Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Демичев, Оптимальная оценка ковариации индикаторных функций от ассоциированных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 4, 804–812

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:19:28

6. Новицкая О. С., Яцало Е. Б. Экстремальное поведение рекуррентных случайных последовательностей. — Вестн. Моск. ун-та. Матем. мех., 2008, № 5, с. 6–10.

Поступила в редакцию
2.11.2013

© 2013 г.

ДЕМИЧЕВ В. П.*

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОВАРИАЦИИ ИНДИКАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получена оптимальная оценка для ковариации индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин, улучшающая неравенство, которое установили Багай и Пракаса Рао. Рассматриваются приложения доказанного результата к исследованию предельных свойств эмпирических функций распределения и объемов экскурсионных множеств случайных полей.

Ключевые слова и фразы: ассоциированность, ковариация, индикаторные функции.

Введение. Важный класс случайных полей образуют системы случайных величин, обладающих свойством ассоциированности и его модификациями (см., например, [1]). При доказательстве предельных теорем для таких полей существенную роль играет условие конечной восприимчивости, предложенное Ч. Ньюменом [2]. Для стационарных в широком смысле полей, заданных на решетке $\mathbf{Z}^d$, это означает суммируемость ковариационной функции. Во многих приложениях проверка этого условия осложнена невозможностью явного вычисления последней. Однако часто можно представить элементы исследуемого случайного поля в виде некоторых функций от элементов другого ассоциированного поля, ковариационная функция которого известна. Индикаторные функции представляют собой важный частный случай, возникающий, например, при исследовании эмпирических распределений и экскурсионных множеств случайных полей. Соответственно, интерес представляет задача оценки ковариации индикаторных функций от случайных величин через ковариацию исходных величин.

Оценка такого рода появилась в работах [3] и [4] в предположении существования у рассматриваемых ассоциированных случайных величин ограниченных плотностей. В [5] было получено обобщение этой оценки на случай, когда плотности, вообще говоря, не ограничены, но принадлежат пространству $L_p(\mathbf{R})$, $p > 1$. В данной работе мы улучшаем оценку из [3] и [4], а также доказываем, что наша оценка оптимальна. Заметим, что в [6] (теоремы 1 и 3) получены более точные оценки, однако на характер зависимости рассматриваемых величин налагаются весьма жесткие ограничения.

1. Формулировка основных результатов. Напомним несколько основных понятий, которые понадобятся нам, чтобы сформулировать результаты работы.

Согласно [7] семейство случайных величин $\xi = \{\xi_t, t \in T\}$ называется ассоциированным (пишут $\xi \in \mathbf{A}$), если для любых конечных подмножеств $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset T$ и ограниченных по координатам неубывающих функций $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и $G: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$\text{cov}(F(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m})) \geq 0. \quad (1.1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы 1; e-mail: vadim.demichev@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 10-01-00397-а.

В случае, когда (1.1) имеет место при дополнительном предположении $I \cap J = \emptyset$, говорят, что семейство ξ положительно (слабо) ассоциировано ($\xi \in \text{PA}$), см. [8]. Если по-прежнему $I \cap J = \emptyset$, но знак неравенства (1.1) заменить на противоположный (см. [9]), то получится определение отрицательной ассоциированности ($\xi \in \text{NA}$).

Очевидно, что ассоциированность семейства случайных величин влечет положительную ассоциированность. В то же время обратное утверждение неверно даже для двухэлементных семейств (см. [7]).

Будем также говорить, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $n \in \mathbf{N}$, ассоциирован (соответственно, положительно ассоциирован или отрицательно ассоциирован) и писать $\xi \in \mathbf{A}$ ($\xi \in \text{PA}$ или $\xi \in \text{NA}$), если множество случайных величин, составленное из его компонент, обладает этим свойством. Запись $\xi \in \mathbf{L}_2$ означает, что $\xi_i \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть X, Y — квадратично интегрируемые случайные величины с функциями распределения (ф.р.) F_X, F_Y и ограниченными плотностями p_X, p_Y соответственно. В [3] показано, что если $(X, Y) \in \mathbf{A}$, то для любого $T > 0$

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\}) \leq C_1 \left(T^2 \text{cov}(X, Y) + \frac{1}{T} (\|p_X\|_\infty + \|p_Y\|_\infty) \right),$$

где $\mathbf{I}\{\cdot\}$ обозначает индикатор события. Здесь и далее $C_1, C_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ — некоторые положительные константы. Минимизируя последнее выражение по $T > 0$, получаем

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\}) \leq C_2 ((\|p_X\|_\infty + \|p_Y\|_\infty)^2 \text{cov}(X, Y))^{1/3}.$$

Записывая эту оценку для случайных величин $k_1 X, k_2 Y$ и минимизируя правую часть по $k_1, k_2 > 0$, имеем

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\}) \leq C_3 (\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty \text{cov}(X, Y))^{1/3}. \quad (1.2)$$

Для упрощения записи будем использовать обозначения $x_+ = \max\{x, 0\}$, $x_- = \max\{-x, 0\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x, y \in \mathbf{R}$. Введем функцию f , которая монотонно и непрерывно отображает отрезок $[0, 1]$ на себя, следующей формулой:

$$f(0) = 0; \quad f(x) = \frac{x^2}{\ln(e/x)}, \quad x \in (0, 1].$$

В данной работе мы улучшаем оценку (1.2). А именно, верна следующая теорема.

Теорема 1.1. Если квадратично интегрируемый случайный вектор (X, Y) положительно или отрицательно ассоциирован, то имеет место неравенство

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} |\text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\})| \leq C_4 f^{\text{inv}}(\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty |\text{cov}(X, Y)| \wedge 1), \quad (1.3)$$

где f^{inv} — обратная функция к f .

Оптимальность этой оценки устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.2. Для любого $r \in (0, 1]$ найдется случайный вектор $(X, Y) \in \text{PA} \cap \mathbf{L}_2$ такой, что $\text{cov}(X, Y) \in (0, r]$, $\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1$, и

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > x\}) \geq c_1 f^{\text{inv}}(\text{cov}(X, Y)).$$

Следствие 1.1. Для любого $0 < \delta < 1/2$ найдется такое $C = C(\delta) > 0$, что

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} |\text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\})| \leq C (\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty |\text{cov}(X, Y)|)^\delta, \quad (1.4)$$

если $(X, Y) \in \text{PA} \cap \mathbf{L}_2$ или $(X, Y) \in \text{NA} \cap \mathbf{L}_2$. В то же время оценку вида (1.4) нельзя получить при $\delta = 1/2$.

2. Доказательства. Введем функцию

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\}) \\ &= F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

где $F_{X,Y}$ — функция распределения (X, Y) . Отметим, что если $(X, Y) \in \text{PA}$ или $(X, Y) \in \text{NA}$, то H соответственно неотрицательна или неположительна во всей области определения. Также известно (см., например, [1, приложение, теорема 1.2]), что $|\text{cov}(X, Y)| = \|H\|_1$.

Так как и левая и правая части соотношения (1.3) инвариантны относительно домножения X и Y на положительные числа, утверждение теоремы 1.1 эквивалентно выполнению неравенства

$$\|H\|_1 \geq c_2 f(\|H\|_\infty) \quad (2.1)$$

для всех положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин $X, Y \in \mathbf{L}_2$ таких, что

$$\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1. \quad (2.2)$$

В свою очередь утверждение теоремы 1.2 эквивалентно существованию для каждого $r \in (0, 1]$ такого случайного вектора $(X, Y) \in \text{PA} \cap \mathbf{L}_2$ с $\text{cov}(X, Y) \in (0, r]$ и $\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1$, что

$$\|H\|_1 \leq C_5 f(\|H\|_\infty). \quad (2.3)$$

В предположениях $(X, Y) \in \text{PA} \cap \mathbf{L}_2$ и (2.2) легко проверяются следующие свойства функции H :

(A1) $0 \leq H(x, y) < 1$, $x, y \in \mathbf{R}$;

(A2) для любых $x, y \in \mathbf{R}$, $\Delta x, \Delta y > 0$ выполнено неравенство

$$H(x, y) + H(x + \Delta x, y + \Delta y) - H(x + \Delta x, y) - H(x, y + \Delta y) \geq -\Delta x \Delta y;$$

(A3) $\text{Lip}_1(H) \vee \text{Lip}_2(H) \leq 1$, где $\text{Lip}_1(H), \text{Lip}_2(H)$ — липшицевы константы H по первой и второй переменной соответственно.

Если $(X, Y) \in \text{NA} \cap \mathbf{L}_2$, то свойствами (A1)–(A3) обладает функция $G(x, y) = -H(-x, y)$, $x, y \in \mathbf{R}$. Поэтому теорема 1.1 будет доказана, если мы установим следующий результат.

Лемма 2.1. Для любой функции $H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, обладающей свойствами (A1)–(A3), выполнено неравенство (2.1).

Теорема 1.2 является следствием следующих двух утверждений.

Лемма 2.2. Для каждого $r \in (0, 1]$ найдется такая функция $H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, обладающая свойствами (A1) и (A2), что $\text{Lip}_1(H) \vee \text{Lip}_2(H) \leq 1/4$, $\text{supp}(H) \subset [-1/4, 1/4]^2$, $\|H\|_1 \in (0, r]$, и выполнено (2.3).

Лемма 2.3. Для каждой функции H , удовлетворяющей условиям из формулировки леммы 2.2, найдется такой случайный вектор $(X, Y) \in \text{PA} \cap \mathbf{L}_2$, что выполнено свойство (2.2), и $H(x, y) = \text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\})$, $x, y \in \mathbf{R}$.

Перед тем как перейти непосредственно к доказательству лемм 2.1–2.3, мы установим еще несколько вспомогательных утверждений.

Введем класс $\mathcal{G}$, состоящий из финитных непрерывных действительных функций g , заданных на $(-\infty, 0]$. Определим оператор S формулой

$$S[g](x) = g(x) + (\inf_{s \leq x} g(s))_-, \quad g \in \mathcal{G}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Предложение 2.1. Для любых $g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ и допустимых значений аргументов справедливы следующие утверждения:

(B1) $S[g](x) \geq g(x)_+$;

(B2) если $x_1 < x_2$, то выполнено неравенство $S[g](x_2) - S[g](x_1) \geq g(x_2) - g(x_1)$;

(B3) если непрерывная функция $h(x) \geq 0$ такова, что для любых $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $h(x_2) - h(x_1) \geq g(x_2) - g(x_1)$, то $h(x) \geq S[g](x)$ при всех x ;

(B4) если для любых $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $g_1(x_2) - g_1(x_1) \leq g_2(x_2) - g_2(x_1)$, то $S[g_1](x) \leq S[g_2](x)$ при всех x .

Доказательство. Утверждения (B1) и (B2) вытекают непосредственно из определения S . Докажем (B3). Пусть $S[g](x) > 0$ для некоторого $x \leq 0$. Положим $x_0 = \sup\{s < x: S[g](s) = 0\}$. При $t \in (x_0, x]$ имеем

$$0 < S[g](t) = g(t) + \left(\inf_{s \leq t} g(s) \right)_-,$$

следовательно, $(\inf_{s \leq x} g(s))_- = (\inf_{s \leq x_0} g(s))_-$. Поэтому

$$S[g](x) = S[g](x) - S[g](x_0) = g(x) - g(x_0) \leq h(x) - h(x_0) \leq h(x).$$

Докажем (B4). В силу (B2) для любых $x_1 < x_2$

$$S[g_2](x_2) - S[g_2](x_1) \geq g_2(x_2) - g_2(x_1) \geq g_1(x_2) - g_1(x_1),$$

следовательно, (B4) вытекает из (B3). Предложение 2.1 доказано.

Для $w > 0$ и $y \geq 0$ определим оператор T_y^w формулой

$$T_y^w[g](x) = g(x) - y(x + w)_+, \quad g \in \mathcal{G}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Предложение 2.2. При любых $w > 0$, $y \geq 0$ и $g \in \mathcal{G}$ имеет место равенство

$$S[T_y^w[g]](x) = S[T_y^w[S[g]]](x), \quad x \in (-\infty, 0].$$

Доказательство. Возьмем произвольные $x_1 < x_2 \leq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1)) - (T_y^w[g](x_2) - T_y^w[g](x_1)) \\ &= (S[g](x_2) - S[g](x_1)) - (g(x_2) - g(x_1)). \end{aligned}$$

В силу (B2) последнее выражение неотрицательно. Значит, по свойству (B4) выполнено неравенство $S[T_y^w[g]](x) \leq S[T_y^w[S[g]]](x)$, $x \leq 0$. Остается проверить, что $S[T_y^w[g]](x) \geq S[T_y^w[S[g]]](x)$, $x \leq 0$. В силу (B3) достаточно показать, что для всех $x_1 < x_2 \leq 0$

$$S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1) \geq T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1). \quad (2.4)$$

Для любого $x \leq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} S[T_y^w[g]](x) &= g(x) - y(x + w)_+ + \left(\inf_{s \leq x} (g(s) - y(s + w)_+) \right)_-, \\ T_y^w[S[g]](x) &= g(x) - y(x + w)_+ + \left(\inf_{s \leq x} g(s) \right)_-. \end{aligned}$$

Пусть $\inf_{s \leq x_1} g(s)$ достигается в точке s_1 , а $\inf_{s \leq x_2} g(s)$ достигается в точке s_2 . Если $s_2 \leq x_1$, то (2.4), очевидно, выполнено. Рассмотрим случай $s_2 > x_1$. Имеем

$$\begin{aligned} & (S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1)) - (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1)) \\ &= \left(\inf_{s \leq x_2} (g(s) - y(s + w)_+) \right)_- - \left(\inf_{s \leq x_1} (g(s) - y(s + w)_+) \right)_- \\ &\quad - (g(s_2)_- - g(s_1)_-). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \left(\inf_{s \leq x_1} (g(s) - y(s + w)_+) \right)_- &\leq (g(s_1) - y(x_1 + w)_+)_-, \\ \left(\inf_{s \leq x_2} (g(s) - y(s + w)_+) \right)_- &\geq (g(s_2) - y(s_2 + w)_+)_- \\ &\geq (g(s_2) - y(x_1 + w)_+)_-. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & (S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1)) - (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1)) \\ &\geq (g(s_2) - y(x_1 + w)_+)_- - (g(s_1) - y(x_1 + w)_+)_- - (g(s_2)_- - g(s_1)_-) \geq 0. \end{aligned}$$

Предложение 2.2 доказано.

Доказательство леммы 2.1. Если $\|H\|_\infty = 0$, то $\|H\|_1 = 0$, и искомая оценка тривиальна. Пусть $\|H\|_\infty > 0$. Без ограничения общности предполагаем, что $\sup_{x,y \in \mathbf{R}} H(x,y)$ достигается в точке $(0,0)$: $H(0,0) = \|H\|_\infty > 0$. Отметим, что можно считать функцию H финитной: $\text{supp}(H) \subset [-1,1]^2$. Действительно, положим

$$G(x,y) = \frac{1}{9} H(x,y) \varphi(x) \varphi(y), \quad x,y \in \mathbf{R},$$

где $\varphi(x) = \exp\{-1/(1-x^2)\} \mathbf{I}\{|x| < 1\}$. Очевидно, что $\|G\|_1 \leq \|H\|_1$, и в то же время $\|G\|_\infty \geq \|H\|_\infty/9e^2$. Кроме того, пользуясь оценкой $\|\varphi\|_\infty \leq 2$, нетрудно проверить, что G обладает свойствами (A1)–(A3).

Введем функцию $U(x,y) = S[T_y^1[H(\cdot,0)]](x)$, $x \leq 0$, $y \geq 0$. По свойству (B4) оператора S функция $U(x,y)$ не возрастает по y при всех $x \leq 0$. Непосредственно из определений операторов S и T_y^1 , $y \geq 0$, вытекает вложение $\text{supp}(U) \subset [-1,0] \times [0,\infty)$. В силу оценки $\text{Lip}_1(H) \leq 1$ функция $T_y^1[H(\cdot,0)]$ неположительна и не возрастает при $y \geq 1$, следовательно, $\text{supp}(U) \subset [-1,0] \times [0,1]$. Так как H обладает свойством (A2), для любых $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 0$ и $y \geq 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} H(x_1,0) + H(x_2,y) - H(x_2,0) - H(x_1,y) &\geq -y(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow H(x_2,y) - H(x_1,y) &\geq H(x_2,0) - H(x_1,0) - y(x_2 - x_1) \\ &= T_y^1[H(\cdot,0)](x_2) - T_y^1[H(\cdot,0)](x_1). \end{aligned}$$

Поэтому по свойству (B3) $H(x,y) \geq U(x,y)$, $x \leq 0$, $y \geq 0$. Таким образом, $\|H\|_1 \geq \|U\|_1$. Кроме того, очевидно, что $U(0,0) = H(0,0)$. А значит, достаточно доказать оценку $\|U\|_1 \geq c_3 f(U(0,0))$.

Для $k \in \mathbf{Z}_+$ введем $y_k = ak/2$, где $a = U(0,0)$. Воспользовавшись предложением 2.2, получаем, что для любых $k \in \mathbf{Z}_+$ и $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} U(0,y_{k+1}) - U(x,y_{k+1}) &= S[T_{y_{k+1}}^1[H(\cdot,0)]](0) - S[T_{y_{k+1}}^1[H(\cdot,0)]](x) \\ &= S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[T_{y_k}^1[H(\cdot,0)]]](0) - S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[T_{y_k}^1[H(\cdot,0)]]](x) \\ &= S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[S[T_{y_k}^1[H(\cdot,0)]]]](0) - S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[S[T_{y_k}^1[H(\cdot,0)]]]](x) \\ &= S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[U(\cdot,y_k)]](0) - S[T_{y_{k+1}-y_k}^1[U(\cdot,y_k)]](x). \end{aligned}$$

По свойству (B2) последнее выражение не меньше

$$T_{y_{k+1}-y_k}^1[U(\cdot,y_k)](0) - T_{y_{k+1}-y_k}^1[U(\cdot,y_k)](x) = U(0,y_k) - U(x,y_k) + x(y_{k+1} - y_k).$$

Следовательно,

$$U(x,y_k) \geq U(x,y_{k+1}) + U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1} - y_k). \quad (2.5)$$

Так как $U(x,y_k) \geq U(x,y_{k+1})$, то

$$U(x,y_k) \geq U(x,y_{k+1}) + (U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1} - y_k))_+.$$

Интегрируя последнее соотношение по $x \in [-1,0]$, получаем оценку

$$\int_{-1}^0 U(x,y_k) dx \geq \int_{-1}^0 U(x,y_{k+1}) dx + \frac{(U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}))^2}{2(y_{k+1} - y_k)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) \leq y_{k+1} - y_k$, которое вытекает из (2.5) при $x = -1$.

Положим $N = [2/a]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Имеем

$$\int_{-1}^0 U(x,y_k) dx \geq \sum_{l=k}^N \frac{(U(0,y_l) - U(0,y_{l+1}))^2}{2(y_{l+1} - y_l)} = \frac{1}{a} \sum_{l=k}^N (U(0,y_l) - U(0,y_{l+1}))^2.$$

Обозначая $d_k = U(0, y_k) - U(0, y_{k+1})$, $k = 1, \dots, N$, получаем

$$\int_0^\infty \int_{-1}^0 U(x, y) dx dy \geq \sum_{k=1}^N (y_k - y_{k-1}) \int_{-1}^0 U(x, y_k) dx \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k d_k^2. \quad (2.6)$$

Поскольку $U(0, y) = 0$ при $y \geq 1$, по свойству (B1)

$$\sum_{k=1}^N d_k = U(0, y_1) - U(0, y_{N+1}) = U(0, y_1) \geq T_{y_1}^1[H(\cdot, 0)](0) = H(0, 0) - y_1 = \frac{a}{2}. \quad (2.7)$$

Минимизируя (2.6) при условии (2.7) по $d_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$, имеем

$$\|U\|_1 \geq \frac{a^2}{12 \ln N} \geq \frac{1}{12} f(a).$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство леммы 2.2. Пусть $a = f^{-1}(r) \in (0, 1]$, $N = \lfloor 4/a \rfloor$. Введем $d_k = a/(64k \ln N)$, $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим монотонно возрастающую функцию $g(x)$, $x \leq 0$, вида

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{Na}{16}; \\ \sum_{l=k+1}^N d_l + \frac{16}{a} \left(x - \left(-\frac{ka}{16} \right) \right) d_k, & -\frac{ka}{16} \leq x \leq -\frac{(k-1)a}{16}, \quad k = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Имеем $1 > g(0) = \sum_{k=1}^N d_k \geq a/64$, $\text{Lip}(g) \leq 1/4$, $\text{supp}(g) \subset [-1/4, 0]$. Положим

$$H(x, y) = S[T_y^{1/4}[g]](x), \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

Рассмотрим $k_y = \lfloor (4y \ln N)^{-1} \rfloor \wedge N$, $y > 0$. Нетрудно показать, что функция $H(\cdot, y)$ равна нулю при $x \leq -k_y a/16$, не убывает при $-k_y a/16 \leq x \leq 0$, и если $-k_y a/16 \leq x_1 \leq x_2 \leq 0$, то

$$H(x_2, y) - H(x_1, y) = T_y^{1/4}[g](x_2) - T_y^{1/4}[g](x_1) = g(x_2) - g(x_1) - y(x_2 - x_1).$$

Следовательно, для любых $x_1 \leq x_2 \leq 0$, $0 \leq y_1 \leq y_2$ верна оценка

$$H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \geq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2). \quad (2.8)$$

Так как $k_y = 0$ при $y \geq 1/4$, то $\text{supp}(H) \subset [-1/4, 0] \times [0, 1/4]$.

Оценим $\text{Lip}_1(H)$ и $\text{Lip}_2(H)$. Возьмем любые $-1/4 \leq x_1 \leq x_2 \leq 0$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1/4$. По предложению 2.2 и свойству (B2)

$$\begin{aligned} H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) &= S[T_{y_2}^{1/4}[g]](x_2) - S[T_{y_2}^{1/4}[g]](x_1) \\ &= S \left[T_{y_2-y_1}^{1/4} [S[T_{y_1}^{1/4}[g]]] \right] (x_2) - S \left[T_{y_2-y_1}^{1/4} [S[T_{y_1}^{1/4}[g]]] \right] (x_1) \\ &= S \left[T_{y_2-y_1}^{1/4} [H(\cdot, y_1)] \right] (x_2) - S \left[T_{y_2-y_1}^{1/4} [H(\cdot, y_1)] \right] (x_1) \\ &\geq T_{y_2-y_1}^{1/4} [H(\cdot, y_1)](x_2) - T_{y_2-y_1}^{1/4} [H(\cdot, y_1)](x_1) \\ &= H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) - (x_2 - x_1)(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Учитывая оценку (2.8), имеем

$$0 \geq H(x_1, y_1) + H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) \geq -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1). \quad (2.9)$$

Подставляя $y_2 = 1/4$ в (2.9), получаем

$$0 \leq H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \leq (1/4 - y_1)(x_2 - x_1) \leq \frac{1}{4} (x_2 - x_1),$$

откуда $\text{Lip}_1(H) \leq 1/4$. Аналогичным образом убеждаемся, что $\text{Lip}_2(H) \leq 1/4$. Продолжим $H(x, y)$ на $\mathbf{R}^2$, полагая

$$H(x, y) = H(-x, y) = H(x, -y) = H(-x, -y), \quad (x, y) \in (-\infty, 0] \times [0, \infty).$$

Таким образом определенная функция H , очевидно, обладает свойством (A1), а свойство (A2) вытекает из (2.9). Оценим $\|H\|_1$ сверху. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 H(x, y) dx &= \int_{-\frac{k_y a}{16}}^0 H(x, y) dx \leq \int_{-\frac{k_y a}{16}}^0 (g(x) - g(-k_y a/16)) dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_y} \frac{ak}{16} d_k = \frac{a^2 k_y}{1024 \ln N}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее соотношение по $y \in (0, 1/4]$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^0 H(x, y) dx dy &\leq \int_0^{(4N \ln N)^{-1}} \frac{a^2 N}{1024 \ln N} dy + \int_{(4N \ln N)^{-1}}^{\frac{1}{4}} \frac{a^2 (4y \ln N)^{-1}}{1024 \ln N} dy \\ &\leq \frac{a^2}{4096 \ln^2 N} + \frac{a^2 \ln(4N \ln N)}{4096 \ln^2 N} \leq C_6 \frac{a^2}{\ln N} \leq C_6 f(a), \end{aligned}$$

где $0 < C_6 \leq 1/4$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|H\|_1 &= 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^0 H(x, y) dx dy \\ &\leq 4C_6 f(a) \leq 4C_6 f((64\|H\|_\infty) \wedge 1) \leq 4C_6 (64)^3 f(\|H\|_\infty). \end{aligned}$$

При этом $\|H\|_1 \leq 4C_6 f(a) = 4C_6 r \leq r$. Лемма 2.2 доказана.

Доказательство леммы 2.3. Пусть $F_X(t) = F_Y(t) = (t + 1/2)_+ \wedge 1$, $t \in \mathbf{R}$. Условие (2.2), очевидно, выполнено. Положим $F_{X,Y}(x, y) = H(x, y) + F_X(x)F_Y(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$. Заметим, что $F_{X,Y}$ является функцией распределения некоторого случайного вектора (X, Y) . Действительно, в силу (A2) приращение $F_{X,Y}$ на любом прямоугольнике неотрицательно. Легко видеть, что $F_{X,Y}$ обладает и другими свойствами функции распределения. Кроме того, $\text{cov}(\mathbf{I}\{X > x\}, \mathbf{I}\{Y > y\}) = F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y) \geq 0$ при всех $x, y \in \mathbf{R}$, откуда вытекает положительная ассоциированность (X, Y) (см., например, [1, теорема 1.1.5]). Лемма 2.3 доказана.

3. Приложения. Рассмотрим $X = \{X_t, t \in \mathbf{R}^d\}$ — квадратично интегрируемое измеримое строго стационарное случайное поле с непрерывной ковариационной функцией. Предположим, что X_0 имеет ограниченную плотность. Пусть W_n — последовательность растущих в смысле Ван Хова (см., например, [1, определение 3.1.1]) ограниченных измеримых множеств из $\mathbf{R}^d$. Возьмем произвольное $u \in \mathbf{R}$ и введем экскурсионное множество $A_n(u) = \{t \in W_n: X_t > u\}$. Определим $V_n(u) = |A_n(u)|$, где $|A|$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbf{R}^d$. В [10] доказано, что если случайное поле X квази-ассоциировано (см., например, [1, определение 1.5.8]), и

$$\text{cov}(X_0, X_t) = O(\|t\|_2^{-\alpha}), \quad \|t\|_2 \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

где $\alpha > 3d$, то при любом действительном u последовательность случайных величин $V_n(u)$ удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ):

$$\frac{V_n(u) - \mathbf{E} V_n(u)}{\sqrt{|W_n|}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(u)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

где

$$\sigma^2(u) = \int_{\mathbf{R}^d} \text{cov}(\mathbf{I}\{X_0 > u\}, \mathbf{I}\{X_t > u\}) dt.$$

Если наложить на X более жесткое условие ассоциированности и воспользоваться следствием 1.1, то можно получить ЦПТ (3.2) при менее строгих ограничениях на ковариационную функцию X . Доказательство следующего результата повторяет доказательство из [10] с заменой оценки (1.2) на (1.4) и ЦПТ для (BL, θ) -зависимых случайных полей на ЦПТ для ассоциированных случайных полей ([2, теорема 2]; см. также [11]).

Теорема 3.1. Если $X \in \mathbf{A}$ и (3.1) выполнено при некотором $\alpha > 2d$, то имеет место (3.2).

Непосредственным применением ЦПТ для ассоциированных случайных полей и оценки (1.4) можно получить ЦПТ для эмпирических функций распределения. Пусть $X = \{X_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ — строго стационарная последовательность случайных величин, имеющих непрерывную ф.р. F . Введем случайные процессы $\beta_n(u)$, где $u \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$, с помощью формулы

$$\beta_n(u) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}\{X_k \leq u\} - F(u) \right).$$

Для таких процессов верна следующая теорема.

Теорема 3.2. Если $X \in \mathbf{PA}$ или $X \in \mathbf{NA}$, и для некоторого $\delta < 1/2$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\text{cov}(F(X_0), F(X_k))|^\delta < \infty, \quad (3.3)$$

то конечномерные распределения β_n сходятся к конечномерным распределениям центрированного гауссовского процесса β с ковариационной функцией

$$\text{cov}(\beta(u), \beta(v)) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \text{cov}(\mathbf{I}\{X_0 \leq u\}, \mathbf{I}\{X_k \leq v\}), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

В [4] сходимостъ конечномерных распределений β_n установлена в предположении, что неравенство (3.3) выполнено при $\delta = 1/3$. Заметим также, что в [12] функциональная ЦПТ для эмпирических функций распределения получена при условии $\text{cov}(F(X_0), F(X_k)) = O(k^{-\alpha})$, $k \rightarrow \infty$, для некоторого $\alpha > 4$.

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.
2. Newman C. M. Normal fluctuations and the FKG inequalities. — Commun. Math. Phys., 1980, v. 74, № 2, p. 119–128.
3. Bagai I., Prakasa Rao B. L. S. Estimation of the survival function for stationary associated processes. — Statist. Probab. Lett., 1991, v. 12, p. 385–391.
4. Yu H. A Glivenko–Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences. — Probab. Theor. Related Fileds, 1993, v. 95, № 3, p. 357–370.
5. Matula P., Ziemba M. General covariance inequalities. — Cent. Eur. J. Math., 2011, v. 9, № 2 (2011), p. 281–293.
6. Matula P. A note on some inequalities for certain classes of positively dependent random variables. — Probab. Math. Statist., 2004, v. 24, № 1, p. 17–26.
7. Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W. Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
8. Newman C. M. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. Inequalities in Statistics and Probability. Hayward, CA, Institute of Mathematical Statistics, 1984, p. 127–140.
9. Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables, with applications. — Ann. Statist., 1983, v. 11, № 1, p. 286–295.
10. Bulinski A. V., Spodarev E., Timmermann F. Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields. — Bernoulli, 2012, v. 18, № 1, p. 100–118.
11. Булинский А. В. Центральная предельная теорема для положительно ассоциированных стационарных случайных полей. — Вестн. С.-Петербург. ун-та., 2011, сер. 1, вып. 2, с. 5–13.

12. *Louhichi S.* Weak convergence for empirical processes of associated sequences. — Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 2000, v. 36, №, p. 547–567.

Поступила в редакцию
24.X.2012

© 2013 г.

FEINBERG E. A.*, KASYANOV P. O.**,
ZADOIANCHUK N. V.**

FATOU'S LEMMA FOR WEAKLY CONVERGING PROBABILITIES¹⁾

Лемма Фату утверждает при определенных условиях, что интеграл нижнего предела последовательности функций не превышает нижнего предела соответствующих интегралов. Данная заметка описывает подобные неравенства, когда, в отличие от случая одной меры, функции интегрируются относительно разных мер, которые образуют слабо сходящуюся последовательность.

Ключевые слова и фразы: лемма Фату, вероятность, мера, слабая сходимость.

1. The inequality for nonnegative functions. Consider a measurable space $(S, \mathcal{B})$, where S is a metric space and $\mathcal{B}$ is its Borel σ -field. Let $\mathbf{P}(S)$ be the set of probability measures on $(S, \mathcal{B}(S))$. According to Fatou's lemma, [8], for any $\mu \in \mathbf{P}(S)$ and for any sequence of nonnegative measurable functions $f_1, f_2, \dots$

$$\int_S \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(s) \mu(ds) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n(s) \mu(ds). \quad (1.1)$$

A sequence of probability measures $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ from $\mathbf{P}(S)$ converges weakly to $\mu \in \mathbf{P}(S)$ if for any bounded continuous function f on S

$$\int_S f(s) \mu_n(ds) \rightarrow \int_S f(s) \mu(ds) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (1.2)$$

A sequence of probability measures $\{\mu_n\}$ from $\mathbf{P}(S)$ converges setwise to $\mu \in \mathbf{P}(S)$ if (1.2) holds for any bounded measurable function f . If $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbf{P}(S)$ converges setwise to $\mu \in \mathbf{P}(S)$, according to Royden [5, p. 231], for any sequence of nonnegative measurable function $f_1, f_2, \dots$

$$\int_S \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(s) \mu(ds) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n(s) \mu_n(ds). \quad (1.3)$$

However, this is not true, if $\mu_1, \mu_2, \dots$ converge weakly to μ .

Indeed, let $S = [0, 1]$, $\mu_n(A) = \mathbf{I}\{1/n \in A\}$, $\mu(A) = \mathbf{I}\{0 \in A\}$ for $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, and $f(s) = f_n(s) = \mathbf{I}\{s = 0\}$ for $n = 1, 2, \dots$ and $s \in [0, 1]$. Then $\int_S f(s) \mu(ds) = 1$, $\int_S f(s) \mu_n(ds) = 0$, and (1.3) does not hold.

Theorem 1.1 presents Fautou's lemma for weakly converging measures μ_n and non-negative functions f_n . This fact is useful for the analysis of Markov decision processes

* Department of Applied Mathematics and Statistics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794-3600, USA; e-mail: eugene.feinberg@sunysb.edu

** Institute for Applied System Analysis, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Peremogy ave., 37, Build. 35, 03056, Kyiv, Ukraine; e-mail: kasyanov@i.ua; ninelll@i.ua

¹⁾ This research was partially supported by NSF grants CMMI-0928490 and CMMI-1335296, by the Ukrainian State Fund for Fundamental Research under grant GP/F49/070, and by grant 2273/13 from the National Academy of Sciences of Ukraine.