Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Бутковский, Об эргодических свойствах нелинейных марковских цепей и стохастических уравнений Маккина–Власова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 782–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:44:04

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2013 г.

БУТКОВСКИЙ О. А.*

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАРКОВСКИХ
ЦЕПЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАККИНА–ВЛАСОВА¹⁾

Изучаются эргодические свойства нелинейных марковских цепей и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений. Для нелинейных марковских цепей получены достаточные условия, гарантирующие существование и единственность инвариантной меры, а также равномерную эргодичность нелинейной марковской цепи. Показано, что эти условия носят оптимальный характер. Для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений установлены явные оценки скорости сходимости распределений их сильных решений в метрике полной вариации.

Ключевые слова и фразы: нелинейный марковский процесс, уравнение Маккина–Власова, условие Добрушина, инвариантная мера, экспоненциальная сходимость.

1. Введение. Данная работа посвящена исследованию эргодических свойств нелинейных марковских процессов с дискретным временем (нелинейных марковских цепей), принимающих значения в произвольном пространстве состояний, а также эргодических свойств решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (стохастических уравнений Власова–Маккина).

Нелинейные марковские процессы определяются как процессы, чьи переходные функции зависят не только от текущего *состояния* процесса, но также и от текущего *распределения* процесса. Эти процессы были введены Г. П. Маккином [12] в связи с некоторыми задачами статистической механики. В дальнейшем такие процессы изучались в работах ряда авторов, упомянем здесь монографии В. Н. Колокольцова [11] и А. С. Шнитмана [16]. Нелинейные процессы возникают естественным образом при изучении предельного поведения большого числа слабо взаимодействующих друг с другом марковских процессов [5], [7], [17] и имеют приложения в различных областях физики и математики (см., например, [6] и ссылки там же).

Как показано в [15] на примере нелинейного случайного блуждания, изучаемый класс процессов может обладать необычными эргодическими свойствами. Так, неразложимая нелинейная марковская цепь может иметь бесконечное число инвариантных мер, что невозможно в случае классических однородных марковских цепей (см. [13, предложение 10.1.1 и теорема 10.4.9]).

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; Technion — Israel Institute of Technology, Haifa, 32000, Israel; e-mail: oleg.butkovskiy@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00612-а), Israel Science Foundation Grant 497/10 и стипендии Техниона.

Данная статья расширяет предыдущую статью автора [1] и состоит из двух частей. В первой из них исследуются эргодические свойства нелинейных марковских цепей. Устанавливаются достаточные условия для существования и единственности стационарной меры, а также равномерной эргодичности нелинейного марковского процесса. Эти условия носят оптимальный характер. Интересно отметить, что, в отличие от марковского случая, положительность элементов матрицы переходных (за один шаг) вероятностей недостаточна даже для слабой сходимости к инвариантной мере, см. далее пример 2.1.

Вторая часть статьи посвящена стохастическим уравнениям Власова–Маккина (УВМ), т.е. стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ), в которых коэффициенты сноса и диффузии могут зависеть от текущего распределения процесса. Для изучения сходимости маргинальных распределений их сильных решений к инвариантной мере обычно переходят к связанному с УВМ нелинейному уравнению в частных производных, либо рассматривают предел среднего поля. Применение данных методов в [5] и [7] позволило получить оценки скорости сходимости маргинальных распределений сильных решений УВМ к инвариантной мере в метрике Васерштейна. Для исследования сходимости в метрике полной вариации (являющейся более сильной) нами предложен новый метод, основанный на идеях М. Хайрера и Дж. Маттингли [9].

2. Сходимость нелинейных марковских цепей. Мы будем предполагать, что все случайные объекты рассматриваются на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$ и определим $\mathbf{P}(E)$ как множество вероятностных мер на этом пространстве. Пусть $X = (X_n^\mu)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ — это нелинейный марковский процесс с пространством состояний $(E, \mathcal{E})$, начальным распределением $\text{Law}(X_0^\mu) = \mu$, $\mu \in \mathbf{P}(E)$, и переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(X_{n+1}^\mu \in B \mid X_n^\mu = x) = P_{\mu_n}(x, B),$$

где $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbf{Z}_+$ и $\mu_n := \text{Law}(X_n^\mu)$. Далее $\text{Law}_{\mathbf{Q}}(\xi)$ обозначает распределение случайной величины ξ , когда на $(\Omega, \mathcal{F})$ рассматривается мера $\mathbf{Q}$. В случае $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ индекс опускается.

Отметим, что если функция $P_\nu(x, B)$ не зависит от меры ν , то процесс X является марковским (в этом случае переходную вероятность процесса X будем обозначать $P(x, B)$, опуская аргумент ν). Переходную вероятность за m шагов, где $m \in \mathbf{Z}_+$, будем обозначать $P_\nu^m(x, B)$.

Для вероятностных мер $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$ и измеримой функции $f: E \rightarrow [0, \infty)$ определим взвешенное расстояние в метрике полной вариации

$$d_f(\mu, \nu) := \sup_{g: |g| \leq f} \int_E g(x)(\mu(dx) - \nu(dx)).$$

В частности, если функция f тождественно равна 1, то взвешенное расстояние в метрике полной вариации совпадает с обычным расстоянием в метрике полной вариации, которое мы будем обозначать d_{TV} .

Для переходного ядра $Q: E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$, измеримой функции $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$ и вероятностной меры $\nu \in \mathbf{P}(E)$ положим

$$Q\varphi(x) := \int_E \varphi(t) Q(x, dt), \quad Q\nu(dx) := \int_E Q(t, dx) \nu(dt), \quad \nu(\varphi) := \int_E \varphi(t) \nu(dt).$$

Будем говорить, что ядро Q удовлетворяет *локальному условию Добрушина* на множестве $A \subset E$, если существует $\alpha > 0$ такое, что для любых $x, y \in A$

$$d_{\text{TV}}(Q(x, \cdot), Q(y, \cdot)) \leq 2(1 - \alpha). \quad (2.1)$$

Если переходное ядро Q удовлетворяет локальному условию Добрушина на всем пространстве E , то будем говорить, что Q удовлетворяет *глобальному условию Добрушина*.

Напомним (см., например, [13, с. 393]), что процесс X называется *равномерно эргодическим*, если у него существует стационарное распределение π и для некоторых констант $C > 0$, $\theta > 0$ и всех $n \in \mathbf{Z}_+$ выполнено соотношение

$$\sup_{\mu \in \mathbf{P}(E)} d_{\text{TV}}(\mu_n, \pi) \leq C e^{-\theta n}.$$

Если процесс X — марковский, то глобальное условие Добрушина является достаточным для существования и единственности стационарной меры, а также равномерной эргодичности процесса ([3]). Кроме того, для произвольных $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$ это условие гарантирует экспоненциальную скорость сходимости:

$$d_{\text{TV}}(\mu_n, \nu_n) \leq 2(1 - \alpha)^n, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (2.2)$$

Естественным аналогом глобального условия Добрушина для нелинейных марковских процессов является следующее условие: существует $\alpha > 0$ такое, что для любых $x, y \in E$

$$\sup_{\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)} d_{\text{TV}}(P_\mu(x, \cdot), P_\nu(y, \cdot)) \leq 2(1 - \alpha). \quad (2.3)$$

Однако оказывается, что, в отличие от марковского случая, при любом $0 < \alpha < 1$ данное условие может быть недостаточным даже для слабой сходимости μ_n к стационарной мере. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.1. Пусть X — это нелинейная марковская цепь, принимающая значения в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E}) = (\{1, 2\}, 2^{\{1, 2\}})$. Предположим, что матрица переходных (за один шаг) вероятностей имеет вид

$$P_\nu = \begin{pmatrix} \left(\nu(\{2\}) \wedge \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right) \vee \frac{\gamma}{2} & \left(\nu(\{1\}) \wedge \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right) \vee \frac{\gamma}{2} \\ \left(\nu(\{2\}) \wedge \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right) \vee \frac{\gamma}{2} & \left(\nu(\{1\}) \wedge \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right) \vee \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix},$$

где $\gamma \in (0, 1)$. Здесь, как обычно, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ и $a \vee b = \max\{a, b\}$ для $a, b \in \mathbf{R}$. Ясно, что данная марковская цепь удовлетворяет условию (2.3) с $\alpha = \gamma$ и имеет стационарное распределение $\pi = (\delta_1 + \delta_2)/2$. Здесь и далее δ_x , где $x \in E$, обозначает дельта-меру, сосредоточенную в точке x . С другой стороны, при любом $a \in [\gamma/2, 1 - \gamma/2]$, $a \neq 1/2$, и начальном распределении $\mu_0(a) := a\delta_1 + (1 - a)\delta_2$ мера $\mu_n = \mu_n(a)$ не сходится к π при $n \rightarrow \infty$. Действительно, если n — четное, то $\mu_n(a) = a\delta_1 + (1 - a)\delta_2$, в то время как для нечетных n мы имеем $\mu_n(a) = (1 - a)\delta_1 + a\delta_2$.

Итак, для нелинейных процессов глобальное условие Добрушина не гарантирует равномерную эргодичность (и, более того, не гарантирует даже существование инвариантной меры, как демонстрируется далее). Покажем теперь, как можно дополнить это условие оптимальным образом так, чтобы новое условие уже являлось достаточным для равномерной эргодичности.

Теорема 2.1. Пусть процесс X удовлетворяет условию (2.3) для некоторого $\alpha > 0$.

(i) Если при этом существует $\lambda \in [0, \alpha]$ такое, что для $x \in E$ и $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$ выполнено неравенство

$$d_{\text{TV}}(P_\mu(x, \cdot), P_\nu(x, \cdot)) \leq \lambda d_{\text{TV}}(\mu, \nu), \quad (2.4)$$

то у процесса X существует единственная инвариантная мера π . Кроме того, если $\lambda < \alpha$, то

$$d_{\text{TV}}(\mu_n, \pi) \leq 2(1 - (\alpha - \lambda))^n, \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad (2.5)$$

а в случае $\lambda = \alpha$ имеем

$$d_{\text{TV}}(\mu_n, \pi) \leq \frac{2}{\lambda n}, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (2.6)$$

(ii) Ограничение $\lambda \in [0, \alpha]$ в условии (2.4) является оптимальным. А именно, для любых $0 < \alpha < \lambda \leq 1$ найдутся процессы $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$, $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ и $Z = (Z_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$, удовлетворяющие условиям (2.3) и (2.4), а также мера $\mu \in \mathbf{P}(E)$, для которых верны следующие утверждения: процесс X имеет более одной стационарной меры, процесс Y не имеет ни одной стационарной меры, $d_{TV}(Z_n^\mu, \pi) \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.1 содержится в п. 4.

З а м е ч а н и е 2.1. Если процесс X является марковским, то условие (2.3) совпадает с условием (2.1), а условие (2.4) выполнено автоматически, если выбрать $\lambda = 0$. При этом скорость сходимости, описываемая формулой (2.5), совпадает с соответствующей скоростью сходимости для марковских процессов, как показывает (2.2). Таким образом, теорема 2.1 расширяет классический результат Добрушина [3].

Перейдем теперь к изучению нелинейных процессов, которые не удовлетворяют глобальному условию Добрушина, но удовлетворяют локальному условию Добрушина на некотором «хорошем» множестве.

3. Уравнение Власова–Маккина с малым возмущением. Рассмотрим многомерное уравнение Власова–Маккина

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, \mu_s) ds + W_t, & t \geq 0, \\ \text{Law}(X_t) = \mu_t, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $b: \mathbf{R}^d \times \mathbf{P}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}^d$, W — это d -мерное броуновское движение, а начальное условие X_0 — это d -мерный вектор, не зависящий от W .

Будем говорить, что функция $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ удовлетворяет условию Веретенникова–Хасьминского, если найдутся такие постоянные $M > 0$, $r > 0$, что

$$\langle h(x), x \rangle \leq -r|x|, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad |x| \geq M. \quad (3.2)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

Напомним, что если коэффициент сноса b не зависит от меры μ (и удовлетворяет определенным условиям), то уравнение (3.1) является стохастическим дифференциальным уравнением, а его сильное решение — марковским процессом. Эргодические свойства этого марковского процесса изучались в работах многих авторов. Как показано в [2], если функция b удовлетворяет неравенству (3.2), то сильное решение данного уравнения имеет единственную инвариантную меру. При этом $\text{Law}(X_t)$ экспоненциально сходится к этой мере в метрике полной вариации при $t \rightarrow \infty$.

Распространим этот результат на случай уравнения Власова–Маккина. Будем предполагать, что снос b состоит из двух частей: не зависящей от меры функции b_1 и небольшого нелинейного возмущения b_2 , т.е.

$$b(x, \mu) = b_\varepsilon(x, \mu) = b_1(x) + \varepsilon b_2(x, \mu), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \mu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d), \quad (3.3)$$

где $\varepsilon > 0$. Пусть также функции b_1 и b_2 являются липшицевыми, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что

$$|b_1(x) - b_1(y)| + |b_2(x, \mu) - b_2(y, \nu)| \leq L(|x - y| + \rho_1(\mu, \nu)), \quad (3.4)$$

$x, y \in \mathbf{R}^d$, $\mu, \nu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$, где $\rho_1(\mu, \nu)$ — это расстояние в метрике Васерштейна между мерами μ и ν , определяемое формулой

$$\rho_1(\mu, \nu) := \inf_{\lambda \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} (|x - y| \wedge 1) \lambda(dx, dy).$$

Здесь $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ — это множество вероятностных мер на $(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ с проекциями μ и ν .

Как показано в [10, предложение 1.2], при данных ограничениях для каждого $\varepsilon \geq 0$ уравнение (3.1) имеет единственное сильное решение $(X_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$. Отметим, что если

известно начальное распределение $\mu = \mu_0^\varepsilon$ (а значит, и распределение μ_t^ε), то процесс $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ является неоднородным марковским процессом. Мы будем обозначать $P_\mu^\varepsilon(x, A) := P_{0,x}(X_t^\varepsilon \in A)$ для $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. По определению имеем $\mu_t^\varepsilon = P_\mu^\varepsilon(\varepsilon)\mu$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (3.3), (3.4) и, кроме того,

- 1) функция b_1 удовлетворяет условию (3.2);
- 2) функция b_2 равномерно ограничена, т.е. $|b_2(x, \mu)| \leq D$ для некоторого $D > 0$, любых $x \in \mathbf{R}^d$ и $\mu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$.

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ уравнение Власова–Маккина (3.1) имеет единственную инвариантную меру π^ε . При этом для любой меры $\mu_0 \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ такой, что $I(\mu_0) := \int_{\mathbf{R}^d} e^x \mu_0(dx) < \infty$, имеет место оценка

$$d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \leq C(1 + I(\mu_0))e^{-\theta t}, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

для некоторых положительных $C = C(\varepsilon)$ и $\theta = \theta(\varepsilon)$.

Таким образом, теорема 3.1 показывает, что при малом возмущении сноса, удовлетворяющего условию Веретенникова–Хасьминского, эргодические свойства сильных решений стохастического уравнения Власова–Маккина сохраняются. Доказательство теоремы 3.1 приведено далее в п. 4.

Отметим также, что для $\varepsilon > 0$ дискретизованный процесс $(X_{Tn}^\varepsilon)_{n \in \mathbf{Z}_+}$, где $T > 0$, является нелинейной марковской цепью. Однако он удовлетворяет условию (2.3) только на некотором подмножестве $\mathbf{R}^d$ (например, на любом компакте), но не на всем $\mathbf{R}^d$. Поэтому теорема 2.1 не может быть применена непосредственно. Для доказательства теоремы 3.1 потребовалось развить технику Хайрера–Маттингли [8], [9] построения вспомогательных сжимающих отображений.

4. Доказательства.

Доказательство теоремы 2.1. (i) Прежде всего заметим, что для любых вероятностных мер $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$ имеет место следующая оценка:

$$d_{TV}(P_\mu \mu, P_\nu \nu) \leq d_{TV}(\mu, \nu)(1 - \alpha + \lambda) - \frac{1}{2} \lambda d_{TV}(\mu, \nu)^2. \quad (4.1)$$

Действительно, если $d_{TV}(\mu, \nu) = 0$, то $\mu = \nu$, и неравенство (4.1) тривиально. В противном случае возьмем $\eta(dx) := (d\mu/d\nu \wedge 1) \nu(dx)$, где $d\mu/d\nu$ обозначает производную Радона–Никодима абсолютно непрерывной части μ относительно ν . Тогда

$$d_{TV}(P_\mu \mu, P_\nu \nu) \leq d_{TV}(P_\mu \eta, P_\nu \eta) + d_{TV}(P_\mu(\mu - \eta), P_\nu(\nu - \eta)). \quad (4.2)$$

Применяя неравенство (2.4), получим

$$d_{TV}(P_\mu \eta, P_\nu \eta) \leq 2 \int_{E \times E} |P_\mu(x, dt) - P_\nu(x, dt)| \eta(dx) \leq \lambda d_{TV}(\mu, \nu) \left(1 - \frac{1}{2} d_{TV}(\mu, \nu)\right), \quad (4.3)$$

где мы также учли, что $\eta(E) = 1 - d_{TV}(\mu, \nu)/2$. Кроме того, как следует из (2.3),

$$\begin{aligned} d_{TV}(P_\mu(\mu - \eta), P_\nu(\nu - \eta)) &= 2 \int_E \left| \int_E P_\mu(x, dt)(\mu - \eta)(dx) - \int_E P_\nu(y, dt)(\nu - \eta)(dy) \right| \\ &\leq \frac{4}{d_{TV}(\mu, \nu)} \int_{E^3} |P_\mu(x, dt) - P_\nu(y, dt)| (\mu - \eta)(dx) (\nu - \eta)(dy) \leq (1 - \alpha) d_{TV}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Сочетая данное неравенство с (4.2) и (4.3), приходим к (4.1).

Итерируя n раз оценку (4.1), находим, что в случае $\lambda < \alpha$

$$d_{TV}(P_\mu^n \mu, P_\nu^n \nu) \leq 2(1 - \alpha + \lambda)^n, \quad (4.4)$$

а при $\lambda = \alpha$

$$d_{TV}(P_\mu^n \mu, P_\nu^n \nu) \leq \frac{2}{\lambda n}. \quad (4.5)$$

Покажем теперь, что процесс X имеет инвариантную меру. Рассмотрим последовательность мер $(\mu_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ и проверим, что данная последовательность является последовательностью Коши в метрическом пространстве $(\mathbf{P}(E), d_{TV})$. В силу (4.4) и (4.5) для любых $m, n \in \mathbf{N}$ имеем $d_{TV}(\mu_n, \mu_{n+m}) = d_{TV}(P_{\mu_0}^n \mu_0, P_{\mu_m}^n \mu_m) \leq 2/(\lambda n)$. Так как пространство $(\mathbf{P}(E), d_{TV})$ полно, то найдется вероятностная мера $\pi \in \mathbf{P}(E)$ такая, что $d_{TV}(\mu_n, \pi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу (4.1) для любого натурального n

$$\begin{aligned} d_{TV}(P_\pi \pi, \pi) &\leq d_{TV}(P_\pi \pi, \mu_{n+1}) + d_{TV}(\mu_{n+1}, \pi) = d_{TV}(P_\pi \pi, P_{\mu_n} \mu_n) + d_{TV}(\mu_{n+1}, \pi) \\ &\leq d_{TV}(\pi, \mu_n) + d_{TV}(\pi, \mu_{n+1}). \end{aligned}$$

Правая часть данного неравенства стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $P_\pi \pi = \pi$. Это означает, что мера π инвариантна. Единственность инвариантной меры следует из неравенства (4.1). Действительно, если мера ζ также инвариантна для процесса X и $\pi \neq \zeta$, то $d_{TV}(\pi, \zeta) = d_{TV}(P_\pi \pi, P_\zeta \zeta) < d_{TV}(\pi, \zeta)$, что невозможно.

Подставляя $\nu = \pi$ в (4.4) и (4.5), убеждаемся в справедливости (2.5) и (2.6).

(ii) Покажем теперь оптимальность условия $\lambda \leq \alpha$. Предположим, что это условие не выполнено, и пусть $0 < \alpha < \lambda \leq 1$. Приведем пример процесса, имеющего более одной стационарной меры.

Рассмотрим нелинейную марковскую цепь X с пространством состояний $E = \{1, 2\}$, σ -алгеброй $\mathcal{E} = 2^E$ и матрицей переходных вероятностей

$$P_\nu = \begin{pmatrix} ((1 - \lambda\nu(\{2\})) \wedge (1 - \frac{\alpha}{2})) \vee (1 - \lambda + \frac{\alpha}{2}) & (\lambda\nu(\{2\}) \wedge (\lambda - \frac{\alpha}{2})) \vee \frac{\alpha}{2} \\ (\lambda\nu(\{1\}) \wedge (\lambda - \frac{\alpha}{2})) \vee \frac{\alpha}{2} & ((1 - \lambda\nu(\{1\})) \wedge (1 - \frac{\alpha}{2})) \vee (1 - \lambda + \frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}.$$

Проверим, что процесс X удовлетворяет условиям (2.3) и (2.4). Для любых $i, j \in E$ и $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$ имеем $P_\mu(i, j) \geq \alpha/2$. Поэтому

$$P_\mu(i, 1) \wedge P_\nu(j, 1) + P_\mu(i, 2) \wedge P_\nu(j, 2) \geq \alpha,$$

и условие (2.3) выполнено. Аналогично, для любых $i \in E$, $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$

$$\left| P_\mu(i, 1) - P_\nu(i, 1) \right| + \left| P_\mu(i, 2) - P_\nu(i, 2) \right| \leq \lambda d_{TV}(\mu, \nu),$$

и условие (2.4) также выполнено.

С другой стороны, при любом $a \in [\alpha/(2\lambda), 1 - \alpha/(2\lambda)]$ мера $\mu(a) := a\delta_1 + (1 - a)\delta_2$ является стационарной. Таким образом, данный процесс имеет более одной стационарной меры (континуум стационарных мер). Кроме того, $d_{TV}(X_n^{\mu(a_1)}, X_n^{\mu(a_2)}) \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для a_1 и a_2 , лежащих в указанном выше интервале и таких, что $a_1 \neq a_2$.

Теперь приведем пример процесса, не имеющего ни одной стационарной меры. Для этого необходимо рассматривать процессы со значениями в бесконечном пространстве состояний, поскольку процесс с конечным пространством состояний, удовлетворяющий условиям (2.3) и (2.4), всегда имеет инвариантную меру по теореме Брауэра о неподвижной точке.

Определим переходные вероятности $P_\nu(i, j)$, $i, j \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$, следующим образом: $P_\nu(i, 1) := (\lambda\nu(\{1\})) \vee \alpha$ и

$$P_\nu(i, j) := \left((\lambda\nu(\{1, 2, \dots, j\}) - \alpha) \wedge \lambda\nu(\{j\}) \right) \vee 0 + (1 - \lambda)I(j = i + 1), \quad j \neq 1.$$

Прежде всего, покажем, что переходные вероятности определены корректно, т.е. их сумма в каждой строке равна 1. Зафиксируем $\nu \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$. Так как $\lambda > \alpha$, то существует натуральное $n = n(\nu)$ такое, что $\lambda\nu(\{1, 2, \dots, n\}) \geq \alpha$ и $\lambda\nu(\{1, 2, \dots, n-1\}) < \alpha$.

Если $n = 1$, то $P_\nu(i, j) = \lambda\nu(\{j\}) + (1 - \lambda)I(j = i + 1)$ для всех $i, j \in \mathbf{N}$, и сумма переходных вероятностей по j , очевидно, равна 1. Если $n > 1$, то для любого $i \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} P_\nu(i, 1) &= \alpha, \\ P_\nu(i, j) &= (1 - \lambda)I(j = i + 1) \quad \text{при } 1 < j < n, \\ P_\nu(i, n) &= \lambda\nu(\{1, 2, \dots, n\}) - \alpha + (1 - \lambda)I(n = i + 1), \\ P_\nu(i, j) &= \lambda\nu(\{j\}) + (1 - \lambda)I(j = i + 1) \quad \text{при } j > n. \end{aligned}$$

Поэтому и в этом случае $\sum_{j=1}^{\infty} P_\nu(i, j) = 1$.

Так как $P_\nu(i, 1) \geq \alpha$ для любого натурального i и любой меры $\nu \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$, то процесс X удовлетворяет условию (2.3). Проверим теперь, что условие (2.4) также выполнено. Зафиксируем $i \in \mathbf{N}$ и меры $\mu, \nu \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$. Тогда левая часть неравенства (2.4) равна $\sum_{j=1}^{\infty} |P_\nu(i, j) - P_\mu(i, j)|$. Определим $n(\nu)$, $n(\mu)$ так же, как и выше. Без ограничения общности предположим, что $n(\nu) \geq n(\mu)$. Если при этом $n(\nu) > n(\mu)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |P_\nu(i, j) - P_\mu(i, j)| &= \lambda\mu(\{1, \dots, n(\mu)\}) - \alpha + \sum_{j=n(\mu)+1}^{n(\nu)-1} \lambda\mu(\{j\}) \\ &+ \left| \lambda\nu(\{1, \dots, n(\nu)\}) - \alpha - \lambda\mu(\{n(\nu)\}) \right| + \lambda \sum_{j=n(\nu)+1}^{\infty} \left| \mu(\{j\}) - \nu(\{j\}) \right|. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Из определения $n(\nu)$ следует, что $\alpha - \lambda\nu(\{1, \dots, n(\nu) - 1\}) > 0$. Поэтому

$$\left| \lambda\nu(\{1, \dots, n(\nu)\}) - \alpha - \lambda\mu(\{n(\nu)\}) \right| \leq \alpha - \lambda\nu(\{1, \dots, n(\nu) - 1\}) + \lambda \left| \nu(\{n(\nu)\}) - \mu(\{n(\nu)\}) \right|.$$

Это неравенство с учетом (4.6) влечет

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |P_\nu(i, j) - P_\mu(i, j)| &\leq \lambda \left(\mu(\{1, \dots, n(\nu) - 1\}) - \nu(\{1, \dots, n(\nu) - 1\}) \right) \\ &+ \lambda \sum_{j=n(\nu)}^{\infty} \left| \mu(\{j\}) - \nu(\{j\}) \right| \leq \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \left| \mu(\{j\}) - \nu(\{j\}) \right| = \lambda d_{\text{TV}}(\mu, \nu), \end{aligned}$$

и условие (2.4) выполнено. Если же $n(\nu) = n(\mu)$, то аналогично находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |P_\nu(i, j) - P_\mu(i, j)| &= \lambda \left| \nu(\{1, \dots, n(\nu)\}) - \mu(\{1, \dots, n(\nu)\}) \right| \\ &+ \lambda \sum_{j=n(\nu)+1}^{\infty} \left| \mu(\{j\}) - \nu(\{j\}) \right| \leq \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \left| \mu(\{j\}) - \nu(\{j\}) \right| = \lambda d_{\text{TV}}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что процесс X не имеет ни одной стационарной меры. Предположим противное. Пусть мера $\mu \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$ стационарна. Тогда для любого $j \in \mathbf{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{i\}) P_\mu(i, j) = \mu(\{j\}). \quad (4.7)$$

Заметим, что если $\mu(\{1\}) \geq \alpha/\lambda$, то (4.7) влечет $\mu(\{1\}) = 0$. Поэтому $\mu(\{1\}) < \alpha/\lambda$, и, следовательно, $\mu(\{1\}) = \alpha$. Определим $n(\mu)$ так же, как и выше. Из определения $n(\mu)$ вытекает, что $\mu(\{n(\mu)\}) > 0$. С другой стороны, с помощью (4.7) находим, что

$$\begin{aligned} \mu(\{i\}) &= \alpha(1 - \lambda)^{i-1} \quad \text{при } 1 \leq i < n(\mu), \\ \mu(\{n(\mu)\}) &= \alpha(1 - \lambda)^{n(\mu)-1} + \lambda\mu(\{1, \dots, n(\mu)\}) - \alpha, \end{aligned}$$

откуда $\mu(\{n(\mu)\}) = 0$. Это противоречие показывает, что у процесса X нет стационарных мер. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1. Для этого воспользуемся следующей леммой, принадлежащей М. Хайеру и Дж. Маттингли.

Лемма 4.1 ([8, теорема 3.9], см. также [9]). Пусть на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$ задано марковское переходное ядро Q . Предположим, что для некоторой функции $V: E \rightarrow \mathbf{R}_+$ и постоянных $K \geq 0$, $\gamma \in [0, 1)$ имеет место неравенство

$$QV \leq \gamma V + K. \quad (4.8)$$

Пусть, кроме того, Q удовлетворяет локальному условию Добрушина (2.1) на множестве $\{x \in E: V(x) \leq 4K/(1-\gamma)\}$. Тогда найдутся постоянные $\lambda \in [0, 1)$ и $\beta > 0$, зависящие только от постоянной α в неравенстве (2.1), γ и K (но не от ядра Q), такие, что

$$d_{1+\beta V}(Q\mu, Q\nu) \leq \lambda d_{1+\beta V}(\mu, \nu)$$

для любых $\mu, \nu \in \mathbf{P}(E)$.

Введем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $V: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$ такую, что $V(x) = e^{|x|(r/4 \wedge 1)}$ при $|x| \geq M$. Проверим, что для некоторого $T > 0$ и малых ε переходные ядра $P_\mu^T(\varepsilon)$, $\mu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$, удовлетворяют условиям (2.1) и (4.8).

Лемма 4.2. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Тогда существуют $T > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$, $K > 0$ и $\gamma \in [0, 1)$ такие, что

$$P_\mu^T(\varepsilon)V \leq \gamma V + K, \quad (4.9)$$

$$P_\mu^T(\varepsilon)V^2 \leq \gamma^2 V^2 + K^2, \quad (4.10)$$

$$d_{\text{TV}}(P_\mu^T(\varepsilon)\delta_x, P_\mu^T(\varepsilon)\delta_y) \leq 2(1-\alpha), \quad x, y \in S_V, \quad (4.11)$$

для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и любой меры $\mu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$. Здесь $S_V := \{x \in \mathbf{R}^d: V(x) \leq 4K/(1-\gamma)\}$. Кроме того, для произвольной меры $\mu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ справедлива оценка

$$(P_\mu^t(\varepsilon)\mu)(V) \leq \mu(V) + K, \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$

Доказательство. Вначале убедимся в справедливости второго неравенства. Обозначим $G(x) := V^2(x)$ и введем $\kappa := (r/4) \wedge 1$. Из определения функции V следует, что $G(x) = \exp(2\kappa|x|)$ при $|x| \geq M$. Зафиксируем меру μ и рассмотрим процесс $Z^\varepsilon = (Z_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, являющийся сильным решением СДУ

$$dZ_t^\varepsilon = b_\varepsilon(Z_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon) dt + dW_t, \quad Z_0^\varepsilon = x, \quad (4.13)$$

где $(X_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ — это решение уравнения (3.1) с начальным распределением $\mu_0^\varepsilon = \mu$. Отметим, что сильное решение уравнения (4.13) существует и единственно по теореме Ито. Из определения процесса Z^ε следует, что $P_\mu^t(\varepsilon)G(x) = \mathbf{E}_x G(Z_t^\varepsilon)$, $x \in \mathbf{R}^d$. Применим формулу Ито к функции $e^{\theta t} G(Z_t^\varepsilon)$, $\theta \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} & e^{\theta t} \mathbf{E}_x G(Z_t^\varepsilon) - G(x) \\ & \leq \mathbf{E}_x \int_0^t e^{\theta s} I(|Z_s^\varepsilon| \geq M) G(Z_s^\varepsilon) \left(\theta + 2\kappa^2 + 2\kappa \langle Z_s^\varepsilon, b_\varepsilon(Z_s^\varepsilon, \mu_s^\varepsilon) \rangle |Z_s^\varepsilon|^{-1} \right) ds + C e^{\theta t} \\ & \leq (\theta + 2\kappa^2 - 2\kappa(r - \varepsilon D)) \mathbf{E}_x \int_0^t e^{\theta s} I(|Z_s^\varepsilon| \geq M) G(Z_s^\varepsilon) ds + C e^{\theta t}, \end{aligned}$$

где $C = C(\theta) > 0$. Здесь во втором неравенстве мы воспользовались ограниченностью функции b_2 и условием (3.2). Полагая $\theta = 2\kappa(r - \varepsilon D - \kappa)$, получим

$$P_\mu^t(\varepsilon)G(x) = \mathbf{E}_x G(Z_t^\varepsilon) \leq e^{-\kappa t r/2} G(x) + K^2, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{r}{2D},$$

где $K = C(\theta)^{1/2}$. Это влечет (4.10). Отсюда с помощью неравенства Йенсена имеем

$$P_\mu^t(\varepsilon)V(x) \leq (P_\mu^t(\varepsilon)V^2(x))^{1/2} \leq (e^{-\kappa t r/2} V^2(x) + K^2)^{1/2} \leq e^{-\kappa t r/4} V(x) + K \quad (4.14)$$

для любого $0 \leq \varepsilon \leq r/(2D)$, что доказывает (4.9).

Положим $\gamma = \exp(-\kappa r/4)$.

Для доказательства неравенства (4.11) рассмотрим СДУ

$$dY_t^{(x)} = b_1(Y_t^{(x)}) dt + dW_t, \quad Y_0^{(x)} = x. \quad (4.15)$$

Из неравенства Харнака для диффузионных процессов с линейно растущим сносом [18, теорема 1.1(2)] следует, что сильное решение уравнения (4.15) удовлетворяет локальному условию Добрушина на любом компакте в $\mathbf{R}^d$, т.е. для любого $t > 0$ и любого $R > 0$ найдется $\alpha = \alpha(R, t) > 0$ такое, что

$$d_{\text{TV}}(\text{Law}(Y_t^{(x)}), \text{Law}(Y_t^{(y)})) \leq 2(1 - \alpha(R, t)), \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R.$$

Выбирая достаточно большое R , для которого $S_V \subset \{|x| \leq R\}$, получим

$$\begin{aligned} d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x, P_\mu^t(\varepsilon)\delta_y) \\ \leq d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x, \text{Law}(Y_t^{(x)})) + d_{\text{TV}}(\text{Law}(Y_t^{(x)}), \text{Law}(Y_t^{(y)})) + d_{\text{TV}}(\text{Law}(Y_t^{(y)}), P_\mu^t(\varepsilon)\delta_y) \\ \leq d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x, \text{Law}(Y_t^{(x)})) + d_{\text{TV}}(\text{Law}(Y_t^{(y)}), P_\mu^t(\varepsilon)\delta_y) + 2(1 - \alpha(R, t)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

при любых $x, y \in S_V$, $t > 0$.

Заметим, что $P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x = \text{Law}(Z_t^\varepsilon)$, и введем вероятностную меру $\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ соотношением

$$\frac{d\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}{d\mathbf{P}} := \exp\left(\varepsilon \int_0^t b_2(Y_s^{(x)}, \mu_s^\varepsilon) dW_s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t |b_2(Y_s^{(x)}, \mu_s^\varepsilon)|^2 ds\right). \quad (4.17)$$

Так как функция b_2 ограничена, то такая вероятностная мера существует. По теореме Гирсанова процесс

$$W_s^{\varepsilon, \mu} := W_s - \varepsilon \int_0^s b_2(Y_u^{(x)}, \mu_u^\varepsilon) du, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (4.18)$$

является d -мерным броуновским движением относительно меры $\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}$. Следовательно, $dY_t^{(x)} = b_\varepsilon(Y_t^{(x)}, \mu_t^\varepsilon) dt + dW_t^{\varepsilon, \mu}$ и, значит, $\text{Law}_{\mathbf{P}}(Z_t^\varepsilon) = \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_t^{(x)})$ в силу (4.13). Используя неравенство Пинскера [4], находим

$$\begin{aligned} d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x, \text{Law}_{\mathbf{P}}(Y_t^{(x)})) &= d_{\text{TV}}(\text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_t^{(x)}), \text{Law}_{\mathbf{P}}(Y_t^{(x)})) \leq d_{\text{TV}}(\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}, \mathbf{P}) \\ &\leq \sqrt{2\mathbf{E} \ln \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}} \leq \varepsilon D \sqrt{t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_y, \text{Law}_{\mathbf{P}}(Y_t^{(y)})) \leq \varepsilon D \sqrt{t}$. Таким образом, с помощью (4.16) окончательно получаем

$$d_{\text{TV}}(P_\mu^t(\varepsilon)\delta_x, P_\mu^t(\varepsilon)\delta_y) \leq 2(1 - \alpha(R, t)) + 2\varepsilon D \sqrt{t}, \quad x, y \in S_V, \quad t > 0.$$

Выбирая $T = 1$ и

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha(R, 1)}{2D} \wedge \frac{r}{2D},$$

убеждаемся в справедливости (4.9)–(4.11).

Наконец, оценка (4.12) следует из (4.14):

$$(P_\mu^t(\varepsilon)\mu)(V) = \int_E V(x) (P_\mu^t(\varepsilon)\mu)(dx) = \int_E P_\mu^t(\varepsilon)V(x) \mu(dx) \leq \mu(V) + K.$$

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Пусть для некоторого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ мера $\pi \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ инвариантна для нелинейного оператора $P_\bullet^T(\varepsilon)_\bullet$, т.е. $P_\pi^T(\varepsilon)\pi = \pi$, где T и ε_0 фигурируют в лемме 4.2. Тогда $\pi(V) \leq K$, причем постоянная K та же, что в лемме 4.2.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную постоянную $S > 0$. Так как мера π инвариантна, то $P_\pi^n(\varepsilon)\pi = \pi$ для любого натурального n . Поэтому с помощью неравенства (4.14) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} (V(x) \wedge S) \pi(dx) &= \int_{\mathbf{R}^d} P_\pi^{nT}(\varepsilon)(V(x) \wedge S) \pi(dx) \leq \int_{\mathbf{R}^d} (P_\pi^{nT}(\varepsilon)V(x) \wedge S) \pi(dx) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} ((e^{-\kappa n T r/4} V(x) + K) \wedge S) \pi(dx) \leq K + \int_{\mathbf{R}^d} (e^{-\kappa n T r/4} V(x) \wedge S) \pi(dx), \end{aligned}$$

где $\kappa = r/4 \wedge 1$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл в правой части данного неравенства стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\int_{\mathbf{R}^d} (V(x) \wedge S) \pi(dx) \leq K$. Переходя к пределу при $S \rightarrow \infty$, по теореме Фату имеем $\pi(V) \leq K$. Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Пусть $(X_t^{\varepsilon, \mu}, \mu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ и $(X_t^{\varepsilon, \nu}, \nu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ — это сильные решения уравнения (3.1) с начальными условиями, распределенными соответственно как μ_0 и ν_0 . Тогда*

$$d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon) \leq \sqrt{2} d_{TV}(\mu_0, \nu_0) e^{4\varepsilon^2 L^2 t}, \quad t \geq 0. \quad (4.19)$$

Доказательство. Как и при установлении теоремы 2.1, рассмотрим меру $\eta(dx) := (d\mu_0/d\nu_0 \wedge 1) \nu_0(dx)$, где $d\mu_0/d\nu_0$ обозначает производную Радона–Никодима абсолютно непрерывной части μ_0 относительно ν_0 . Тогда

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon) &= d_{TV}(P_{\mu_0}^t(\varepsilon)\mu_0, P_{\nu_0}^t(\varepsilon)\nu_0) \\ &\leq d_{TV}(P_{\mu_0}^t(\varepsilon)\eta, P_{\nu_0}^t(\varepsilon)\eta) + d_{TV}(P_{\mu_0}^t(\varepsilon)(\mu_0 - \eta), P_{\nu_0}^t(\varepsilon)(\nu_0 - \eta)) \\ &\leq (2 - d_{TV}(\mu_0, \nu_0)) \sup_{x \in \mathbf{R}^d} d_{TV}(P_{\mu_0}^t(\varepsilon)\delta_x, P_{\nu_0}^t(\varepsilon)\delta_x) + d_{TV}(\mu_0, \nu_0), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где в последнем неравенстве мы учли, что $\eta(\mathbf{R}^d) = 1 - d_{TV}(\mu_0, \nu_0)/2$.

Оценим расстояние по вариации, стоящее под знаком супремума, таким же образом, как и при доказательстве леммы 4.2. Зафиксируем $x \in \mathbf{R}^d$ и рассмотрим процесс $(Y_t^{(x)})_{t \geq 0}$ — сильное решение СДУ (4.15). Определим меру $\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ соотношением (4.17) и аналогично введем меру $\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}$ (с соответствующей заменой μ_s^ε на ν_s^ε). По теореме Гирсанова процесс $(W_s^{\varepsilon, \mu})_{0 \leq s \leq t}$, определенный с помощью (4.18), и процесс $(W_s^{\varepsilon, \nu})_{0 \leq s \leq t}$, заданный аналогичным образом, являются соответственно d -мерными броуновскими движениями относительно мер $\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}$ и $\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}$. Как и при доказательстве леммы 4.2, видим, что $P_{\mu_0}^t(\varepsilon)\delta_x = \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_t^{(x)})$ и $P_{\nu_0}^t(\varepsilon)\delta_x = \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}}(Y_t^{(x)})$.

Положим $\rho := d\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}/d\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}$. Используя неравенство Пинскера, мы оцениваем

$$\begin{aligned} d_{TV}(P_{\mu_0}^t(\varepsilon)\delta_x, P_{\nu_0}^t(\varepsilon)\delta_x) &= d_{TV}(\text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_t^{(x)}), \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}}(Y_t^{(x)})) \leq d_{TV}(\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}, \mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}) \\ &\leq \sqrt{2\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}} \ln \rho} = \varepsilon \left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}} \int_0^t \left| b_2(Y_s^{(x)}, \mu_s^\varepsilon) - b_2(Y_s^{(x)}, \nu_s^\varepsilon) \right|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon L \left(\int_0^t \left(d_{TV}(\mu_s^\varepsilon, \nu_s^\varepsilon) \right)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть данного неравенства не зависит от x . Комбинируя данную оценку и (4.20), а также используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, справедливое для всех действительных a и b , получаем

$$(d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon))^2 \leq (2(d_{TV}(\mu_0, \nu_0))^2 + 2\varepsilon^2 L^2 (2 - d_{TV}(\mu_0, \nu_0))^2 \int_0^t (d_{TV}(\mu_s^\varepsilon, \nu_s^\varepsilon))^2 ds.$$

Применяя лемму Гроуолла для функции $\psi(t) := (d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \nu_t^\varepsilon))^2$, убеждаемся в справедливости искомого неравенства (4.19). Лемма 4.4 доказана.

Лемма 4.5. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Пусть $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где постоянная ε_0 — та же, что в лемме 4.2, а $\mu_0, \nu_0, \zeta \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$. Тогда*

$$d_{1+\beta V}(P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\zeta, P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\zeta) \leq C\varepsilon(1+\beta)(1+\zeta(V))d_{1+\beta V}(\mu_0, \nu_0), \quad (4.21)$$

где T фигурирует в лемме 4.2, множитель C зависит только от L, T и ε_0 , а $\beta \geq 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$d_{1+\beta V}(P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\zeta, P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\zeta) \leq \int_{\mathbf{R}^d} d_{1+\beta V}(P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\delta_x, P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\delta_x) \zeta(dx). \quad (4.22)$$

Зафиксируем $x \in \mathbf{R}^d$. Действуя так же, как и при доказательстве леммы 4.4, и используя те же обозначения, убеждаемся в справедливости равенств $P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\delta_x = \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_T^{(x)})$ и $P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\delta_x = \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}}(Y_T^{(x)})$. Поэтому

$$\begin{aligned} d_{1+\beta V}(P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\delta_x, P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\delta_x) &= d_{1+\beta V}(\text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}}(Y_T^{(x)}), \text{Law}_{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}}(Y_T^{(x)})) \\ &= \sup_{f: |f| \leq 1+\beta V} \left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}} f(Y_T^{(x)}) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} f(Y_T^{(x)}) \right) = \sup_{f: |f| \leq 1+\beta V} \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} f(Y_T^{(x)}) (\rho - 1) \\ &\leq \left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} (1 + \beta V(Y_T^{(x)}))^2 \right)^{1/2} \left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} (\rho - 1)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\rho := d\mathbf{P}^{\varepsilon, \mu}/d\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}$. В силу оценки (4.10)

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} (1 + \beta V(Y_T^{(x)}))^2 \leq 2 + 2\beta^2 P_{\nu_0}^T(\varepsilon)V(x)^2 \leq 2\beta^2 \gamma^2 V(x)^2 + 2 + 2\beta^2 K^2. \quad (4.24)$$

Рассуждая аналогично [14], оценим второй множитель в правой части неравенства (4.23). Обозначим $\varphi(s) := b_2(Y_s^{(x)}, \mu_s^\varepsilon) - b_2(Y_s^{(x)}, \nu_s^\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} \rho^2 &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} \exp \left(2\varepsilon \int_0^T \varphi(s) dW_s^{\varepsilon, \nu} - \varepsilon^2 \int_0^T |\varphi(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} \exp \left(6\varepsilon^2 \int_0^T |\varphi(s)|^2 ds \right) \leq \exp \left(6\varepsilon^2 L^2 \int_0^T (d_{\text{TV}}(\mu_s^\varepsilon, \nu_s^\varepsilon))^2 ds \right) \\ &\leq \exp \left(12\varepsilon^2 L^2 T (d_{\text{TV}}(\mu_0, \nu_0))^2 e^{8\varepsilon^2 L^2 T} \right). \end{aligned}$$

Здесь второй переход вытекает из неравенства Коши–Буняковского–Шварца, а в последнем переходе мы воспользовались леммой 4.4. Поскольку $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $e^a - 1 \leq ae^a$ для любого действительного a , имеем

$$\left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^{\varepsilon, \nu}} (\rho - 1)^2 \right)^{1/2} \leq 4\varepsilon L \sqrt{T} d_{\text{TV}}(\mu_0, \nu_0) \exp\{4\varepsilon_0^2 L^2 T (1 + 6e^{8\varepsilon_0^2 L^2 T})\}.$$

Таким образом, последнее неравенство, (4.23) и (4.24) влекут

$$d_{1+\beta V}(P_{\mu_0}^T(\varepsilon)\delta_x, P_{\nu_0}^T(\varepsilon)\delta_x) \leq C\varepsilon(1+\beta)(1+V(x))d_{\text{TV}}(\mu_0, \nu_0),$$

где $C > 0$ зависит только от L, T и ε_0 . Отсюда с помощью (4.22) получаем (4.21). Лемма 4.5 доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего заметим, что из лемм 4.1 и 4.2 следует существование $\beta > 0$ и $\lambda \in [0, 1]$, для которых

$$d_{1+\beta V}(P_\zeta^T(\varepsilon)\mu, P_\zeta^T(\varepsilon)\nu) \leq \lambda d_{1+\beta V}(\mu, \nu)$$

при любых мерах $\mu, \nu, \zeta \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ и всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где ε_0 и T те же, что в лемме 4.2. Поэтому по лемме 4.5

$$\begin{aligned} d_{1+\beta V}(P_\mu^T(\varepsilon)\mu, P_\nu^T(\varepsilon)\nu) &\leq d_{1+\beta V}(P_\mu^T(\varepsilon)\mu, P_\mu^T(\varepsilon)\nu) + d_{1+\beta V}(P_\mu^T(\varepsilon)\nu, P_\nu^T(\varepsilon)\nu) \\ &\leq (C\varepsilon(1+\beta)(1+\nu(V)) + \lambda)d_{1+\beta V}(\mu, \nu) \end{aligned}$$

для всех мер $\mu, \nu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$. Последовательно применяя данную оценку n раз и учитывая (4.12), получим

$$\begin{aligned} d_{1+\beta V}(P_\mu^{nT}(\varepsilon)\mu, P_\nu^{nT}(\varepsilon)\nu) &\leq \left(C\varepsilon(1+\beta)\left(1 + \max_{0 \leq i \leq n} V_i\right) + \lambda\right)^n d_{1+\beta V}(\mu, \nu) \\ &\leq \theta(\varepsilon, \nu)^n d_{1+\beta V}(\mu, \nu), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где мы обозначили $V_i := (P_\nu^{iT}(\varepsilon)\nu)(V)$ и $\theta(\varepsilon, \nu) := \lambda + C\varepsilon(1+\beta)(1+K+\nu(V))$.

Выберем меру $\nu_0 \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ такую, что $\int_{\mathbf{R}^d} e^x \nu_0(dx) < \infty$. Из определения функции V вытекает, что $\nu_0(V) < \infty$. Возьмем такое малое $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$, что

$$\lambda + C\varepsilon_1(1+\beta)(1+K+(\nu_0(V) \vee K)) < 1$$

(это можно сделать, так как $\lambda < 1$). Покажем теперь, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ сильное решение уравнения (3.1) имеет единственную инвариантную меру.

Пусть $(X_t^{\varepsilon, \nu}, \nu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ — это сильное решение уравнения (3.1) с начальным условием, имеющим распределение ν_0 . Рассмотрим меры $(\nu_{nT}^\varepsilon)_{n \in \mathbf{Z}_+}$, где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. Покажем, что данная последовательность является последовательностью Коши в метрическом пространстве $(\mathbf{P}_V(\mathbf{R}^d), d_{1+\beta V})$, где $\mathbf{P}_V(\mathbf{R}^d)$ — это множество вероятностных мер на $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$, интегрирующих V . Действительно, для любых $m, n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} d_{1+\beta V}(\nu_{(n+m)T}^\varepsilon, \nu_{nT}^\varepsilon) &= d_{1+\beta V}(P_{\nu_{mT}^\varepsilon}^{nT}(\varepsilon)\nu_{mT}^\varepsilon, P_{\nu_0}^{nT}(\varepsilon)\nu_0) \\ &\leq \theta(\varepsilon, \nu_0)^n d_{1+\beta V}(\nu_0, \nu_{mT}^\varepsilon) \\ &\leq \theta(\varepsilon, \nu_0)^n (2 + \beta\nu_0(V) + \beta\nu_{mT}^\varepsilon(V)) \\ &\leq C_1 \theta(\varepsilon, \nu_0)^n, \end{aligned}$$

где $C_1 = 2 + 2\beta\nu_0(V) + \beta K$. Во втором переходе мы применили (4.25), а в последнем — использовали (4.12). Так как $\theta(\varepsilon, \nu_0) \leq \theta(\varepsilon_1, \nu_0) < 1$, то $d_{1+\beta V}(\nu_{(n+m)T}^\varepsilon, \nu_{nT}^\varepsilon) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Пространство $(\mathbf{P}_V(\mathbf{R}^d), d_{1+\beta V})$ полно, поэтому найдется мера $\pi^\varepsilon \in \mathbf{P}_V(\mathbf{R}^d)$ такая, что $d_{1+\beta V}(\nu_{nT}^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично доказательству теоремы 2.1(i) с применением леммы 4.3 убеждаемся, что мера π^ε — это единственная инвариантная мера нелинейного оператора $P_\pi^T(\varepsilon) \cdot$. Другими словами, $P_\pi^T(\varepsilon)\pi^\varepsilon = \pi^\varepsilon$ и, если $P_\nu^T(\varepsilon)\nu = \nu$ для некоторой меры $\nu \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$, то $\nu = \pi^\varepsilon$.

Проверим, что мера π^ε инвариантна для решений уравнения (3.1). Для этого покажем, что мера $\pi_t^\varepsilon := P_{\pi^\varepsilon}^t(\varepsilon)\pi^\varepsilon$ совпадает с мерой π^ε для любого $t \geq 0$. Предположим противное. Пусть $\pi_t^\varepsilon \neq \pi^\varepsilon$ для некоторого $t > 0$. Так как $\pi_T^\varepsilon = P_{\pi^\varepsilon}^T(\varepsilon)\pi^\varepsilon = \pi^\varepsilon$, то

$$P_{\pi_t^\varepsilon}^T(\varepsilon)\pi_t^\varepsilon = P_{\pi^\varepsilon}^{T+t}(\varepsilon)\pi^\varepsilon = P_{\pi_T^\varepsilon}^t(\varepsilon)\pi_T^\varepsilon = P_{\pi^\varepsilon}^t(\varepsilon)\pi^\varepsilon = \pi_t^\varepsilon.$$

Это означает, что нелинейный оператор $P_\pi^T(\varepsilon) \cdot$ имеет две различные инвариантные меры (а именно, π^ε и π_t^ε), что невозможно. Поэтому $\pi_t^\varepsilon = \pi^\varepsilon$ и, следовательно, мера π^ε — это единственная инвариантная мера для решения уравнения (3.1).

Наконец, для получения оценки (3.5) выберем произвольную меру $\mu_0 \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^d)$ с $I(\mu_0) = \int_{\mathbf{R}^d} e^x \mu_0(dx) < \infty$ и рассмотрим процесс $(X_t^{\varepsilon, \mu}, \mu_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, являющийся сильным решением уравнения (3.1) с начальным условием, имеющим распределение μ_0 . Тогда из неравенства (4.25) вытекает, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mu_t^\varepsilon, \pi^\varepsilon) &\leq d_{1+\beta V}(\mu_t^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \\ &= d_{1+\beta V}\left(P_{\mu_{\lfloor t/T \rfloor T}^\varepsilon}^{\lfloor t/T \rfloor T}(\varepsilon)\mu_{\lfloor t/T \rfloor T}^\varepsilon, P_{\pi^\varepsilon}^{\lfloor t/T \rfloor T}(\varepsilon)\pi^\varepsilon\right) \\ &\leq \theta(\varepsilon, \pi^\varepsilon)^{\lfloor t/T \rfloor} d_{1+\beta V}(\mu_{\lfloor t/T \rfloor T}^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \\ &\leq \theta(\varepsilon, \pi^\varepsilon)^{t/T-1} (2 + \beta I(\mu_0) + (1+\beta)K). \end{aligned}$$

Здесь $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа. Для завершения доказательства остается заметить, что лемма 4.3 влечет неравенство

$\pi^\varepsilon(V) \leq K$. Кроме того, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Поэтому $\theta(\varepsilon, \pi^\varepsilon) < 1$, из чего вытекает (3.5). Теорема 3.1 доказана.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность профессору А. В. Булинскому и профессору А. Ю. Веретенникову за постановку задачи, помощь в работе и неизменное внимание, а также профессору А. М. Кулику за полезные обсуждения. Статья была частично написана во время пребывания автора в ICMS — Международном центре математических наук (г. Эдинбург, Великобритания). Автор признателен ICMS за поддержку и гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский О. А. О сходимости нелинейных марковских цепей. — Докл. РАН, 2012, т. 447, № 5, с. 483–485.
2. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
3. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова I. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 1, с. 72–89.
4. Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М.: Изд-во АН СССР, 1960, 201 с.
5. Cattiaux P., Guillin A., Malrieu F. Probabilistic approach for granular media equations in the non-uniformly convex case. — Probab. Theory Related Fields, 2008, v. 140, № 1, p. 19–40.
6. Frank T. D. Stochastic feedback, nonlinear families of Markov processes, and nonlinear Fokker–Planck equations. — Phys. A, 2004, v. 331, p. 391–408.
7. Ganz A. Approximation of equilibrium distributions of some stochastic systems with McKean–Vlasov interactions. Ph.D. Thesis. Nice: Université de Nice, 2008.
8. Hairer M. Convergence of Markov processes. Lecture Notes, Univ. of Warwick, 2010. www.hairer.org/notes/convergence.pdf.
9. Hairer M., Mattingly J. C. Yet another look at Harris ergodic theorem for Markov chains. — Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI. Basel: Birkhäuser, 2011, p. 109–117.
10. Jourdain B., Méléard S., Wołczyński W. A. Nonlinear SDEs driven by Lévy processes and related PDEs. — ALEA Lat. Amer. J. Probab. Math. Statist., 2008, v. 4, p. 1–29.
11. Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010, 375 p. (Cambridge Tracts in Math., v. 182.)
12. McKean H. P., jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1966, v. 56, № 6, p. 1907–1911.
13. Meyn S., Tweedie R. L. Markov chains and stochastic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, 594 p.
14. Mishura Yu. S., Veretennikov A. Yu. Existence and uniqueness theorems for solutions of McKean–Vlasov stochastic equations. Preprint, 2013.
15. Muzychka S. A., Vaninsky K. L. A class of nonlinear random walks related to the Ornstein–Uhlenbeck process. — Markov Process. Related Fields, 2011, v. 17, № 2, p. 277–304.
16. Sznitman A.-S. Topics in propagation of chaos. — Lecture Notes in Math., 1991, v. 1464, p. 165–251.
17. Veretennikov A. Yu. On ergodic measures for McKean–Vlasov stochastic equations. — Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004. Berlin: Springer, 2006, p. 471–486.
18. Wang F.-Y. Harnack inequality for SDE with multiplicative noise and extension to Neumann semigroup on nonconvex manifolds. — Ann. Probab., 2011, v. 39, № 4, p. 1449–1467.