Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Голдаева, Экстремальные индексы и кластеры в линейных рекуррентных стохастических последовательностях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 795–804

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:28:59

© 2013 г.

ГОЛДАЕВА А. А.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ И КЛАСТЕРЫ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ¹⁾

Работа посвящена изучению экстремального индекса некоторых стохастических рекуррентных последовательностей, а именно, нахождению случаев, когда он считается в явном виде, и доказательству теорем о непрерывности для получения приближенных значений экстремального индекса. Изучаются также кластеры превышений высокого уровня.

Ключевые слова и фразы: стохастические рекуррентные последовательности, экстремальный индекс, кластеры превышений высокого уровня.

1. Введение. Рассмотрим процесс Y_n , $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому разностному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \quad (1)$$

где (A_n, B_n) , $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Известно, что стационарные процессы вида (1) при довольно общих условиях обладают двумя важными свойствами, относящимися к поведению их экстремумов: стационарное распределение имеет степенной хвост, а максимум $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением, где θ есть экстремальный индекс процесса Y_n .

Напомним [1], что стационарная случайная последовательность Y_n с маргинальной функцией распределения $G(x)$ имеет экстремальный индекс θ , если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность $u_n(\tau)$, что:

- 1) $n\bar{G}(u_n(\tau)) \rightarrow \tau$ при $n \rightarrow \infty$ (здесь $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$);
- 2) $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \rightarrow \exp(-\theta\tau)$, $n \rightarrow \infty$.

Стационарная случайная последовательность с маргинальной функцией распределения $G(x)$ имеет степенной хвост с индексом κ , если $\bar{G}(x) \sim Cx^{-\kappa}$, $x \rightarrow \infty$.

Процессы (1) изучаются начиная с работы [2]. В работе [3], которая посвящена исследованию двух числовых характеристик — хвостового индекса κ и экстремального индекса θ , найдены общие формулы для них. Так, в [3] доказана следующая теорема.

Теорема А [3]. Пусть процесс Y_n , $n \geq 1$, удовлетворяет уравнению (1), и пусть

(i) существует такое число $\kappa > 0$, что $\mathbf{E} A_1^\kappa = 1$, $\mathbf{E} A_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty$, $0 < \mathbf{E} B_1^\kappa < \infty$;

(ii) распределение $B_1/(1 - A_1)$ невырожденное, а распределение $\ln A_1$ при условии, что $A_1 \neq 0$, не решетчатое.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) уравнение $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, где Y_∞ и (A_1, B_1) независимы, имеет единственное решение $Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$;

2) если в (1) положить $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, то процесс $\{Y_n\}$ будет стационарным;

3) при любом начальном условии процесса $\{Y_n\}$ имеет место сходимость $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$, $n \rightarrow \infty$;

4) существует постоянная $c > 0$ такая, что $\mathbf{P}(Y_\infty > x) \sim cx^{-\kappa}$ при $x \rightarrow \infty$;

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: gold_ann@list.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00050).

5) процесс Y_n имеет экстремальный индекс θ , вычисляемый по формуле

$$\theta = \int_1^\infty \mathbf{P} \left(\bigvee_{j=1}^\infty \left\{ \prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1} \right\} \right) \kappa y^{-\kappa-1} dy,$$

причем если $a_n = n^{-1/\kappa}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(a_n M_n \leq x) = \exp(-c\theta x^{-\kappa})$ для всех $x > 0$. Далее, если N_n — нормализованный по времени точечный процесс превышений уровня $u_n = xn^{-1/\kappa}$, $x > 0$, и N — сложный пуассоновский процесс с интенсивностью $c\theta x^{-\kappa}$ и распределением кратности точек, заданным вероятностями $\pi_k = (\theta_k - \theta_{k+1})/\theta$, $k \geq 1$, где

$$\theta_k = \int_1^{+\infty} \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^\infty I \left\{ \prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1} \right\} = k-1 \right) \kappa y^{-\kappa-1} dy, \quad (2)$$

и, в частности, $\theta_1 = \theta$, то $N_n \xrightarrow{d} N$, $n \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Поведение процесса (1) в достаточно общем случае определяется только величинами A_n . Другими словами, если два процесса вида (1) заданы парами случайных величин (A_n, B_n) и $(A_n, \tilde{B}_n)$, $n \geq 1$, соответственно, причем эти пары удовлетворяют условиям (i), (ii) теоремы А, то процессы имеют одинаковые хвостовые индексы κ и одинаковые экстремальные индексы θ .

З а м е ч а н и е 2. Теорема А утверждает, что индекс κ существует, но определяет его как решение некоторого уравнения, которое в общем случае не решается в явном виде, хотя может иметь решение в некоторых частных случаях. Кроме того, теорема А дает лишь общую формулу для экстремального индекса, применение которой на практике затруднительно.

В работе [4] найдена явная формула индекса хвоста κ , для чего предложен новый подход, состоящий в рассмотрении некоторых последовательностей, удовлетворяющих (1), как последовательностей наблюдений процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. А именно, рассмотрен случай, когда $\ln A_n \stackrel{d}{=} a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi$, где ξ имеет стандартное нормальное распределение, Δ — неотрицательная случайная величина, причем $\mathbf{E}\Delta^{-2a/\sigma^2+1} < \infty$, $a < 0$, $\sigma > 0$, ξ и Δ независимы. Тогда $\kappa = -2a/\sigma^2$.

Целью данной работы является: 1) доказательство теоремы о непрерывности для получения приближенных значений индекса θ ; 2) исследование экстремального индекса θ и нахождение случаев, когда он считается в явном виде.

2. Теорема о непрерывности. Пусть даны случайная величина A и последовательность случайных величин $A^{(m)}$, $m \geq 1$. Предположим, что на отрезке $[0; K]$, $K > 0$, определены и конечны функции (преобразования Меллина–Стилтьеса) $\psi(s) = \mathbf{E}A^s$ и $\psi_m(s) = \mathbf{E}(A^{(m)})^s$, $m > M$. Будем говорить, что последовательность случайных величин $A^{(m)}$ сходится к случайной величине A в смысле $*$, и обозначать эту сходимость $A^{(m)} \xrightarrow{*} A$, если $\psi_m(s) \rightarrow \psi(s)$, $m \rightarrow \infty$, $s \in [0; K]$.

Лемма 1. Пусть существует $\kappa \in (0; K)$ такое, что $\psi(\kappa) = 1$. Тогда, если $\psi_m(s) \rightarrow \psi(s)$, $m \rightarrow \infty$, $s \in [0; K]$, то уравнение $\psi_m(s) = 1$ при достаточно больших m имеет единственное решение $\kappa_m \in (0; K)$ и $\kappa_m \rightarrow \kappa$, $m \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что κ является единственным положительным решением уравнения $\psi(s) = 1$ в силу выпуклости функции $\psi(s)$.

Рассмотрим $\kappa' \in (0; K)$ и $\kappa'' \in (0; K)$ такие, что $\kappa' < \kappa < \kappa''$. Поскольку $\psi(s) < 1$ при $0 < s < \kappa$ и $\psi(s) > 1$ при $s > \kappa$, то $\psi(\kappa') < 1$, а $\psi(\kappa'') > 1$. Из сходимости $\psi_m(s) \rightarrow \psi(s)$ следует, что найдется такой номер m_0 , что при $m > m_0$ будут выполнены неравенства $\psi_m(\kappa') < 1$ и $\psi_m(\kappa'') > 1$. Отсюда следует, что для любого $m > m_0$ найдется $\kappa_m \in (\kappa', \kappa'')$ такое, что $\psi_m(\kappa_m) = 1$. Поскольку κ' и κ'' можно выбрать сколь угодно близкими к κ , то отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\{Z_n\}$, $\{Z_n^{(1)}\}$, $\{Z_n^{(2)}\}, \dots$, $n \geq 1$, — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин такие, что $\exp Z_n^{(m)} \xrightarrow{*} \exp Z_n$, $m \rightarrow \infty$, $n \geq 1$. Положим $S_n^{(m)} = Z_1^{(m)} + \dots + Z_n^{(m)}$, $m \geq 1$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $n \geq 1$, и

обозначим $T_k^{(m)}$, $m \geq 1$, и T_k , $k \geq 1$, — k -е максимумы в последовательностях сумм $S_n^{(m)}$, $m \geq 1$, и S_n соответственно. Пусть также существует положительное решение уравнения $\psi(s) = 1$, где $\psi(s) = \mathbf{E} e^{Z_1 s}$. Тогда $T_k^{(m)} \xrightarrow{d} T_k$, $m \rightarrow \infty$, $k \geq 1$.

Доказательство. Для произвольного фиксированного u оценим вероятность $\mathbf{P}(S_n > u)$ с помощью обобщенного неравенства Чебышёва для функции $g(x) = e^{xs}$. В силу независимости $Z_1, \dots, Z_n$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n > u) &< \frac{\mathbf{E} g(S_n)}{g(u)} = \frac{\mathbf{E} e^{S_n s}}{e^{us}} = \frac{\mathbf{E} e^{(Z_1 + \dots + Z_n)s}}{e^{us}} \\ &= \frac{\mathbf{E} e^{Z_1 s} \dots \mathbf{E} e^{Z_n s}}{e^{us}} = \frac{(\psi(s))^n}{e^{us}}, \end{aligned}$$

где $\psi(s) = \mathbf{E} e^{Z_n s}$, $n \geq 1$.

Поскольку κ — единственное положительное решение уравнения $\psi(s) = 1$, то при $s \in (0; \kappa)$ выполнено неравенство $\psi(s) < 1$ и существуют $s_0 \in (0; \kappa)$ и $\delta > 0$ такие, что $\psi(s_0) < 1 - \delta$. Из сходимости $\psi_m(s) \rightarrow \psi(s)$, $m \rightarrow \infty$, следует существование такого M , что при $m > M$ имеем $\psi_m(s_0) < 1 - \delta$. Поэтому для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathcal{N}$ такое, что $(1 - \delta)^{N+1} < \varepsilon \delta e^{us_0}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\max(S_{N+1}, \dots) > u) &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n > u) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\psi(s_0))^n}{e^{us_0}} = \frac{(\psi(s_0))^{N+1}}{e^{us_0}(1 - \psi(s_0))} < \frac{(1 - \delta)^{N+1}}{e^{us_0}\delta} < \varepsilon, \\ \mathbf{P}(\max(S_{N+1}^{(m)}, \dots) > u) &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n^{(m)} > u) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\psi_m(s_0))^n}{e^{us_0}} = \frac{(\psi_m(s_0))^{N+1}}{e^{us_0}(1 - \psi_m(s_0))} < \frac{(1 - \delta)^{N+1}}{e^{us_0}\delta} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Будем рассматривать последовательности случайных величин $\{Z_n\}, \{Z_n^{(1)}\}, \{Z_n^{(2)}\}, \dots$, $n \geq 1$, на одном вероятностном пространстве. Для этого рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{U_n\}$, равномерно распределенных на отрезке $[0; 1]$, и положим $Z_n = F^{-1}(U_n)$, $Z_n^{(m)} = F_m^{-1}(U_n)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, где $F(x)$ и $F_m(x)$ — функции распределения Z_1 и $Z_1^{(m)}$, $m \geq 1$, соответственно. Тогда из условия сходимости $\exp Z_n^{(m)} \xrightarrow{*} \exp Z_n$, $n \geq 1$, следует, что $Z_n^{(m)} \xrightarrow{\text{п.н.}} Z_n$, и, значит, $S_n^{(m)} \xrightarrow{\text{п.н.}} S_n$, $m \rightarrow \infty$, $n \geq 1$.

Заметим, что событие $\{T_k \leq u\}$ означает, что число превышений уровня u последовательностью $\{S_n\}$ не превосходит $k - 1$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \nu(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} I\{S_n > u\}, \quad \nu_N(u) = \sum_{n=1}^N I\{S_n > u\}, \quad \tilde{\nu}_N(u) = \sum_{n=N+1}^{\infty} I\{S_n > u\}, \\ \nu^{(m)}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} I\{S_n^{(m)} > u\}, \quad \nu_N^{(m)}(u) = \sum_{n=1}^N I\{S_n^{(m)} > u\}, \\ \tilde{\nu}_N^{(m)}(u) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} I\{S_n^{(m)} > u\}. \end{aligned}$$

Тогда $\nu(u) = \nu_N(u) + \tilde{\nu}_N(u)$ и $\nu^{(m)}(u) = \nu_N^{(m)}(u) + \tilde{\nu}_N^{(m)}(u)$.

Из сходимости $S_n^{(m)} \xrightarrow{\text{п.н.}} S_n$ следует, что $\nu_N^{(m)}(u) \xrightarrow{\text{п.н.}} \nu_N(u)$, $m \rightarrow \infty$. Далее, $\mathbf{P}(\tilde{\nu}_N(u) > 0) = \mathbf{P}(\max(S_{N+1}, \dots) > u) < \varepsilon$ и $\mathbf{P}(\tilde{\nu}_N^{(m)}(u) > 0) = \mathbf{P}(\max(S_{N+1}^{(m)}, \dots) > u) < \varepsilon$.

Тогда для любого $\delta > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\nu(u) - \nu^{(m)}(u)| > \delta) &\leq \mathbf{P}(|\nu_N(u) - \nu_N^{(m)}(u)| > \delta) \\ &+ \mathbf{P}(\tilde{\nu}_N(u) > 0) + \mathbf{P}(\tilde{\nu}_N^{(m)}(u) > 0). \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\nu_N(u) - \nu_N^{(m)}(u)| > \delta) = 0$ и $\mathbf{P}(\tilde{\nu}_N(u) > 0) < \varepsilon$, $\mathbf{P}(\tilde{\nu}_N^{(m)}(u) > 0) < \varepsilon$, то получаем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\nu(u) - \nu^{(m)}(u)| > \delta) < 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку ε — произвольное, то $\nu^{(m)}(u) \xrightarrow{\mathbf{P}} \nu(u)$, $m \rightarrow \infty$, а следовательно, $T_k^{(m)} \xrightarrow{d} T_k$, $m \rightarrow \infty$, $k \geq 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $(A_n^{(m)}, B_n^{(m)})$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы А при всех $m \geq 1$. Пусть существует последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{A_n\}$ такая, что $A_n^{(m)} \xrightarrow{*} A_n$, $m \rightarrow \infty$, $n \geq 1$ и существует $\kappa \in (0; K)$, $K > 0$, такое, что $\psi(\kappa) = 1$, где $\psi(\kappa) = \mathbf{E} A_1^\kappa$. Тогда, если

$$\begin{aligned} \theta_k^{(m)} &= \int_1^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} I\left\{\prod_{i=1}^j A_i^{(m)} \leq y^{-1}\right\} = k-1\right) \kappa_m y^{-\kappa_m-1} dy, \\ \theta_k &= \int_1^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} I\left\{\prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1}\right\} = k-1\right) \kappa y^{-\kappa-1} dy, \end{aligned}$$

то $\theta_k^{(m)} \rightarrow \theta_k$ и $\pi_k^{(m)} \rightarrow \pi_k$, $m \rightarrow \infty$, где $\pi_k^{(m)} = (\theta_k^{(m)} - \theta_{k+1}^{(m)})/\theta_k^{(m)}$, $\pi_k = (\theta_k - \theta_{k+1})/\theta$, $k, m \geq 1$.

Доказательство. Построим последовательности $\{Z_n\}, \{Z_n^{(1)}\}, \{Z_n^{(2)}\}, \dots$, $n \geq 1$, на одном вероятностном пространстве, как в доказательстве леммы 2. В [3] показано, что $\theta_k = \mathbf{E} \exp(\kappa \min(T_{k-1}; 0)) - \mathbf{E} \exp(\kappa \min(T_k; 0))$, где T_k — k -й максимум в последовательности сумм $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Тогда $\theta_k^{(m)} = \mathbf{E} \exp(\kappa_m \min(T_{k-1}^{(m)}; 0)) - \mathbf{E} \exp(\kappa_m \min(T_k^{(m)}; 0))$, где $T_k^{(m)}$ — k -й максимум в последовательности сумм $S_n^{(m)} = \sum_{i=1}^n Z_i^{(m)}$.

Согласно лемме 1, имеем $\kappa_m \rightarrow \kappa$, $m \rightarrow \infty$, где κ_m — единственное положительное решение уравнения $\psi_m(s) = 1$, $\psi_m(s) = \mathbf{E}(A_1^{(m)})^s$, $m \geq 1$. Отсюда и из леммы 2 следует, что $\theta_k^{(m)} \rightarrow \theta_k$, $m \rightarrow \infty$. Из этой сходимости следует, что и $\pi_k^{(m)} \rightarrow \pi_k$, $m \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

3. Обобщенное лапласовское распределение. Пусть величины $Z_n = \ln A_n$ имеют распределение с плотностью

$$g_Z(x) = \begin{cases} r\alpha e^{\alpha x}, & x < 0, \\ (1-r)\beta e^{-\beta x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0, \quad 0 < r < 1. \quad (3)$$

Найдем в этом случае хвостовой и экстремальный индексы и распределение размеров кластеров превышений высокого уровня.

3.1. Экстремальный и хвостовой индексы.

Теорема 1. Пусть величины $Z_n = \ln A_n$ имеют распределение с плотностью (3). Тогда при $r > \alpha/(\alpha + \beta)$

$$\kappa = r(\alpha + \beta) - \alpha, \quad \theta = \frac{\kappa^2}{r\beta(\alpha + \beta)}.$$

Доказательство. Вычислим хвостовой индекс κ — единственное положительное решение уравнения $\mathbf{E} e^{sZ_n} = 1$. Имеем

$$\mathbf{E} e^{\kappa Z_n} = \int_{-\infty}^0 r\alpha e^{\alpha x} e^{\kappa x} dx + \int_0^{+\infty} (1-r)\beta e^{-\beta x} e^{\kappa x} dx = \frac{r\alpha}{\alpha + \kappa} - \frac{(1-r)\beta}{\kappa - \beta}.$$

Приравнявая полученное выражение к 1, находим, что $\kappa = r(\alpha + \beta) - \alpha$ при $r > \alpha/(\alpha + \beta)$.

Для вычисления экстремального индекса воспользуемся тем, что $T \stackrel{d}{=} Z_1 + T^+$, где $T = \max(Z_1, Z_1 + Z_2, Z_1 + Z_2 + Z_3, \dots)$, а $T^+ \stackrel{d}{=} \max(0, Z_1, Z_1 + Z_2, Z_1 + Z_2 + Z_3, \dots)$, причем Z_1 и T^+ независимы.

В [5, гл. 12, § 5, с. 478] показано, что если распределение Z_n имеет правый показательный хвост с параметром α , то

$$\mathbf{P}(T^+ \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{\kappa}{\alpha}\right) e^{-\kappa x},$$

где κ — единственное положительное решение уравнения $\mathbf{E} e^{sZ_n} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T^+ = 0) &= 1 - \frac{(1-r)(\alpha+\beta)}{\beta}, \\ \mathbf{P}(T^+ \leq x) &= 1 - \frac{(1-r)(\alpha+\beta)}{\beta} e^{-(r(\alpha+\beta)-\alpha)x}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$p_{T^+}(x) = \frac{(1-r)(\alpha+\beta)}{\beta} (r(\alpha+\beta) - \alpha) e^{-(r(\alpha+\beta)-\alpha)x}, \quad x > 0.$$

Найдем плотность распределения случайной величины $T \stackrel{d}{=} Z_1 + T^+$.

1) При $x < 0$ имеем

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{T^+}(y) p_Z(x-y) dy \\ &= \mathbf{P}(T^+ = 0) p_Z(x) + \int_0^{\infty} p_{T^+}(y) p_Z(x-y) dy = \frac{\alpha}{\beta} (r(\alpha+\beta) - \alpha) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

2) При $x \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} p_T(x) &= p_{Z_1+T^+}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{T^+}(y) p_Z(x-y) dy \\ &= \mathbf{P}(T^+ = 0) p_Z(x) + \int_0^x p_{T^+}(y) p_Z(x-y) dy + \int_x^{+\infty} p_{T^+}(y) p_Z(x-y) dy \\ &= \frac{(1-r)(\alpha+\beta)}{\beta} (r(\alpha+\beta) - \alpha) e^{-(r(\alpha+\beta)-\alpha)x}. \end{aligned}$$

В [3] доказано, что $\theta = 1 - \mathbf{E} e^{\kappa \min(T; 0)}$. Вычисляя θ по этой формуле, получаем

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \min(x; 0)} p_T(x) dx \\ &= 1 - \frac{r(\alpha+\beta) - \alpha}{\beta} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\kappa x} \alpha e^{\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} (1-r)(\alpha+\beta) e^{-\kappa x} dx \right) \\ &= \frac{(r(\alpha+\beta) - \alpha)^2}{r\beta(\alpha+\beta)} = \frac{\kappa^2}{r\beta(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Введем обозначение $\gamma = \alpha/(\alpha+\beta)$, $0 < \gamma < 1$, тогда

$$\theta = \frac{(r(\alpha+\beta) - \alpha)^2}{r\beta(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+\beta)^2 (r - \alpha/(\alpha+\beta))^2}{r\beta(\alpha+\beta)} = \frac{(r - \alpha/(\alpha+\beta))^2}{r\beta/(\alpha+\beta)} = \frac{(r - \gamma)^2}{r(1 - \gamma)}.$$

З а м е ч а н и е 3. θ зависит только от r и от соотношения между α и β , т.е. от γ .

З а м е ч а н и е 4. Случай простого асимметричного лапласовского распределения при $r = 1 - \gamma$ рассматривался в [6], где были найдены индексы $\kappa = \beta - \alpha$ и $\theta = (1 - \alpha/\beta)^2$. Заметим, что эти результаты согласуются с полученными выше.

3.2. Кластеры превышений высокого уровня. В [3] доказано представление

$$\theta_k = \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_{k-1}; 0)} - \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_k; 0)},$$

где T_k , $k \geq 1$, обозначают k -е максимумы в последовательности сумм $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$.

Плотность распределения $T_1 = T$ найдена выше, соответствующая функция распределения имеет вид

$$G_1(x) = \begin{cases} (1 - h_1)e^{\alpha x}, & x < 0, \\ 1 - h_1e^{-\kappa x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $h_1 = (1 - r)(\alpha + \beta)/\beta$. Найдем распределение T_k , $k \geq 2$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда все T_k , $k \geq 2$, имеют распределения

$$G_k(x) = \begin{cases} P_k(-(\alpha + \beta)x)e^{\alpha x}, & x < 0, \\ 1 - h_k e^{-\kappa x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

причем

$$P_k(x) = p_{0,k} + p_{1,k}x + p_{2,k}\frac{x^2}{2} + \dots + p_{k-1,k}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k \geq 1,$$

$$h_k = \frac{1-r}{1-\gamma} \left(1 - (1-\gamma) \sum_{i=0}^{k-2} p_{i,k-1} \right), \quad k \geq 2, \quad h_1 = \frac{1-r}{1-\gamma} \quad (5)$$

и коэффициенты многочлена $P_k(x)$ выражаются через коэффициенты многочлена $P_{k-1}(x)$, $k \geq 2$, следующим образом:

$$p_{0,k} = 1 - h_k,$$

$$p_{l,k} = r\gamma p_{l-1,k-1} + (1-r)(1-\gamma) \sum_{i=1}^{k-2} p_{i,k-1}, \quad l = 1, \dots, k-2, \quad (6)$$

$$p_{k-1,k} = r\gamma p_{k-2,k-1}.$$

Доказательство. Событие $\{T_k \leq x\}$ означает, что последовательность S_n превышает уровень x менее k раз. Тогда, если $Z_1 = u$, то при $u \leq x$ сумма $S_n^{(2)} = \sum_{j=2}^{n+1} Z_j$ превышает уровень $x - u$ менее k раз, а при $u > x$ — менее $k - 1$ раза, причем последовательности S_n и $S_n^{(2)}$ представляют собой вероятностные копии. Таким образом, все $G_k(x)$, $k \geq 2$, удовлетворяют уравнению

$$G_k(x) = \int_{-\infty}^x G_k(x-u) dG(u) + \int_x^{+\infty} G_{k-1}(x-u) dG(u), \quad (7)$$

где $G(x)$ — функция распределения величин Z_n с плотностью (3).

Полагая, что $G_{k-1}(x)$ имеет вид (4) с некоторыми h_{k-1} и $P_{k-1}(x)$, будем искать $G_k(x)$ также в виде (4). Поскольку функции распределения описываются различными выражениями при положительных и отрицательных x , обозначим их соответствующими индексами. Тогда (7) распадается на два уравнения:

$$G_k^+(x) = \int_{-\infty}^x G_k^+(x-u) dG(u) + \int_x^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u) dG^+(u), \quad x \geq 0, \quad (8)$$

$$G_k^-(x) = \int_{-\infty}^x G_k^+(x-u) dG^-(u) + \int_x^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u) dG(u), \quad x < 0. \quad (9)$$

Вычисляя правую часть (8), получаем

$$\begin{aligned} G_k^+(x) &= \int_{-\infty}^0 G_k^+(x-u) dG^-(u) + \int_0^x G_k^+(x-u) dG^+(u) + \int_x^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u) dG^+(u) \\ &= \int_{-\infty}^0 (1 - h_k e^{-\kappa(x-u)}) r \alpha e^{\alpha u} du + \int_0^x (1 - h_k e^{-\kappa(x-u)}) (1-r) \beta e^{-\beta u} du \\ &\quad + \int_x^{+\infty} P_{k-1}(-(\alpha + \beta)(x-u)) e^{\alpha(x-u)} (1-r) \beta e^{-\beta u} du. \end{aligned}$$

Применяя $k-2$ раза формулу интегрирования по частям, находим

$$\begin{aligned} G_k^+(x) &= r - h_k \gamma e^{-\kappa x} + (1-r) - (1-r)e^{-\beta x} + h_k(1-\gamma)e^{-\beta x} \\ &\quad - h_k(1-\gamma)e^{-\kappa x} + (1-r)(1-\gamma)e^{-\beta x} \sum_{i=0}^{k-2} p_{i,k-1} \\ &= 1 - h_k e^{-\kappa x} + e^{-\beta x} \left(-(1-r) + h_k(1-\gamma) + (1-r)(1-\gamma) \sum_{i=0}^{k-2} p_{i,k-1} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициент при $e^{-\beta x}$ к нулю, приходим к формуле (5) для h_k .

Вычислим правую часть (9). Имеем

$$\begin{aligned} G_k^-(x) &= \int_{-\infty}^x G_k^+(x-u) dG^-(u) + \int_x^0 G_{k-1}^-(x-u) dG^-(u) \int_0^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u) dG^+(u) \\ &= \int_{-\infty}^x (1 - h_k e^{-\kappa(x-u)}) r \alpha e^{\alpha u} du + \int_x^0 P_{k-1}(-(\alpha+\beta)(x-u)) e^{\alpha(x-u)} r \alpha e^{\alpha u} du \\ &\quad + \int_0^{+\infty} P_{k-1}(-(\alpha+\beta)(x-u)) e^{\alpha(x-u)} (1-r) \beta e^{-\beta u} du. \end{aligned}$$

Применяя $k-2$ раза формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} G_k^-(x) &= e^{\alpha x} \left(r - h_k \gamma + r \gamma \left(p_{0,k-1}(-(\alpha+\beta)x) + p_{1,k-1} \frac{(-(\alpha+\beta)x)^2}{2} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p_{k-2,k-1} \frac{(-(\alpha+\beta)x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1-r)(1-\gamma) \left(\sum_{i=0}^{k-2} p_{i,k-1} + (-(\alpha+\beta)x) \sum_{i=1}^{k-2} p_{i,k-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-(\alpha+\beta)x)^2}{2!} \sum_{i=2}^{k-2} p_{i,k-1} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-(\alpha+\beta)x)^{k-2}}{(k-2)!} p_{k-2,k-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Из формулы (5) следует, что $(1-r)(1-\gamma) \sum_{i=0}^{k-2} p_{i,k-1} = (1-r) - h_k(1-\gamma)$, тогда

$$\begin{aligned} G_k^-(x) &= e^{\alpha x} \left(r - h_k \gamma + (1-r) - h_k(1-\gamma) \right. \\ &\quad \left. + (-(\alpha+\beta)x) \left(r \gamma p_{0,k-1} + (1-r)(1-\gamma) \sum_{i=1}^{k-2} p_{i,k-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-(\alpha+\beta)x)^2}{2!} \left(r \gamma p_{1,k-1} + (1-r)(1-\gamma) \sum_{i=2}^{k-2} p_{i,k-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(-(\alpha+\beta)x)^{k-1}}{(k-1)!} r \gamma p_{k-2,k-1} \right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства получаем выражения (6). Теорема доказана.

Напомним, что согласно теореме А превышения высокого уровня (u_n при $n \rightarrow \infty$) происходят не поодиночке, а группами (кластерами). Причем теорема А дает возможность рассчитать вероятности π_k , $k \geq 1$, того, что в кластере будет k точек, а экстремальный индекс θ имеет смысл величины, обратной среднему размеру кластера.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для вероятностей π_k , $k \geq 1$, верны формулы

$$\pi_k = \frac{1-\gamma}{r-\gamma} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{2p_{i,k} - (p_{i,k+1} + p_{i,k-1})}{r^i} + \frac{2p_{k-1,k} - p_{k-1,k+1}}{r^{k-1}} - \frac{p_{k,k+1}}{r^k} \right).$$

Доказательство. Вычислим $\theta_k = \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_{k-1}; 0)} - \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_k; 0)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_k; 0)} &= \int_{-\infty}^0 e^{\kappa u} dG_k^-(u) + \int_0^{+\infty} dG_k^+(u) \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\kappa u} d(P_k(-(\alpha + \beta)u) e^{\alpha u}) + \int_0^{+\infty} d(1 - h_k e^{-\kappa u}) \\ &= P_k(-(\alpha + \beta)u) e^{(\alpha + \kappa)u} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 P_k(-(\alpha + \beta)u) \kappa e^{(\alpha + \kappa)u} du + h_k \\ &= P_k(0) - \kappa \int_{-\infty}^0 P_k(-(\alpha + \beta)u) e^{r(\alpha + \beta)u} du + h_k \\ &= P_k(0) - \frac{\kappa}{\alpha + \beta} \int_0^{+\infty} P_k(t) e^{-rt} dt + h_k. \end{aligned}$$

Применяя $k-1$ раз формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty} P_k(t) e^{-rt} dt = \frac{P_k(0)}{r} + \frac{P'_k(0)}{r^2} + \dots + \frac{P_k^{(k-1)}(0)}{r^k} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{i,k}}{r^i},$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\kappa \min(T_k; 0)} &= p_{0,k} - \frac{\kappa}{r(\alpha + \beta)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{i,k}}{r^i} + h_k \\ &= 1 - h_k - \left(1 - \frac{\alpha}{r(\alpha + \beta)} \right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{i,k}}{r^i} + h_k = 1 - \frac{r-\gamma}{r} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{i,k}}{r^i}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta_k &= \left(1 - \frac{r-\gamma}{r} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{p_{i,k-1}}{r^i} \right) - \left(1 - \frac{r-\gamma}{r} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{i,k}}{r^i} \right) \\ &= \frac{r-\gamma}{r} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{p_{i,k} - p_{i,k-1}}{r^i} + \frac{p_{k-1,k}}{r^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{\theta} = \frac{1-\gamma}{r-\gamma} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{p_{i,k} - p_{i,k-1}}{r^i} + \frac{p_{k-1,k}}{r^{k-1}} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(p_{i,k+1} - p_{i,k})}{r^i} + \frac{p_{k,k+1}}{r^k} \right) \\ &= \frac{1-\gamma}{r-\gamma} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{2p_{i,k} - (p_{i,k+1} + p_{i,k-1})}{r^i} + \frac{2p_{k-1,k} - p_{k-1,k+1}}{r^{k-1}} - \frac{p_{k,k+1}}{r^k} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

На рис. 1 представлены значения π_k , $k = 1, 2, \dots, 10$, при $\gamma = 0.4$, $\gamma = 0.3$ и $\gamma = 0.2$ и при $r = 1 - \gamma$.

Рис. 1.

Численный анализ показывает, что отношение π_k/π_{k-1} стремится к некоторому пределу, зависящему от r и γ . На рис. 2 представлен график зависимости π_{20}/π_{19} от γ при $r = 1 - \gamma$.

Рис. 2.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту А. В. Лебеву за постановку задачи и советы, высказанные при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
2. Vervaat W. On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. — Adv. Appl. Probab., 1979, v. 11, p. 750–783.
3. de Haan L., Resnick S., Rootzén H., de Vries C. G. Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. — Stochastic Process. Appl., 1989, v. 32, № 2, p. 213–224.
4. Голдаева А. А. Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей. — Вестн. Моск. ун-та. Матем. мех., 2010, № 6, с. 13–18.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2. М.: Мир, 1967, 498 с., 752 с.

6. Новицкая О. С., Яцало Е. Б. Экстремальное поведение рекуррентных случайных последовательностей. — Вестн. Моск. ун-та. Матем. мех., 2008, № 5, с. 6–10.

Поступила в редакцию
2.II.2013

© 2013 г.

ДЕМИЧЕВ В. П.*

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОВАРИАЦИИ ИНДИКАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получена оптимальная оценка для ковариации индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин, улучшающая неравенство, которое установили Багай и Пракаса Рао. Рассматриваются приложения доказанного результата к исследованию предельных свойств эмпирических функций распределения и объемов экскурсионных множеств случайных полей.

Ключевые слова и фразы: ассоциированность, ковариация, индикаторные функции.

Введение. Важный класс случайных полей образуют системы случайных величин, обладающих свойством ассоциированности и его модификациями (см., например, [1]). При доказательстве предельных теорем для таких полей существенную роль играет условие конечной восприимчивости, предложенное Ч. Ньюменом [2]. Для стационарных в широком смысле полей, заданных на решетке $\mathbf{Z}^d$, это означает суммируемость ковариационной функции. Во многих приложениях проверка этого условия осложнена невозможностью явного вычисления последней. Однако часто можно представить элементы исследуемого случайного поля в виде некоторых функций от элементов другого ассоциированного поля, ковариационная функция которого известна. Индикаторные функции представляют собой важный частный случай, возникающий, например, при исследовании эмпирических распределений и экскурсионных множеств случайных полей. Соответственно, интерес представляет задача оценки ковариации индикаторных функций от случайных величин через ковариацию исходных величин.

Оценка такого рода появилась в работах [3] и [4] в предположении существования у рассматриваемых ассоциированных случайных величин ограниченных плотностей. В [5] было получено обобщение этой оценки на случай, когда плотности, вообще говоря, не ограничены, но принадлежат пространству $L_p(\mathbf{R})$, $p > 1$. В данной работе мы улучшаем оценку из [3] и [4], а также доказываем, что наша оценка оптимальна. Заметим, что в [6] (теоремы 1 и 3) получены более точные оценки, однако на характер зависимости рассматриваемых величин налагаются весьма жесткие ограничения.

1. Формулировка основных результатов. Напомним несколько основных понятий, которые понадобятся нам, чтобы сформулировать результаты работы.

Согласно [7] семейство случайных величин $\xi = \{\xi_t, t \in T\}$ называется ассоциированным (пишут $\xi \in \mathbf{A}$), если для любых конечных подмножеств $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset T$ и ограниченных по координатам неубывающих функций $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и $G: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$\text{cov}(F(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m})) \geq 0. \quad (1.1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы 1; e-mail: vadim.demichev@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 10-01-00397-а.