Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Н. Е. Кордзахия, Т. Линг, О моментах оценок
Питмена: случай дробного броуновского движения, *Теория ве-
роятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 695–710

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразуме-
вает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:15:17

© 2013 г. *НОВИКОВ А.**, *КОРДЗАХИЯ Н.***, *ЛИНГ Т.******О МОМЕНТАХ ОЦЕНОК ПИТМЕНА: СЛУЧАЙ ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹⁾**

В некоторых нерегулярных статистических задачах оценивания предельные процессы правдоподобия являются функционалами от дробного броуновского движения с параметром Хёрста H , $0 < H \leq 1$. В статье приводятся несколько аналитических и численных результатов для моментов оценок Питмена, являющихся интегральными функционалами от дробного броуновского движения. Приводятся также результаты моделирования методом Монте-Карло для дисперсии оценок Питмена и дисперсии предельного распределения оценки максимального правдоподобия.

Ключевые слова и фразы: оценки Питмена, дробное броуновское движение, интегральные функционалы, дзета-функция Римана.

1. Введение. Оценки Питмена [19], или байесовские оценки с постоянным априорным распределением на прямой (см. [3]), являются оптимальными при различных постановках задач оценивания параметров случайных процессов [10], [12]. В качестве примера укажем проблему оценки параметра θ по наблюдениям процесса диффузии $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, являющегося решением стохастического уравнения

$$dX_t = s(X_t, t, \theta) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где функция сноса $s(x, t, \theta)$ является нерегулярной функцией, например $s(x, t, \theta) = |x - \theta|^p$, $p < 1/2$, или $s(x, t, \theta) = I\{\theta > t\}$. Для такого рода нерегулярных статистических задач соответствующий предельный процесс отношения правдоподобия Z_t типично порождается дробным броуновским движением (ДБД) W_t^H с параметром Хёрста H , $0 < H \leq 1$; при этом

$$Z_t := e^{W_t^H - |t|^{2H}/2}, \quad t \in \mathbf{R} := (-\infty, \infty)$$

*School of Mathematical Sciences, University of Technology, Sydney, NSW, Australia; Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: alex.novikov@uts.edu.au

**Department of Statistics, Macquarie University, North Ryde, NSW, Australia; e-mail: nkordzak@hotmail.com

***University of Technology, Sydney, NSW, Australia; e-mail: tim.ling@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке ARC (Discovery grant DP120102398).

(см. [15], [7]). Случай $H = 1/2$ впервые рассматривался в контексте задач разладки процесса броуновского движения [10], [12]. Отметим, что случай $H = 1/2$ появляется в задачах оценивания параметра запаздывания процессов диффузии [9]. Случай $H \neq 1/2$ также часто возникает в различных постановках задач оценивания параметров процессов с непрерывным [15], [7] и дискретным [12], [2] временем.

Относительно свойств предельных распределений оценок Питмена имеется сравнительно мало результатов. В этой работе, являющейся продолжением [18], мы изучаем предельное распределение оценки Питмена, которое может быть определено как распределение случайной величины

$$\zeta_H = \int_{-\infty}^{\infty} t q_t dt, \quad (1)$$

где

$$q_t = Z_t \left(\int_{-\infty}^{\infty} Z_u du \right)^{-1}; \quad (2)$$

отметим, что ζ_H можно интерпретировать как среднее по апостериорной плотности q_t .

Напомним, что процесс $W^H = \{W_s^H, s \in \mathbf{R}\}$ является гауссовским и

$$W_0^H = 0, \quad \mathbf{E} W_s^H = 0, \quad \mathbf{E} |W_s^H - W_t^H|^2 = |s - t|^{2H}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Отсюда следует, что ковариационная функция процесса W^H имеет вид

$$R_H(t, s) := \mathbf{E} (W_t^H W_s^H) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Следует отметить, что даже в случае стандартного броуновского движения (т.е. $H = 1/2$), которое является марковским процессом, ни распределение, ни старшие моменты случайной величины $\zeta_{1/2}$ не известны в явном виде. Существенная трудность в изучении функционалов от ДБД связана с тем, что, за исключением случаев $H = 1/2$ и $H = 1$, процесс W^H не является семимартингалом и поэтому стандартные инструменты стохастического исчисления, основанные на формуле Ито, не применимы.

Отметим, что случай $H = 1$ соответствует регулярным статистическим задачам оценивания, в которых предельное распределение нормально, $\zeta_1 \sim N(0, 1)$.

В данной работе мы получаем некоторые результаты о дисперсии и распределении ζ_H , $0 < H < 1$, используя технику преобразования меры и гауссовское свойство ДБД. В работе [18] было показано, что при ограничении $H > 0.309 \dots$ случайная величина $|\zeta_H|^{2H}$ является экспоненциально ограниченной, т.е. существует константа $\alpha_H > 0$ такая, что

$$\mathbf{E} e^{\delta |\zeta_H|^{2H}} < \infty \quad \text{для } \delta < \alpha_H. \quad (3)$$

Отсюда следует, в частности, что все моменты ζ_H конечны. В п. 2 мы улучшаем этот результат (см. теорему 1), показывая, что (3) верно при всех $H \in (0, 1)$. Это улучшение достигается за счет применения метода преобразования меры, порожденной процессом ДБД (см. лемму 1 в п. 2). Отметим, что лемма 1 также используется в доказательстве теоремы 2 (см. п. 3), которая содержит некоторое общее тождество для математических ожиданий функций от ζ_H . Затем, используя теорему 2, мы получаем представление для дисперсии ζ_H , когда $H \in (0, 1]$ (см. следствие 1). Следствие 2 содержит нижнюю границу для моментов $\mathbf{E} \zeta_H^k$, $k = 2, 4, 6, \dots$.

В п. 4 для случая $H \in [1/2, 1)$ (см. теорему 3) мы выводим представление для $\mathbf{D}\zeta_H$ в терминах функции

$$g(m) := \mathbf{E} \ln \int_{-\infty}^{\infty} Z_u e^{mu} du. \quad (4)$$

Этот результат был сформулирован без доказательства в [18]. Ранее, также в [18], мы вывели еще одно выражение для $\mathbf{D}\zeta_H$ в терминах функции

$$g(m_1, m_2) = \mathbf{E} \ln \int_0^{\infty} (Z_u e^{-m_1 u} + Z_{-u} e^{-m_2 u}) du.$$

В [18] было показано, что в случае $H = 1/2$ функция $g(m_1, m_2)$ (и, следовательно, функция $g(m) = g(-m, m)$) может быть выражена в терминах некоторой специальной функции (PolyGamma), что приводит к очень короткому выводу следующего известного результата [20]:

$$\mathbf{D}\zeta_{1/2} = 16 \text{ Zeta}[3] \approx 19.23, \quad (5)$$

здесь $\text{Zeta}[k]$ — функция Римана (см. подробности в [18]).

В п. 5 мы приводим результаты моделирования методом Монте-Карло для дисперсии случайной величины ζ_H и дисперсии предельного распределения оценки максимального правдоподобия ξ_H (это есть точка положения максимума процесса $Z = \{Z_s, s \in \mathbf{R}\}$).

2. Экспоненциальная ограниченность случайной величины $|\zeta_H|^{2H}$. Следующая лемма о преобразовании меры для гауссовских процессов (в частности, для W^H), играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1 ниже.

Мы формулируем лемму 1 в терминах гауссовской системы $(\xi, \{X_s\}, s \in D)$ (см. монографию [25]), определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Напомним, что это означает, что вектор $(\xi, \{X_{t_i}\}, t_i \in D, i = 1, \dots, n)$ является гауссовским при всех n .

Мы используем верхний индекс $\mathbf{Q}$, чтобы подчеркнуть, что математическое ожидание берется относительно меры $\mathbf{Q}$, поэтому, в частности, $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ означает математическое ожидание относительно меры $\mathbf{Q}$.

Следующий вспомогательный результат является вариацией известных результатов по преобразованию вероятностных мер (Cameron–Martin–Girsanov–Maruyama–... transformation), но приводимая формулировка, по-видимому, является новой.

Лемма 1. Пусть $(\xi, \{X_s\}, s \in D)$ является гауссовской системой на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и

$$\mathbf{E} \xi = 0, \quad \mathbf{D} \xi = \sigma^2.$$

Определим меру $\mathbf{Q}$ как преобразование меры $\mathbf{P}$ по формуле

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E} I(A) e^{\xi - \sigma^2/2}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Тогда на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$:

- 1) система $(\xi, \{X_s\}, s \in D)$ является гауссовской;
- 2) $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} X_s = \mathbf{E} X_s + \text{Cov}(\xi, X_s)$, $\text{Cov}^{\mathbf{Q}}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$.

Доказательство. Свойство 1) является следствием определения гауссовской системы и того факта, что линейное преобразование гауссовского вектора является гауссовским.

Для проверки второго свойства нужно выписать совместную производящую функцию (или характеристическую функцию) случайных величин X_s и X_t относительно меры $\mathbf{Q}$: для любых $t, s \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} e^{z_1 X_t + z_2 X_s} &= \mathbf{E} e^{z_1 X_t + z_2 X_s} e^{\xi - \sigma^2/2} \\ &= \exp \left\{ z_1 \mathbf{E}^{\mathbf{P}} X_s + z_2 \mathbf{E}^{\mathbf{P}} X_t - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^{\mathbf{P}}(\xi + z_1 X_s + z_2 X_t) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{D}^{\mathbf{P}}(\xi + z_1 X_s + z_2 X_t) &= \frac{1}{2} (\sigma^2 + z_1^2 \mathbf{D}^{\mathbf{P}} X_s + z_2^2 \mathbf{D}^{\mathbf{P}} X_t) \\ &\quad + z_1 \text{Cov}^{\mathbf{P}}(\xi, X_s) + z_2 \text{Cov}^{\mathbf{P}}(\xi, X_t) + z_1 z_2 \text{Cov}^{\mathbf{P}}(X_t, X_s), \end{aligned}$$

то, дифференцируя (6) по z_1 и z_2 , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} X_s &= \frac{\partial}{\partial z_1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} e^{z_1 X_s + z_2 X_t} \Big|_{z_1=z_2=0} = \mathbf{E} X_s + \text{Cov}(\xi, X_s), \\ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} X_t X_s &= \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} e^{z_1 X_t + z_2 X_s} \Big|_{z_1=z_2=0} \\ &= (\mathbf{E} X_s + \text{Cov}(\xi, X_s))(\mathbf{E} X_t + \text{Cov}(\xi, X_t)) + \text{Cov}(X_t, X_s) \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} X_t \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} X_s + \text{Cov}(X_t, X_s). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

При рассмотрении интегралов от гауссовских процессов мы всегда предполагаем, что используется прогрессивно измеримая модификация

процесса X_s такая, что интегралы от функций X_s определены в стандартном смысле.

Для доказательства теоремы 1 нам также потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть X_s является гауссовским процессом и $\mathbf{E} X_s = 0$. Тогда для любых $t > 0$ и $r > 0$

$$\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{X_s} ds \right)^{-r} \leq \frac{1}{t^r} \exp \left\{ \frac{r^2}{2t^2} \mathbf{D} \int_0^t X_s ds \right\}. \quad (7)$$

Доказательство. Применяя неравенство Йенсена, получаем для любого $t > 0$

$$\int_0^t e^{X_s} ds \geq t \exp \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t X_s ds \right\},$$

и, следовательно, для любых $t > 0$ и $r > 0$

$$\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{X_s} ds \right)^{-r} \leq \frac{1}{t^r} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{r}{t} \int_0^t X_s ds \right\} = \frac{1}{t^r} \exp \left\{ \frac{r^2}{2t^2} \mathbf{D} \int_0^t X_s ds \right\}.$$

Замечание 1. Интегралы вида $\mathbf{E} (\int_0^t e^{X_s} ds)^{-1}$ рассматривались в работах [14], [17], [13].

Теорема 1. При всех $H \in (0, 1]$ существует константа $\alpha_H > 0$ такая, что

$$\mathbf{E} e^{\delta |\zeta_H|^{2H}} < \infty \quad \text{для } \delta < \alpha_H. \quad (8)$$

Доказательство. Если $H = 1$, то $\alpha_1 = 1/2$ в (8), поскольку, как хорошо известно, в этом случае $\zeta_1 \sim N(0, 1)$ и поэтому

$$\mathbf{E} e^{\delta \zeta_1^2} < \infty \quad \text{для } \delta < \frac{1}{2}; \quad \mathbf{E} e^{\zeta_1^2/2} = \infty. \quad (9)$$

В случае $H \in (0, 1)$ мы выведем подходящую оценку для математического ожидания процесса q_t , определенного в (2), что и приведет к (8).

Заметим сначала, что функция $e^{\delta |x|^{2H}}$ выпукла при $H \geq 1/2$, а при $H \in (0, 1/2)$ мажорируется выпуклой функцией $\max(C_{\delta, H}, e^{\delta |x|^{2H}})$, где $C_{\delta, H}$ — достаточно большая константа.

Поскольку случайный процесс q_t можно рассматривать как функцию плотности (при каждом t это неотрицательная функция, $\int_{-\infty}^{\infty} q_t dt = 1$), то в силу неравенства Йенсена из (1) следует, что для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} e^{\delta |\zeta_H|^{2H}} &\leq C_{\delta, H} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta |t|^{2H}} q_t dt \\ &\leq C_{\delta, H} + \int_{-1}^1 e^{\delta |t|^{2H}} q_t dt + \int_{-\infty}^{\infty} I\{|t| > 1\} e^{\delta |t|^{2H}} q_t dt \\ &\leq C_{\delta, H} + e^{\delta} + \int_{-\infty}^{\infty} I\{|t| > 1\} e^{\delta |t|^{2H}} q_t dt, \end{aligned}$$

где константа $C_{\delta,H}$ неотрицательна и $C_{\delta,H} = 0$, когда $H \geq 1/2$; выше мы также воспользовались тем фактом, что $\int_{-\infty}^{\infty} q_t dt = 1$. В силу симметрии ДБД, т.е. равенства по распределению

$$\{W_u^H, u \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{W_{-u}^H, u \geq 0\}, \quad (10)$$

это влечет

$$\mathbf{E} e^{\delta |\zeta_H|^{2H}} \leq C_{\delta,H} + e^\delta + 2 \int_1^\infty e^{\delta t^{2H}} \mathbf{E} q_t dt.$$

Для нахождения верхней оценки для $\mathbf{E} q_t$ при каждом фиксированном $t \geq 1$ мы применим лемму 1 с

$$\xi = \lambda W_t^H, \quad X_s = W_s^H,$$

где λ — действительное число. Тогда получаем

$$\mathbf{E} X_s = 0, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 t^{2H}}{2}; \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} W_t^H = \lambda R_H(t, s), \quad R^{\mathbf{Q}}(t, s) = R_H(t, s).$$

Это означает, что относительно меры $\mathbf{Q}$ процесс $\{W_t^H - \lambda R_H(t, s), t \in \mathbf{R}\}$ является (стандартным) ДБД. Используя этот факт, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} q_t &= \mathbf{E} \exp \left\{ \lambda W_t^H - \frac{\lambda^2}{2} t^{2H} \right\} \exp \left\{ (1 - \lambda) W_t^H - \frac{(1 - \lambda^2)}{2} t^{2H} \right\} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H - |s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \exp \left\{ (1 - \lambda) W_t^H - \frac{(1 - \lambda^2)}{2} t^{2H} \right\} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H - |s|^{2H}/2} ds \right)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда, применяя лемму 1, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} q_t &= \mathbf{E} \exp \left\{ (1 - \lambda) W_t^H + \lambda(1 - \lambda) t^{2H} - \frac{(1 - \lambda^2)}{2} t^{2H} \right\} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H + \lambda R_H(t, s) - |s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} \\ &= \exp \left\{ - \frac{(1 - \lambda)^2}{2} t^{2H} \right\} \mathbf{E} e^{(1 - \lambda) W_t^H} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1}, \quad (11) \end{aligned}$$

где $t^{2H} f(s/t) := \lambda R_H(t, s) - |s|^{2H}/2$.

Заметим, что

$$f(u) = \frac{\lambda + (\lambda - 1)|u|^{2H} - \lambda|1 - u|^{2H}}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \lambda - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Для простоты изложения положим далее $\lambda = 1/2$ (хотя более точную оценку для индекса α_H можно получить при подходящем выборе λ в

зависимости от H). При выборе $\lambda = 1/2$ мы можем переписать (11) следующим образом:

$$\mathbf{E} q_t = e^{-t^{2H}/8} \mathbf{E} e^{W_t^H/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1}, \quad (13)$$

где

$$f(u) = f(1-u) = \frac{1 - |u|^{2H} - |1-u|^{2H}}{4}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0. \quad (14)$$

Легко видеть, что функция $f(u)$, $0 < u < 1$, при $H \in (0, 1/2)$ является отрицательной, а при $H \in (1/2, 1)$ является положительной.

Применяя неравенство $e^{x/2} \leq (1 + e^x)/2$ для члена $e^{W_t^H/2}$ в (13) и уменьшая интервал интегрирования $s \in \mathbf{R}$ до $s \in [0, t]$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} q_t \leq \frac{1}{2} e^{-t^{2H}/8} & \left[\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1} \right. \\ & \left. + \mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H - W_t^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Ввиду трансляционной инвариантности процесса ДБД:

$$\{W_s^H - W_t^H, s \in \mathbf{R}\} \stackrel{d}{=} \{W_{t-s}^H, s \in \mathbf{R}\}, \quad (15)$$

математическое ожидание $\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H - W_t^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1}$ после замены $t - s$ на s равно $\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H + t^{2H} f(1-s/t)} ds \right)^{-1}$. Это приводит к оценке

$$\mathbf{E} q_t \leq \frac{1}{2} e^{-t^{2H}/8} \left[\mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1} + \mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H + t^{2H} f(1-s/t)} ds \right)^{-1} \right].$$

Так как $f(u) = f(1-u)$, это неравенство можно переписать в виде

$$\mathbf{E} q_t \leq e^{-t^{2H}/8} \mathbf{E} \left(\int_0^t e^{W_s^H + t^{2H} f(s/t)} ds \right)^{-1}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай $H \in [1/2, 1)$. Тогда легко видеть, что $f(s/t) \geq 0$ и, следовательно, ввиду леммы 2

$$\mathbf{E} q_t \leq e^{-t^{2H}/8} \mathbf{E} \left(\int_0^1 e^{W_s^H} ds \right)^{-1} < \infty.$$

Объединяя полученные выше неравенства, мы приходим к следующей оценке: для всех $\delta < 1/8$

$$\mathbf{E} e^{\delta |\zeta_H|^{2H}} \leq C_{\delta, H} + e^\delta + 2 \mathbf{E} \left(\int_0^1 e^{W_s^H} ds \right)^{-1} \int_1^\infty e^{-(1/8-\delta)t^{2H}} dt < \infty.$$

Рассмотрим теперь случай $H \in (0, 1/2)$. Очевидно, что функция $f(u)$ (определенная в (12)) убывает на интервале $u \in (0, 1/2)$. Это означает, что $f(s/t) \geq f(\varepsilon)$ для всех $s \in (0, \varepsilon t)$ и любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$, где $f(\varepsilon) = -(\varepsilon^{2H}/4)(1 + o(1))$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, из (16) имеем

$$\mathbf{E} q_t \leq e^{-(1/8+f(\varepsilon))t^{2H}} \mathbf{E} \left(\int_0^{t\varepsilon} e^{W_s^H} ds \right)^{-1}.$$

Тот факт, что $\mathbf{E} (\int_0^{t\varepsilon} e^{W_s^H} ds)^{-1}$ является ограниченной функцией от $t \in [1, \infty)$, легко следует из леммы 2.

Объединяя все оценки, полученные выше, мы имеем следующую оценку для случая $H \in (0, 1/2)$:

$$\mathbf{E} e^{\delta|\zeta_H|^{2H}} \leq C_{\delta,H} + e^\delta + 2 \mathbf{E} \left(\int_0^\varepsilon e^{W_s^H} ds \right)^{-1} \int_1^\infty e^{-(1/8+f(\varepsilon)-\delta)t^{2H}} dt,$$

где правая часть, очевидно, конечна, когда ε достаточно мало и $\delta < 1/8$. Это завершает доказательство теоремы 1 с $\alpha_H \geq 1/8$ для всех $H \in (0, 1]$.

З а м е ч а н и е 2. В [18] с помощью другого подхода было показано, что

$$\alpha_H \geq \frac{4H^2 + 2H - 1}{2(2H + 2)(2H + 1)} \quad \text{для } H > \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0.3090 \dots$$

Сравнивая эту оценку с полученной в доказательстве теоремы 1, находим следующую нижнюю границу для α_H :

$$\begin{aligned} \alpha_H &\geq \frac{1}{8} \quad \text{для } H \in (0, H_0], \\ \alpha_H &\geq \frac{4H^2 + 2H - 1}{2(2H + 2)(2H + 1)} \quad \text{для } H \in [H_0, 1), \end{aligned}$$

где $H_0 = (\sqrt{73} - 1)/12 = 0.6287 \dots$, H_0 является корнем уравнения

$$\frac{4H^2 + 2H - 1}{2(2H + 2)(2H + 1)} = \frac{1}{8}.$$

Напомним, что для $H = 1$ индекс α_1 равен $1/2$ (см. (9)).

Гипотеза. Существует конечный индекс $\alpha_H > 0$ такой, что

$$\mathbf{E} e^{\delta|\zeta_H|^{2H}} < \infty \quad \text{для } \delta < \alpha_H, \quad \mathbf{E} e^{\delta|\zeta_H|^{2H}} = \infty \quad \text{для } \delta > \alpha_H.$$

З а м е ч а н и е 3. Это предположение мотивируется теоремой 1 и следующим результатом о предельном распределении оценки максимального правдоподобия ξ_H для случая $H = 1/2$. Хорошо известно, что распределением $|\xi_{1/2}|$ является функция

$$\mathbf{P}(|\xi_{1/2}| > t) = (t + 5)\Phi\left(-\frac{\sqrt{t}}{2}\right) - \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-t/8} - 3e^t \Phi\left(-\frac{3\sqrt{t}}{2}\right), \quad (17)$$

где $\Phi(t)$ — функция стандартного нормального распределения; этот результат можно легко получить из работ [24] и [23]. Используя формулу $\Phi(-x) = (2\pi x^2)^{-1/2} e^{-x^2/2} (1 + o(1))$, $x \rightarrow \infty$, находим

$$\mathbf{P}(|\xi_{1/2}| > t) = \sqrt{\frac{32}{\pi t}} e^{-t/8} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} e^{\delta |\xi_{1/2}|} < \infty \quad \text{для } \delta < \frac{1}{8}, \quad \mathbf{E} e^{|\xi_{1/2}|/8} = \infty.$$

Заметим, что из (17) прямыми вычислениями получается равенство

$$\mathbf{D}\xi_{1/2} = 26, \quad (18)$$

этот результат впервые был опубликован в [21].

З а м е ч а н и е 4. Рецензент настоящей статьи указал нам, что факт существования экспоненциальных моментов случайной величины $|\zeta_H|^{2H}$ следует также из общих результатов теории Ибрагимова и Хасьминского (см. [12]) в сочетании с некоторыми результатами, которые были получены в [6].

3. Тожество для математических ожиданий функций от случайной величины ζ_H .

Теорема 2. Пусть $G(\zeta_H)$ — измеримая ограниченная функция от ζ_H , $H \in (0, 1)$. Тогда

$$\mathbf{E} G(\zeta_H) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} (G(\zeta_H - t) q_t) dt. \quad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение (1) и лемму 1 с $\xi = W_t^H$, $X_s = W_s^H$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} (G(\zeta_H - t) q_t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(G(\zeta_H - t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Z_s ds \right)^{-1} \right) dt \\ &\quad (\text{по лемме 1, после некоторых сокращений}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} G \left(\int_{-\infty}^{\infty} s e^{W_s^H - |t-s|^{2H}/2} ds \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H + |t|^{2H}/2 - |t-s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} - t \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_s^H + |t|^{2H}/2 - |t-s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} dt \\ &\quad (\text{используя трансляционную инвариантность (15)}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \left(G \left(\int_{-\infty}^{\infty} s e^{W_{s-t}^H - |t-s|^{2H}/2} ds \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_{s-t}^H - |t-s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} - t \right) \right. \\ &\quad \left. \times e^{W_t^H - |t|^{2H}/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_{s-t}^H - |t-s|^{2H}/2} ds \right)^{-1} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(полагая } s - t = u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \left(G \left(\int_{-\infty}^{\infty} u e^{W_u^H - |u|^{2H}/2} du \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_u^H - |u|^{2H}/2} du \right)^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. \times e^{W_t^H - |t|^{2H}/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{W_u^H - |u|^{2H}/2} du \right)^{-1} \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} (G(\zeta_H) q_t) dt = \mathbf{E} \left(G(\zeta_H) \int_{-\infty}^{\infty} q_t dt \right) = \mathbf{E} G(\zeta_H).
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 5. Аналог соотношения (19) для независимых одинаково распределенных наблюдений можно найти в [4, лемма 2.18.1], [8].

Далее мы используем обозначения

$$B_i = \int_{-\infty}^{\infty} t^i Z_t dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad A_p = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p q_t dt, \quad p > 0.$$

Отметим, что

$$q_t = Z_t \left(\int_{-\infty}^{\infty} Z_u du \right)^{-1} = \frac{Z_t}{B_0}, \quad \zeta_H = \int_{-\infty}^{\infty} t q_t dt = \frac{B_1}{B_0}, \quad A_2 = \frac{B_2}{B_0}.$$

По неравенству Гёльдера получаем, что для любого $p \geq 1$

$$|\zeta_H|^p \leq A_p. \quad (20)$$

Следствие 1. Для любого $H \in (0, 1)$

$$\mathbf{D} \zeta_H = \mathbf{E} \zeta_H^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} A_2. \quad (21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим тождество (19), где функция $G(\zeta_H)$ имеет вид $\min(|\zeta_H|^2, K)$ с конечным параметром $K > 0$. Тогда, переходя в (19) к пределу при $K \rightarrow \infty$ в силу теоремы 1 (а также теоремы Лебега и леммы Фату), получаем

$$\mathbf{E} \zeta_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} ((\zeta_H - t)^2 q_t) dt.$$

Заметим, что в силу (20) и теоремы 1 для любого $H \in (0, 1]$

$$\mathbf{E} \zeta_H^2 = \mathbf{E} A_1^2 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \mathbf{E} q_t du < \infty.$$

Так как $(\zeta_H - t)^2 = \zeta_H^2 - 2\zeta_H t + t^2$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \zeta_H^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \left((\zeta_H^2 - 2\zeta_H t + t^2) \frac{Z_t}{B_0} \right) dt \\
&= \mathbf{E} \zeta_H^2 - 2 \mathbf{E} \zeta_H \zeta_H + \mathbf{E} A_2 \\
&= \mathbf{E} \zeta_H^2 - 2 \mathbf{E} \zeta_H^2 + \mathbf{E} A_2.
\end{aligned}$$

После упрощений получаем тождество (21).

З а м е ч а н и е 6. Первоначальное доказательство тождества (21) для $H > 1/2$ в [8] основано на том факте, что аналогичное тождество справедливо для оценок параметра сдвига одинаково распределенных наблюдений.

Теорема 1 может быть использована для вывода различных полезных свойств распределения ζ_H . В качестве примера приведем следующий результат.

Следствие 2. Для любого $H \in (0, 1]$ и $k = 2, 4, 6, \dots$ существуют постоянные $c_k > 0$ такие, что

$$\mathbf{E} \zeta_H^k \geq c_k^k \mathbf{E} A_k, \quad (22)$$

где c_k — единственный положительный корень уравнения

$$(x+1)^k - (x-1)^k + 2k(x^k - x^{k-1}) = 2. \quad (23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость результата для $k = 2$ вытекает из следствия 1.

Для случая $k \geq 4$ мы применим теорему 1 с $G(x) = x^k$. Тогда получим

$$\mathbf{E} \zeta_H^k = \mathbf{E} \zeta_H^k - k \mathbf{E} \zeta_H^{k-1} A_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i C_k^i \mathbf{E} \zeta_H^{k-i} A_i + \mathbf{E} A_k,$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты. Это влечет

$$k \mathbf{E} \zeta_H^k = \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i C_k^i \mathbf{E} \zeta_H^{k-i} A_i + \mathbf{E} A_k$$

и, следовательно,

$$k \mathbf{E} \zeta_H^k \geq - \sum_{\substack{3 \leq i \leq k-1 \\ i - \text{нечетное}}} C_k^i \mathbf{E} |\zeta_H^{k-i}| A_i + \mathbf{E} A_k.$$

По неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E} |\zeta_H^{k-i}| A_i \leq (\mathbf{E} \zeta_H^k)^{1-i/k} (\mathbf{E} A_i^{k/i})^{i/k} \leq (\mathbf{E} \zeta_H^k)^{1-i/k} (\mathbf{E} A_k)^{i/k},$$

и, следовательно,

$$k \mathbf{E} \zeta_H^k \geq \mathbf{E} A_k - \sum_{\substack{3 \leq i \leq k-1 \\ i - \text{нечетное}}} C_k^i (\mathbf{E} \zeta_H^k)^{1-i/k} (\mathbf{E} A_k)^{i/k}.$$

Положим $x^k = (\mathbf{E} \zeta_H^k) / \mathbf{E} A_k$. Тогда

$$\frac{(\mathbf{E} \zeta_H^k)^{1-i/k}}{(\mathbf{E} A_k)^{1-i/k}} = \left(\frac{\mathbf{E} \zeta_H^k}{\mathbf{E} A_k} \right)^{1-i/k} = x^{k-i},$$

и поэтому последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$kx^k + \sum_{\substack{3 \leq i \leq k-1 \\ i - \text{нечетное}}} C_k^i x^{k-i} \geq 1.$$

Выражение для последней суммы можно упростить с помощью следующего элементарного тождества:

$$2 \sum_{\substack{3 \leq i \leq k-1 \\ i - \text{нечетное}}} C_k^i x^{k-i} = (x+1)^k - (x-1)^k - 2kx^{k-1}.$$

Отсюда получаем $(x+1)^k - (x-1)^k + 2k(x^k - x^{k-1}) \geq 2$. Это влечет доказываемый результат.

З а м е ч а н и е 7. Легко проверить, что

$$c_k = \frac{D}{k} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где $D = \ln(1 + \sqrt{2})$ является единственным положительным корнем уравнения

$$\sinh D = 1.$$

Вывод (24) очень прост и потому опускается. Мы только проиллюстрируем точность приближения (24) при $k = 100$: $D/100 \approx 8.813 \times 10^{-3}$, точное решение уравнения (23) есть $c_{100} = 8.8412 \times 10^{-3}$.

4. Представление для $\mathbf{D}\zeta_H$. В этом пункте мы получаем в случае $H \in [1/2, 1]$ еще одно представление для $\mathbf{D}\zeta_H$ в терминах функции $g(m)$, определенной в (4).

Далее мы используем следующие параметрические случайные функции:

$$\alpha(m) = \int_{-\infty}^{\infty} u e^{mu} Z_u du, \quad \beta(m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{mu} Z_u du,$$

где m — вспомогательный параметр. В этих обозначениях

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_u du = \beta(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u Z_u du = \alpha(0), \quad \alpha(m) = \frac{\partial}{\partial m} \beta(m)$$

и

$$\zeta_H = \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}.$$

Отметим, что в силу симметрии распределения ЛБД (см. (10)) мы имеем $g(m) = g(-m)$, а ввиду неравенства $\ln(a+b) \leq \ln(a+1) + \ln(b+1)$ ($a > 0$, $b > 0$) получаем

$$g(m) \leq \mathbf{E} \ln \left(\int_{-\infty}^0 e^{mu} Z_u du + 1 \right) + \mathbf{E} \ln \left(\int_0^{\infty} e^{mu} Z_u du + 1 \right). \quad (25)$$

Пусть $m > 0$. Конечность первого члена в правой части (25) очевидно ввиду неравенства $\ln(x+1) \leq x$ и равенства $\mathbf{E} Z_u = 1$.

Конечность второго члена в правой части (25) можно доказать следующим образом. Заметим, что

$$\begin{aligned} \ln \left(\int_0^\infty e^{mu} Z_u du + 1 \right) &= \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{mu} Z_u du + 1 \right)^{-1} d \int_0^s e^{mu} Z_u du \\ &\leq \int_1^\infty e^{ms} Z_s \left(\int_0^s Z_u du \right)^{-1} ds + e^m \int_0^1 Z_s \left(\int_0^s Z_u du \right)^{-1} ds \\ &\leq \int_1^\infty e^{ms} Z_s \left(\int_0^s Z_u du \right)^{-1} ds + e^m. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{E} Z_s (\int_0^s Z_u du)^{-1} = \mathbf{E} q_s \leq C e^{-\delta s^{2H}}$ для $s \geq 1$ и $\delta < 1/8$ (см. доказательство теоремы 1 и (3), $C = \text{const}$), то легко видеть, что функция $g(m)$, $0 < m < 1/8$, конечна (напомним, что мы рассматриваем случай $H \in [1/2, 1]$). Очевидно также, что $g(m)$ является непрерывной функцией.

Теорема 3. Пусть $H \in [1/2, 1]$. Тогда функция $g(m)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $m \in (-1/8, 1/8)$ и

$$\mathbf{D}\zeta_H = \frac{\partial^2 g(m)}{\partial m^2} \Big|_{m=0}.$$

Доказательство. Используя введенные выше обозначения, имеем

$$\mathbf{D}\zeta_H = \mathbf{E} \frac{\alpha^2(0)}{\beta^2(0)} = \lim_{m \rightarrow 0} \mathbf{E} \frac{\alpha^2(m)}{\beta^2(m)}.$$

Последнее равенство может быть доказано с помощью (3) и оценки

$$\mathbf{E} \frac{\alpha^2(m)}{\beta^2(m)} = \mathbf{E} \left(\int_{-\infty}^\infty u \frac{e^{mu} Z_u}{\beta(m)} du \right)^2 \leq \mathbf{E} \int_{-\infty}^\infty u^2 \frac{e^{mu} Z_u}{\beta(m)} du < \infty.$$

Прямыми вычислениями получаем при $m > 0$, что

$$\frac{\partial^2 \log \beta(m)}{\partial m^2} = -\frac{\alpha^2(m)}{\beta^2(m)} + \frac{\int_{-\infty}^\infty u^2 e^{mu} Z_u du}{\beta(m)}.$$

Беря математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, с использованием хорошо известных теорем о дифференцируемости математического ожидания по параметру получим

$$\frac{\partial^2 g(m)}{\partial m^2} = \mathbf{E} \frac{\partial^2 \ln \beta(m)}{\partial m^2} = -\mathbf{E} \frac{\alpha^2(m)}{\beta^2(m)} + \mathbf{E} \frac{\int_{-\infty}^\infty u^2 e^{mu} Z_u du}{\beta(m)}, \quad (26)$$

где правая часть является непрерывной функцией от m . Отсюда следует, что $\partial^2 g(m)/\partial m^2$ есть непрерывная функция для $m \in (0, 1/8)$ и

(в силу симметрии) для $m \in (-1/8, 0)$. Переходя к пределу в (26) при $m \rightarrow 0$, получаем

$$\left. \frac{\partial^2 g(m)}{\partial m^2} \right|_{m=0} = -\mathbf{E} \frac{\alpha^2(0)}{\beta^2(0)} + \mathbf{E} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 Z_u du}{\beta(0)} = -\mathbf{D}\zeta_H + 2\mathbf{D}\zeta_H = \mathbf{D}\zeta_H.$$

Доказательство завершено.

5. Результаты моделирования. Разработка методов численного расчета распределений интегральных функционалов от ДБД для $H \in (0, 1)$ остается до сих пор открытой проблемой. К настоящему времени единственным явным результатом является формула (5). Однако представление о поведении таких функционалов можно получить

Таблица 1. Оценки дисперсий ζ_H и ξ_H на основе 10^6 траекторий. Каждая траектория построена на основе 2^{18} равномерно расположенных точек на интервале $(-10^5, 10^5)$

H	$\widehat{\mathbf{D}}\zeta_H$	Стандартное отклонение ζ_H	$\widehat{\mathbf{D}}\xi_H$	Стандартное отклонение ξ_H
0.4	109.682	0.4698	151.707	0.2145
0.5	19.2544	0.0350	25.964	0.0367
0.6	6.52596	0.0163	8.63501	0.0386
0.7	3.16871	0.0066	4.08858	0.0182
0.81	1.82699	0.0032	2.24197	0.0101
0.91	1.28289	0.002	1.47782	0.0066

с помощью моделирования методом Монте-Карло. В таблице 1 приведены результаты моделирования методом Монте-Карло для дисперсии случайной величины ζ_H и дисперсии ξ_H на интервале $H \in [0.4, 1)$.

Рис. 1. Логарифмы дисперсий ζ_H (сплошная линия) и ξ_H на интервале $H \in [0.4, 1)$

Для моделирования приращений ДБД мы использовали «circulant embedding method» (см. [22]), который, по-видимому, является одним из самых точных методов для моделирования стационарных гауссовских процессов.

Качественное поведение $D\zeta_H$ и $D\xi_H$, $H \in [0.4, 1]$ (в логарифмической шкале) как функций от параметра H показано на рис. 1. Как видно, $D\zeta_H < D\xi_H$, $D\zeta_H$ и $D\xi_H$ являются монотонными функциями, принимающими большие значения для малых H .

Детали, относящиеся к точности моделирования $D\zeta_H$ и $D\xi_H$, представлены в [16]. Отметим, что полученные значения при $H = 1/2$ находятся в хорошем согласии с формулами (5) и (18).

Авторы выражают благодарность Юрию Кутоянцу за предложение изучить проблему расчетов асимптотических дисперсий оценок Питмана и Юлии Мишуре за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
2. Antoch J., Hušková M. Bayesian-type estimators of change points. — J. Statist. Plann. Inference, 2000, v. 91, № 2, p. 195–208.
3. Berger J. O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. New York: Springer-Verlag, 1985, 617 p.
4. Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997, 771 с.
5. Cameron R. H., Martin W. T. Transformations of Wiener integrals under translations. — Ann. Math., 1944, v. 45, p. 386–396.
6. Dachian S. Estimation of cusp location for Poisson observations. — Statist. Inference Stoch. Process., 2003, v. 6, № 1, p. 1–14.
7. Fujii T. An extension of cusp estimation problem in ergodic diffusion processes. — Statist. Probab. Lett., 2010, v. 80, № 9–10, p. 779–783.
8. Голубев Г. К. О вычислении эффективности оценки максимального правдоподобия при наблюдении разрывного сигнала в белом шуме. — Пробл. передачи информ., 1979, т. 15, № 3, с. 61–69.
9. Gushchin A. A., Küchler U. On estimation of delay location. — Statist. Inference Stoch. Process., 2011, v. 14, № 3, p. 273–305.
10. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Об асимптотическом поведении обобщенных байесовских оценок. — Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 2, с. 257–260.
11. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовском шуме. — Пробл. передачи информ., 1970, т. 11, № 3, с. 31–43.
12. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
13. Kawazu K. A note on the Brownian motion. — From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. Berlin: Springer, 2006, p. 385–392.
14. Kawazu K., Tanaka H. On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1557, p. 78–85.
15. Kutoyants Y. A. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer, 2004, 481 p.
16. Ling T., Novikov A. On simulation of exponential functionals and maximum of fractional Brownian motion. Preprint. Sydney: UTS, 2013.
17. Molchan G. M. Maximum of a fractional Brownian motion: Probabilities of small values. — Comm. Math. Phys., 1999, v. 205, № 1, p. 97–111.

18. Новиков А. А., Кордзашия Н. Е. Оценки Питмана: новый подход к вычислению асимптотической дисперсии. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 603–611.
19. Pitman E. J. G. The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. — Biometrika, 1939, v. 30, p. 391–421.
20. Rubin H., Song K.-S. Exact computation of the asymptotic efficiency of maximum likelihood estimators of a discontinuous signal in a Gaussian white noise. — Ann. Statist., 1995, v. 23, № 3, p. 732–739.
21. Терентьев А. С. Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 4, с. 652–657.
22. Wood A., Chan G. Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$. — J. Comput. Graph. Statist., 1994, v. 3, № 4, p. 409–432.
23. Yao Y.-C. Approximating the distribution of the maximum likelihood estimate of the change-point in a sequence of independent random variables. — Ann. Statist., 1987, v. 15, № 3, p. 1321–1328.
24. Shepp L. A. The joint density of the maximum and its location for a Wiener process with drift. — J. Appl. Probab., 1979, v. 16, № 2, p. 423–427.
25. Shiryaev A. Probability. New York: Springer-Verlag, 1995, 609 p.

Поступила в редакцию
1.X.2012