. Имеем

$$\begin{aligned} &\text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{cov} \begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} - C \text{cov} \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix}^{-1} C^{\top}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$C = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right)$$

— матрица ковариаций двух случайных векторов. Используя разложение Тейлора и условие **A2**, получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1)) \\
 &= u^2 \left(r(\varepsilon + u^{-1}(t_1 - t)) + r(\varepsilon + u^{-1}(s_1 - s)) - r(\varepsilon + u^{-1}(t_1 - s)) \right. \\
 &\quad \left. - r(\varepsilon + u^{-1}(s_1 - t)) \right) \\
 &= u^2 \left(u^{-1} r'(\varepsilon)(t_1 - t + s_1 - s - t_1 + s - s_1 + t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} u^{-2} r''(\varepsilon) \left((t_1 - t)^2 + (s_1 - s)^2 - (t_1 - s)^2 - (s_1 - t)^2 \right) + o(u^{-2}) \right) \\
 &= -r''(\varepsilon)(t - s)(t_1 - s_1) + o(1)
 \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$. Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \xi_u(0)) &= \text{cov}(\eta_u(t) - \eta_u(s), \eta_u(0)) \\
 &= u^2(r(tu^{-1}) - r(su^{-1})) = \frac{1}{2}(t^2 - s^2) + o(1), \\
 \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(0)) &= u^2(r(\varepsilon - u^{-1}t) - r(\varepsilon - u^{-1}s)) \\
 &= ur'(\varepsilon)(t - s) + o(u), \\
 \text{cov}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1), \xi_u(0)) &= ur'(\varepsilon)(s_1 - t_1) + o(u),
 \end{aligned}$$

значит, каждый элемент матрицы

$$C \text{cov} \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix}^{-1} C^\top$$

ограничен величиной порядка $u^{-2}O(u) = o(1)$ при $u \rightarrow \infty$. Это позволяет записать ковариацию следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \text{cov} \left(\begin{array}{c} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{array} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} (t - s)^2 & r''(\varepsilon)(t - s)(t_1 - s_1) \\ r''(\varepsilon)(t - s)(t_1 - s_1) & (t_1 - s_1)^2 \end{pmatrix} (1 + o(1)) \quad (24)
 \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$. Кроме того, так как условная дисперсия ограничена безусловной, получаем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s) | \xi_u(0), \eta_u(0)) &\leq \mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s) | \xi_u(0)) \leq C|t - s|^2, \\
 \mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s) | \xi_u(0), \eta_u(0)) &\leq \mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s) | \eta_u(0)) \leq C|t - s|^2
 \end{aligned}$$

для любых $t, s \in [-\infty, \infty)$ и некоторого C . Отсюда следует, что для любого $T > 0$ распределение гауссовского вектора $(\xi_u(t) - \bar{\mathbf{E}} \xi_u(t), \eta_u(t) -$

$\tilde{\mathbf{E}}\eta_u(t))$ при условии $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$ слабо сходится в $C[-T, T]$ к распределению некоторого гауссовского векторного процесса $(\xi(t), \eta(t))$, $t \in [-T, T]$, с нулевым средним и матрицей ковариаций (24). Из выражений для предельной матрицы ковариаций следует, что $\xi(s) = \xi s$, $\eta(t) = \eta t$, где (ξ, η) — гауссовский случайный вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 1 & -r''(\varepsilon) \\ -r''(\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_u &\leq \mathbf{P} \left(\max_{[-\kappa, 0]} (\xi_u(s) - \tilde{\mathbf{E}}\xi_u(s)) > x, \max_{[0, \kappa]} \eta_u(s) - \tilde{\mathbf{E}}\eta_u(s) > y \mid \xi_u(0) = 0 \right. \\ &\quad \left. \rightarrow \mathbf{P} \left(\max_{[-\kappa, 0]} \xi s > x, \max_{[0, \kappa]} \eta t > y \right) \right. \end{aligned} \quad (25)$$

при $u \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_u &\leq \mathbf{P} \left(\max_{[-\kappa, 0]} \xi_u(s) > x \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0 \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\exists s \in [-\kappa, 0]: \xi_u(s) - \tilde{\mathbf{E}}\xi_u(s) > x - \tilde{\mathbf{E}}\xi_u(s) \mid \xi_u(0) = 0 \right. \\ &\quad \left. \eta_u(0) = 0 \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{\mathbf{E}}\xi_u(s) \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow \infty$ для любого отрицательного s , из двух предыдущих соотношений получаем, что $\tilde{P}_u \rightarrow 0$ для любых $x > 0$, $y \in \mathbf{R}$.

Теперь построим мажорирующую функцию для подынтегрального выражения в (19). Представим ее в двух квадрантах следующим образом.

1. Внутри квадранта ($x > 0$, $y < 0$) ограничим вероятность $\tilde{P}_u$ функцией

$$p_{u1}(x) = \mathbf{P} \left(\max_{t \in [-\kappa, 0]} (\xi_u(t) - \tilde{\mathbf{E}}\xi_u(t)) > x \mid \xi_u(0) = 0 \right. \\ \left. \eta_u(0) = 0 \right)$$

и экспоненциальную функцию функцией

$$f_{u1} = \exp \left(\frac{y}{1+r} + \frac{x}{0.9+r} \right)$$

для достаточно больших u . В силу неравенства Бореля [13]

$$p_{u1}(x) \leq C \exp(-bx^2), \quad b > 0.$$

2. В квадранте ($x > 0$, $y > 0$) аналогично возьмем следующие мажорирующие функции:

$$p_{u2}(x) = \mathbf{P} \left(\max_{(s,t) \in [-\kappa, 0] \times [0, \kappa]} \left(\xi_u(s) + \eta_u(t) - \tilde{\mathbf{E}}(\xi_u(s) + \eta_u(t)) \right) > x + y \mid \begin{array}{l} \xi_u(0) = 0 \\ \eta_u(0) = 0 \end{array} \right),$$

$$f_{u2} = \exp \left(\frac{x}{0.9 + r} + \frac{y}{0.9 + r} \right).$$

Снова тем же путем применяем неравенство Бореля и получаем, что $p_{u2}(x) \leq C \exp(-b(x+y)^2)$, $b > 0$.

Таким образом, мы получаем

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} u^2 \exp \left(\frac{u^2}{1 + r(\varepsilon)} \right) p_1 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{(x+y)/(1+r)} \limsup_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}_u dx dy = 0,$$

что и доказывает утверждение леммы. Из-за симметрии это справедливо и для p_2 .

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $b \geq a$, обозначим для краткости $B = B_{g_2, S_1, S_2}(u)$ и рассмотрим событие

$U_{u; a, b, T, B} := \{\exists(s, t): s, t \in [0, T], b \geq t - s \geq a, X(t) \geq u, X(s) \geq u, T_s B\}$,
в частности, $P(U_{u; \varepsilon, b, T, B}) = P(u; B_{u, S_1, S_2}(A))$ для любого $b \geq T$ и

$$P(U_{u; \varepsilon, \varepsilon, T, B}) = \mathbf{P} \left(\{\exists t \in [\varepsilon, T]: X(t - \varepsilon) \wedge X(t) > u\} \cap T_{t-\varepsilon} B \right).$$

Введем функцию $\delta(u) = cu^{-2} \ln u$, $c > 0$, и возьмем $\gamma > 0$. Для любого u такого, что $\delta(u) \geq \gamma u^{-2}$ (т.е. для u таких, что $\ln u \geq \gamma/c$), выполнены включения

$$U_{u; \varepsilon, T, T, B} \subseteq U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B} \cup (U_{u; \varepsilon + \gamma u^{-2}, \varepsilon + \delta(u), T} \setminus U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T}) \cup U_{u; \varepsilon + \delta(u), T, T} \quad (26)$$

и

$$U_{u; \varepsilon, T, T, B} \supseteq U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B} \supseteq U_{u; \varepsilon, \varepsilon, T, B}. \quad (27)$$

Дальнейшее доказательство строится следующим образом. Сначала оценим сверху вероятности третьего (грубое разделение выбросов) и второго (тонкое разделение выбросов) событий в правой части (26). После этого получим оценку сверху вероятности первого события в правой части (26) для достаточно малого γ , и увидим, кроме того, что эта оценка мажорирует две уже оцененные вероятности. Наконец, мы оценим снизу вероятность события в правой части (27) и покажем, что эта оценка эквивалентна оценке сверху.

3.1. Грубое разделение выбросов. Оценим сверху вероятность третьего события в правой части (26). Используя, что $r(t) < r(\varepsilon + \delta(u))$ при $t > \varepsilon + \delta(u)$ и обозначая $r = r(\varepsilon)$, $r' = r'(\varepsilon)$, получаем, в силу неравенства теоремы 8.1 из [13], что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\delta(u),T,T}) \\ & \leq \mathbf{P}(\exists(s,t): s, t \in [0, T], t \geq s + \varepsilon + \delta(u), X(t) + X(s) > 2u) \\ & = \mathbf{P}\left(\max_{s,t \in [0,T], t \geq s + \varepsilon + \delta(u)} (X(t) + X(s)) > 2u\right) \\ & \leq Cu^{2-1} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r(\varepsilon+\delta(u))}\right) \\ & \leq Cu \exp\left(-\frac{u^2}{1+r} + \frac{u^2\delta(u)r'(1+o(1))}{(1+r)^2}\right) \leq Cu^{-R} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right) \quad (28) \end{aligned}$$

для любого $R > 0$, соответственно выбирая при этом c в $\delta(u)$ достаточно большим и пользуясь тем, что $r' < 0$.

3.2. Тонкое разделение выбросов. Теперь оценим вероятность второго события в правой части (26). Имеем

$$\mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\gamma u^{-2},\varepsilon+\delta(u),T} \setminus U_{u;\varepsilon,\varepsilon+\gamma u^{-2},T}) \leq \mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\gamma u^{-2},\varepsilon+\delta(u),T} \cap U_{u;\varepsilon,\varepsilon,T}^c).$$

Возьмем малое положительное $g < \gamma$ и рассмотрим решетку $\{kgu^{-2}, k \in \mathbf{Z}\}$. Имеем

$$\mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\gamma u^{-2},\varepsilon+\delta(u),T} \cap U_{u;\varepsilon,\varepsilon,T}^c) \leq \mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\gamma u^{-2},\varepsilon+\delta(u),T} \cap U_g^c),$$

где

$$U_g^c = \left\{ \max_{k: kgu^{-2} \in [\varepsilon, T]} X(kgu^{-2} - \varepsilon) \wedge X(kgu^{-2}) \leq u \right\}.$$

Паре (s, t) такой, что $t - s \in [\varepsilon + \gamma u^{-2}, \varepsilon + \delta(u)]$, поставим в соответствие целое $k = [tu^2/g]$. Для всех больших u выполнены включения $t \in [kgu^{-2}, kgu^{-2} + \delta(u)]$ и $s \in [kgu^{-2} - \varepsilon - \delta(u), kgu^{-2} - \varepsilon]$. Следовательно, вероятность $\mathbf{P}(U_{u;\varepsilon+\gamma u^{-2},\varepsilon+\delta(u),T} \cap U_g)$ не больше, чем

$$\sum_{k: kgu^{-2} \in [\varepsilon, T]} \mathbf{P}(\{X(kgu^{-2} - \varepsilon) \wedge X(kgu^{-2}) \leq u\} \cap B_k \cap B'_k),$$

где

$$\begin{aligned} B_k &= \left\{ \max_{s \in [kgu^{-2} - \varepsilon - \delta(u), kgu^{-2} - \varepsilon]} X(s) > u \right\}, \\ B'_k &= \left\{ \max_{t \in [kgu^{-2}, kgu^{-2} + \delta(u)]} X(t) > u \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку X стационарен, последняя сумма равна

$$\begin{aligned} & \left\lceil \frac{T - \varepsilon}{gu^{-2}} \right\rceil \mathbf{P}\left(X(0) \wedge X(\varepsilon) \leq u, \max_{[-\delta(u), 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \delta(u)]} X(t) > u\right) \\ & \leq \left\lceil \frac{T - \varepsilon}{gu^{-2}} \right\rceil (P_1 + P_2), \end{aligned}$$

где

$$P_1 = \mathbf{P}\left(X(0) \leq u, \max_{[-\delta(u), 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \delta(u)]} X(t) > u\right),$$

$$P_2 = \mathbf{P}\left(X(\varepsilon) \leq u, \max_{[-\delta(u), 0]} X(s) > u, \max_{[\varepsilon, \varepsilon + \delta(u)]} X(t) > u\right).$$

Для достаточно малого $\kappa > 0$ и достаточно большого u такого, что $\delta(u) \leq \kappa u^{-1}$, имеют место оценки $P_1 \leq p_1$, $P_2 \leq p_2$, где p_1, p_2 оценены в лемме 3, таким образом,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{u^2}{1 + r(\varepsilon)}\right) \mathbf{P}(U_{u; \varepsilon + \gamma u^{-2}, \varepsilon + \delta(u), T} \setminus U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T}) = 0. \quad (29)$$

3.3. Асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B})$.

Сейчас следует рассмотреть другую временную нормировку и переобозначить

$$\xi_u(t) = u(X(u^{-2}t) - u) + x, \quad \eta_u(t) = u(X(\varepsilon + u^{-2}t) - u) + y. \quad (30)$$

Поскольку с предыдущим процессом мы больше не работаем, путаницы это не внесет. Сначала найдем условное математическое ожидание и ковариационную функцию этого нового гауссовского векторного процесса при том же условии $(\xi_u(0), \eta_u(0)) = (0, 0)$. Используя, как и ранее, сокращенные обозначения $r = r(\varepsilon)$ и $r' = r'(\varepsilon)$, получаем, что

$$R_t = R_0 + \begin{pmatrix} 0 & -r't \\ r't & 0 \end{pmatrix} + o(1),$$

и также

$$R_t R_0^{-1} = I + \frac{u^{-2} r' t}{1 - r^2} \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & -r \end{pmatrix} + o(u^{-2})$$

при $u \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{r't}{1 - r^2} \begin{pmatrix} r - 1 \\ 1 - r \end{pmatrix} + o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$. Исследуем теперь матрицу условных ковариаций Σ вектора $(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(t) - \eta_u(s))^\top$. Прежде всего,

$$\mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s)) = \mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s)) = 2u^2(1 - r(u^{-2}(t - s))) = O(u^{-2})$$

при $u \rightarrow \infty$. Кроме того, очевидно

$$\mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s)) \leq C|t - s|^2 \quad (31)$$

для $C > 1$ и любых s, t . Далее, используя разложение Тейлора для $r(t)$ в точке $t = \varepsilon$, получаем, что $\text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1)) = o(1)$ при $u \rightarrow \infty$. Точно так же,

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(0)) &= -(t - s)r' + o(1), \\ \text{cov}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1), \xi_u(0)) &= (t_1 - s_1)r' + o(1).\end{aligned}$$

Из условия **A1** следует также, что

$$\text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \xi_u(0)) = O(u^{-2}), \quad \text{cov}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1), \eta_u(0)) = O(u^{-2});$$

таким образом, элементы Σ ограничены, поэтому

$$\Sigma \text{cov} \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix}^{-1} \Sigma^\top = \frac{O(1)}{u^2(1 - r^2)} = O(u^{-2}).$$

Отсюда следует, что

$$\text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) = o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$. Таким образом, двумерный процесс $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, $t \in T$, при условии $(\xi_u(0), \eta_u(0)) = (0, 0)$ слабо сходится в $C(T)$ к детерминированному процессу $(-r't/(1 + r), r't/(1 + r))$ для любого компакта $T \subset \mathbf{R}$. Теперь не представляет труда рассмотреть сходимость условных распределений тройки $(\xi_u(t), \eta_u(t), X(u^{-2}t + s))$, $t \in T$, $s \in [-S_1, S_2]$, при этом же условии. Действительно, для условных распределений процесса $X(u^{-2}t + s)$ от двух временных переменных очевидно выполнено условие плотности типа (31). Далее, элементарные вычисления показывают, что процесс $X(u^{-2}t + s)$ при условии $(\xi_u(0), \eta_u(0)) = (0, 0)$, т.е. $X(0) = u - x/u$, $X(\varepsilon) = u - y/u$, распределен как гауссовский процесс

$$d_2(u^{-2}t + s)Z_u(u^{-2}t + s) + d_2(u^{-2}t + s)m_2(u^{-2}t + s)u^{-1}(x + y),$$

условные конечномерные распределения которого очевидно сходятся при $u \rightarrow \infty$ к распределениям процесса $Z(s)$. Поскольку пара $(\xi_u(t), \eta_u(t))$ сходится слабо к детерминированному процессу, то условное распределение тройки $(\xi_u(t), \eta_u(t), X(u^{-2}t + s))$ слабо сходится к распределению процесса

$$\left(-\frac{r't}{(1 + r)}, \frac{r't}{(1 + r)}, Z(t) \right).$$

Для большого положительного L и целых неотрицательных m введем события

$$\begin{aligned}U_m &= \left\{ \exists(s, t): \varepsilon \leq t - s \leq \varepsilon + \gamma u^{-2}, s \in [mLu^{-2}, (m + 1)Lu^{-2}]: \right. \\ &\quad \left. X(s) > u, X(t) > u, T_s B \right\}.\end{aligned}$$

В силу стационарности их вероятности равны. Имеем поэтому

$$\mathbf{P}(U_{u;\varepsilon,\varepsilon+\gamma u^{-2},T,B}) \leq \frac{T-\varepsilon}{Lu^{-2}} \mathbf{P}(U_0), \quad (32)$$

где для простоты считаем, что число $(T-\varepsilon)u^2/L$ является целым, можно таким образом подбирать L или u . Оценим сначала вероятность $\mathbf{P}(U_0)$:

$$\mathbf{P}(U_0) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^u \mathbf{P}(U_0 \mid X(0) = x, X(\varepsilon) = y) f_{X(0),X(\varepsilon)}(x, y) dx dy.$$

Аналогично (19), после замены $x \mapsto u-x/u$ и $y \mapsto u-y/u$ и элементарных преобразований получаем, что

$$\mathbf{P}(U_0) = u^{-2} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{P}_0(u) f_{X(0),X(\varepsilon)}\left(u - \frac{x}{u}, u - \frac{y}{u}\right) dx dy, \quad (33)$$

где после замены времени $s \mapsto u^{-2}s$, $t \mapsto u^{-2}t$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(u) &= \mathbf{P}(\exists s, t, 0 \leq t-s \leq \gamma, 0 \leq s \leq L: \\ &\quad \xi_u(s) > x, \eta_u(t) > y, T_{u^{-2}s}B \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0). \end{aligned}$$

В силу слабой сходимости тройки $(\xi_u(t), \eta_u(t), X(u^{-2}t+s))$ получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}_0(u) &= \mathbf{I}\left\{\exists s, t, 0 \leq t-s \leq \gamma, 0 \leq s \leq L: \right. \\ &\quad \left. -\frac{r's}{1+r} > x, \frac{r't}{1+r} > y\right\} \mathbf{P}(\tilde{B}), \end{aligned}$$

где обозначено $\tilde{B} = \{\forall s \in [-S_1, S_2] : |Z(s)| \leq g_2(s)\}$. Преобразовывая теперь двумерную плотность в (33) и применяя процесс мажорирования подынтегрального выражения, полностью повторяющий мажорирование из леммы 3 с учетом новой временной нормировки, получаем, что

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1+o(1)}{2\pi u^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right) \mathbf{P}(\forall s \in [-S_1, S_2] : |Z(s)| \leq g_2(s)) \\ &\quad \times \int \int \exp\left(\frac{x+y}{1+r}\right) \mathbf{I}\left\{\exists s, t, 0 \leq t-s \leq \gamma, 0 \leq s \leq L: \right. \\ &\quad \left. -\frac{r's}{1+r} > x, \frac{r't}{1+r} > y\right\} dx dy. \quad (34) \end{aligned}$$

Обозначая $\delta_1 = \gamma|r'|/(1+r)^2$, $L_1 = L|r'|/(1+r)^2$ и производя замену $\tilde{x} = x/(1+r)$, $\tilde{y} = y/(1+r)$, $\tilde{t} = t|r'|/(1+r)^2$ и $\tilde{s} = s|r'|/(1+r)^2$, получаем, что

$$\iint_{\{\exists(s,t): t-s \in [0, \gamma], s \in [0, L], -r's/(1+r) > x, r't/(1+r) > y\}} \exp\left(\frac{x+y}{1+r}\right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= (1+r)^2 \iint_{\{\exists(\tilde{s}, \tilde{t}): \tilde{t}-\tilde{s} \in [0, \delta_1], \tilde{s} \in [0, L_1], \tilde{s} > \tilde{x}, -\tilde{t} > \tilde{y}\}, \tilde{x} \leq 0} \exp(\tilde{x} + \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\quad + (1+r)^2 \iint_{\{\exists(\tilde{s}, \tilde{t}): \tilde{t}-\tilde{s} \in [0, \delta_1], \tilde{s} \in [0, L_1], \tilde{s} > \tilde{x}, -\tilde{t} > \tilde{y}\}, \tilde{x} > 0} \exp(\tilde{x} + \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\leq (1+r)^2 \left(\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \exp(\tilde{x} + \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} + \int_0^{L_1} \int_{-\infty}^{-\tilde{x}} \exp(\tilde{x} + \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \right) \\
&= (1+r)^2 (1 + L_1) = (1+r)^2 + L|r'|, \tag{35}
\end{aligned}$$

так как $\tilde{t} \geq \tilde{s} \geq \tilde{x}$. Таким образом, учитывая (32), получаем соотношение

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}(U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B}) \exp\left(\frac{u^2}{1+r}\right) \leq \frac{(T-\varepsilon)|r'|}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \mathbf{P}(\tilde{B}). \tag{36}$$

Остается оценить снизу вероятность в правой части (27). Используя неравенство Бонферрони и стационарность, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B}) &\geq P(U_{u; \varepsilon, \varepsilon, T, B}) \\
&\geq \frac{T-\varepsilon}{Lu^{-2}} \left(p_0(B) - \sum_{m=1}^{[(T-\varepsilon)u^2/L]+1} p_{0,m} \right), \tag{37}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
p_0(B) &= \mathbf{P}(\exists t: t \in [0, Lu^{-2}]: X(t) \geq u, X(t+\varepsilon) \geq u, T_t B), \\
p_{0,m} &= \mathbf{P}(\exists(s, t): s \in [0, Lu^{-2}], t \in [mLu^{-2}, (m+1)Lu^{-2}]: \\
&\quad X(s) \geq u, X(s+\varepsilon) \geq u, X(t) \geq u, X(t+\varepsilon) \geq u).
\end{aligned}$$

Полагая в (34), (35) $\gamma = 0$, получаем при $u \rightarrow \infty$, что

$$\begin{aligned}
p_0(B) &\geq \frac{1+o(1)}{2\pi u^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right) \\
&\quad \times \iint_{[\tilde{x}, -\tilde{y}] \cap [0, L_1] \neq \emptyset} \exp(\tilde{x} + \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \mathbf{P}(\tilde{B}) \\
&= \frac{1+o(1)}{2\pi u^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right) (1+r)^2 (1+L_1) \mathbf{P}(\tilde{B}), \tag{38}
\end{aligned}$$

где применялось следующее разбиение области интегрирования:

$$\iint_{[\tilde{x}, -\tilde{y}] \cap [0, L_1] \neq \emptyset} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 + \int_0^{L_1} \int_{-\infty}^{-x}.$$

Теперь оценим сумму в (37). Сначала заметим, что для любого $\tau > \varepsilon$

$$\exp\left(-\frac{u^2}{1+r(\tau)}\right) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{1+r(\varepsilon)}\right) \exp\left(-\frac{u^2 \kappa(\tau - \varepsilon)}{(1+r(\varepsilon))^2}\right), \tag{39}$$

где

$$\kappa = \inf_{t \in [0, T-\varepsilon]} \frac{r(\varepsilon) - r(\varepsilon + t)}{t} > 0.$$

Последнее неравенство получаем, рассматривая отдельно малые и большие значения t . Далее,

$$p_{0,m} \leq \mathbf{P}(\exists(s, t): s, t \in [0, Lu^{-2}], X(s) > u, X(t + \varepsilon + mLu^{-2}) > u).$$

Правая часть может быть оценена подобно оценке P_0 (см. (34) и (35)), но используя $\tau = \varepsilon + mLu^{-2}$ вместо ε . Имеем

$$p_{0,m} \leq \frac{1 + o(1)}{2\pi u^2 \sqrt{1 - r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + r(\tau)}\right) \iint I_m \exp\left(\frac{x + y}{1 + r(\tau)}\right) dx dy \quad (40)$$

с индикаторной функцией

$$I_m = I\left\{\exists(s, t): s \in [0, L]: t \in \varepsilon + [mL, (m+1)L], \right. \\ \left. -\frac{r'(\tau)s}{1 + r(\tau)} > x, \frac{r'(\tau)t}{1 + r(\tau)} > y\right\}.$$

Поскольку

$$I_m \leq \mathbf{I}\left\{x \leq -\frac{r'(\tau)L}{1 + r(\tau)}, y \leq \frac{r'(\tau)(\varepsilon + mL)}{1 + r(\tau)}\right\},$$

то двойной интеграл в (40) ограничен при больших u , и при больших u также выполнено неравенство $(1 + r(\tau))^2 \leq (1 + r)^2$. Таким образом, для достаточно больших u , используя (39), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} p_{0,m} &\leq \sum_{m \geq 1} \mathbf{P}(\exists(s, t): s, t \in [0, Lu^{-2}], X(s) > u, \\ &\quad X(t + \varepsilon + mLu^{-2}) > u) \\ &\leq \frac{(1 + r)^2(1 + o(1))}{2\pi u^2 \sqrt{1 - r(\varepsilon)^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + r(\varepsilon)}\right) \sum_{m \geq 1} \exp\left(-\frac{\kappa mL}{1 + r(\varepsilon)}\right) \\ &\leq o\left(u^{-2} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + r(\varepsilon)}\right)\right) = o(p_0(B)) \end{aligned} \quad (41)$$

при $L \rightarrow \infty$. Объединяя оценки (37), (38) и (41), окончательно получаем, что

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \liminf_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}(U_{u; \varepsilon, \varepsilon + \gamma u^{-2}, T, B}) \exp\left(\frac{u^2}{1 + r}\right) \geq \frac{(T - \varepsilon)|r'|}{2\pi \sqrt{1 - r^2}} \mathbf{P}(\tilde{B}),$$

что завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adler R. J.* The Geometry of Random Fields. Chichster: Wiley, 1981, 280 p.
2. *Беляев Ю. К., Носко В. П.* Характеристики выбросов за высокий уровень гауссовского процесса и его огибающей. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 2, с. 302–314.
3. *Watanabe H.* On asymptotic property of Gaussian processes. I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1970, v. 148, p. 233–248.
4. *Кремена Е. В.* О форме высоких выбросов гауссовского стационарного процесса. — Вестник Моск. ун-та, (в печати).
5. *Крамер Г., Лидбеттер М. Р.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969, 398 с.
6. *Лидбеттер М. Р., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
7. *Lindgren G.* Some properties of a normal process near a local maximum. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, p. 1870–1883.
8. *Marcus M., Rosen J.* Markov Processes, Gaussian Processes, and Local Times. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 620 p.
9. *Москалева М. С.* Слабая сходимость мер высокого уровня гауссовских случайных процессов. — Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, с. 42–46
10. *Носко В. П.* Локальная структура однородного гауссовского случайного поля в окрестности точек высокого уровня. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 4, с. 722–736
11. *Носко В. П.* Асимптотические распределения характеристик выбросов однородного гауссовского случайного поля за высокий уровень. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 722–733.
12. *Pickands J. III.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 51–73.
13. *Piterbarg V. I.* Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Providence: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p. (Transl. Math. Monogr., v. 148.)
14. *Hüsler J., Ladneva A., Piterbarg V.* On clusters of high extremes of Gaussian stationary processes with ε -separation. — Electron J. Probab., 2010, v. 15, paper № 59, p. 1825–1862.

Поступила в редакцию
1.X.2012