Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Аппроксимация второго порядка для распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом и бесконечной дисперсией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 5–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:18:01

© 2014 г.

БОРОВКОВ А. А.*

**АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ
СНОСОМ И БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ¹⁾**

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $a := -\mathbf{E}\xi > 0$, $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j$, $S_0 = 0$, $S := \sup_{n \geq 0} S_n$, $F_+(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t)$, $F_-(t) := \mathbf{P}(\xi \leq -t)$, $F_+^I(t) = \int_t^\infty F_+(u) du$. Хорошо известно (см., например, [1], [5]), что если функция $F_+^I(t)$ субэкспоненциальна, то $\mathbf{P}(S \geq x) \sim F_+^I(x)/a$ при $x \rightarrow \infty$. В [2] (см. также [3]) при условии $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ найден следующий член асимптотического разложения для $\mathbf{P}(S \geq x)$ при $x \rightarrow \infty$ (порядка $F_+(x)$) в случае, когда функция $F_+(x)$ либо правильно меняется на бесконечности, либо семизэкспоненциальна. В настоящей работе получена аппроксимация второго порядка для $\mathbf{P}(S \geq x)$ в случае, когда $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$, а функции $F_\pm(t)$ удовлетворяют некоторым условиям правильного изменения. Полученные результаты распространены на обобщенные процессы восстановления.

Ключевые слова и фразы: максимум сумм случайных величин; максимум обобщенного процесса восстановления; аппроксимация второго порядка; правильное изменение; асимптотика второго порядка для функции восстановления; большие отклонения сумм случайных величин, не имеющих среднего.

1. Введение и основные результаты. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$a := -\mathbf{E}\xi > 0, \quad S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad S_0 = 0, \quad S := \sup_{n \geq 0} S_n,$$

$$F_+(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t), \quad F_-(t) := \mathbf{P}(\xi \leq -t), \quad F_\pm^I(t) := \int_t^\infty F_\pm(u) du.$$

Хорошо известно (см., например, [1], [5]), что если функция $F_+^I(t)$ субэкспоненциальна, то

$$\mathbf{P}(S \geq x) \sim \frac{F_+^I(x)}{a} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00285).

Обозначим через $\mathcal{R}$ класс правильно меняющихся функций (п.м.ф.) на бесконечности, т.е. класс функций $G(t)$, представимых в виде

$$G(t) = t^{-\gamma} L(t), \quad (1.2)$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \rightarrow \infty$.

В [2], [3, теорема 7.5.3] было установлено следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $F_+ \in \mathcal{R}$ или F_+ семиэкспоненциальна, $\mathbf{E} \xi^2 < \infty$, распределение ξ нерешетчатое. Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \frac{F_+^I(x)}{a} + cF_+(x) + o(F_+(x)), \quad (1.3)$$

где

$$c = \frac{\mathbf{E} \xi^2}{2a^2} - \frac{\mathbf{E} S}{a}. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.3) сохранится и в решетчатом случае, но при несколько ином значении постоянной c (см. [2], [3, теорема 7.5.3]); более подробную библиографию см. в [3].

Из представлений (1.3), (1.4) видно, что в случае $\mathbf{E} \xi^2 = \infty$ асимптотика второго порядка $\mathbf{P}(S \geq x)$ (если таковая существует) будет иной, чем в (1.3).

Чтобы сформулировать основное утверждение настоящей работы нам понадобится еще ряд обозначений. Через $\mathcal{R}_\gamma$ мы обозначим подкласс п.м.ф. (1.2) с показателем $-\gamma$. Пусть далее

$$\eta_+ := \min\{k \geq 1: S_k > 0\}, \quad \eta_- := \min\{k \geq 1: S_k \leq 0\}$$

($\eta_\pm = \infty$, если соответственно $\max_{k \geq 1} S_k \leq 1$, $\min_{k \geq 1} S_k > 0$),

$$\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$$

(случайные величины $\chi_\pm$ определены лишь на событиях $\{\eta_\pm < \infty\}$). Положим $\xi_+ = \max(0, \xi)$, $\xi_- = \max(0, -\xi)$, так что $F_\pm(t) = \mathbf{P}(\xi_\pm \geq t)$. Мы будем различать следующие две возможности:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]. \quad & \mathbf{E} \xi_-^2 < \infty, \quad F_+ \in \mathcal{R}_\alpha, \quad \alpha \in (1, 2); \\ [\mathbf{R}_\beta^\alpha]. \quad & \mathbf{E} \xi_-^2 = \infty, \quad F_- \in \mathcal{R}_\beta, \quad \beta \in (1, 2), \quad F_+ \in \mathcal{R}_\alpha, \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Теорема 1.2. Пусть $a = -\mathbf{E} \xi > 0$. Тогда:

(i) если выполнено условие $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \frac{F_+^I(x)}{a} + \frac{2(\alpha - 1)I(\alpha)(F_+^I(x))^2}{a^2} (1 + o(1)), \quad (1.5)$$

где $I(\alpha) := \int_0^{1/2} s^{1-\alpha} (1-s)^{-\alpha} ds < \infty$ при $\alpha \in (1, 2)$;

(ii) если выполнено условие $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \in (1, 2)$, и $F_-(x) = O(F_+(x))$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S \geq x) &= \frac{F_+^I(x)}{a} + \frac{2(\alpha - 1)I(\alpha)(F_+^I(x))^2}{a^2} (1 + o(1)) \\ &+ \frac{C(\alpha, \beta)}{a^2} F_-^I(x) F_+^I(x) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $C(\alpha, \beta) := (\alpha - 1) \int_1^\infty s^{-\alpha} (s - 1)^{1-\beta} ds < \infty$ при $\beta \in (1, 2)$;

(iii) если выполнены условие $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\beta \in (1, 2)$, и одно из двух условий:

(b) $\alpha \in (1, 2)$, $F_-(x) \gg F_+(x)$ при $x \rightarrow \infty$;

(c) $\alpha > 2$, $\alpha \neq 3$,

то

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \frac{F_+^I(x)}{a} + \frac{C(\alpha, \beta)}{a^2} F_-^I(x) F_+^I(x) (1 + o(1)). \quad (1.7)$$

(Разделы (b), (c) в теореме 1.2 соответствуют классификации (a)–(c), введенной ниже, перед теоремой 3.1.)

Естественно ожидать из соображений непрерывности, что утверждение п. (iii), (c) сохранится и при $\alpha = 3$.

Отметим, что поправочный член в теореме 1.1 имеет относительно главной части порядок малости $1/x$. В теореме 1.2 этот порядок составляет $\max(F_-^I(x), F_+^I(x)) \gg 1/x$, $x \rightarrow \infty$.

При изучении асимптотики $\mathbf{P}(S \geq x)$ мы будем использовать факторизационное тождество

$$\mathbf{E} e^{i\lambda S} = \frac{1 - p}{1 - \mathbf{E}(e^{i\lambda \chi_+}; \eta_+ < \infty)} = \frac{1 - p}{1 - p \mathbf{E} e^{i\lambda \chi}}, \quad (1.8)$$

где χ есть случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}(\chi \geq x) = \mathbf{P}(\chi_+ \geq x \mid \eta_+ < \infty),$$

и

$$p := \mathbf{P}(\eta_+ < \infty) = \mathbf{P}(S > 0).$$

Из (1.8) следует, что

$$\mathbf{P}(S \geq x) = (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \mathbf{P}(X_n \geq x), \quad (1.9)$$

где $X_0 = 0$, $X_n := \sum_{j=1}^n \chi_j$ и χ_j , $j = 1, 2, \dots$, — независимые копии χ . Из соотношения (1.9) видно, что для более полного знания асимптотики $\mathbf{P}(S \geq x)$ при $x \rightarrow \infty$ мы должны более полно изучить асимпотику $\mathbf{P}(\chi \geq x)$ и найти асимпотику второго порядка вероятности $\mathbf{P}(X_n \geq x)$ при $n \geq 2$. Этим двум задачам будут посвящены последующие два раздела: п. 2 и п. 3. Доказательство основной теоремы 1.2 приведено

в п. 4. В п. 5 полученные результаты распространены на обобщенные процессы восстановления.

Результаты работы носят «теоретический» характер. Однако мотивированы они были главным образом приложениями. Автору не раз приходилось слышать, что, например, при не очень больших x приближения первого порядка (1.1) не всегда оказываются удовлетворительными.

В случае конечной дисперсии аппроксимация второго порядка (1.3) использовалась в [7] в задаче страхования с кредитованием. Аналогичным образом результаты теоремы 1.2 могут быть использованы в той же задаче в случае бесконечной дисперсии.

2. Уточнения теоремы восстановления и асимптотик распределений первой положительной и первой отрицательной сумм. Пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ — неотрицательные одинаково распределенные независимые случайные величины $a_\zeta := \mathbf{E}\zeta < \infty$, $F_\zeta(t) := \mathbf{P}(\zeta \geq t)$,

$$Z_0 = 0, \quad Z_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j, \quad n \geq 1, \quad H(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n < t).$$

В дальнейшем мы будем различать арифметические и неарифметические случайные величины; при этом неарифметичность мы будем понимать в широком смысле: не существует такого числа d , что все возможные значения случайной величины кратны d .

Теорема 2.1. Пусть ζ_j неарифметичны. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $b_\zeta := \mathbf{E}\zeta^2 < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$

$$H(t) = \frac{t}{a_\zeta} + \frac{b_\zeta}{2a_\zeta^2} + o(1). \quad (2.1)$$

2. Если $b_\zeta = \infty$ и $F_\zeta^I(t) := \int_t^\infty F_\zeta(u) du \in \mathcal{R}_\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, то при $t \rightarrow \infty$

$$H(t) = \frac{t}{a_\zeta} + \frac{tF_\zeta^I(t)}{(1-\gamma)a_\zeta^2} (1 + o(1)). \quad (2.2)$$

Если ζ_j арифметичны, то при целых t утверждения теоремы сохраняются, но b_ζ в (2.1) следует заменить на $b_\zeta + a_\zeta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы в случае $b_\zeta < \infty$ хорошо известно (см., например, [4, гл. XI], [5, гл. X]). Тем не менее ради цельности изложения мы приведем здесь полное доказательство теоремы, в котором существенное различие между случаями $b_\zeta < \infty$ и $b_\zeta = \infty$ отсутствует.

Обозначим

$$\eta(t) := \min\{k: Z_k \geq t\}, \quad \chi(t) := Z_{\eta(t)} - t.$$

Тогда для неотрицательных ζ в силу тождества Вальда (см., например, [5, гл. X])

$$H(t) = \mathbf{E} \eta(t) = \frac{t + \mathbf{E} \chi(t)}{a_\zeta}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{P}(\chi(t) \geq u) = \int_0^t dH(v) \mathbf{P}(\zeta \geq t - v + u),$$

так что

$$\mathbf{E} \chi(t) = \int_0^t dH(v) F_\zeta^I(t - v). \quad (2.4)$$

В силу основной теоремы восстановления для неарифметических ζ имеем $H(v + \Delta) - H(v) \sim \Delta/a_\zeta$ при $v \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\Delta > 0$. Отсюда и из (2.4) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \chi(t) \sim \frac{1}{a_\zeta} \int_0^t F_\zeta^I(u) du \rightarrow \frac{b_\zeta}{2a_\zeta}. \quad (2.5)$$

Если $b_\zeta < \infty$, то отсюда следует (2.1). Если $b_\zeta = \infty$ и $F_\zeta^I(t) \in \mathcal{R}_\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, то из равенства (2.3) и первого соотношения в (2.5) получаем (2.2) (о свойствах п.м.ф. и интегралов от них см., например, [3], [6]).

Доказательство в случае арифметических ζ_j вполне аналогично (см. [4, гл. X]). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь асимптотику распределения первой отрицательной суммы χ_- .

О п р е д е л е н и е 2.1. Функция $F(t)$ называется *асимптотически локально постоянной* или просто *локально постоянной* (л.п.), если при $t \rightarrow \infty$ и любом фиксированном c

$$\frac{F(t + c)}{F(t)} \rightarrow 1.$$

Нам понадобится следующее утверждение. Положим

$$\zeta := -\chi_-.$$

Лемма 2.1. Пусть $a = -\mathbf{E} \xi > 0$. Тогда:

(i) выполнено равенство

$$a_\zeta := \mathbf{E} \zeta = \frac{a}{1 - p}; \quad (2.6)$$

(ii) при всех $t > 0$

$$1 \leq \frac{\mathbf{P}(\zeta \geq t)}{F_-(t)} \leq \frac{1}{1 - p}; \quad (2.7)$$

(iii) если F_- — л.п., то при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta \geq t) \sim \frac{F_-(t)}{1 - p}. \quad (2.8)$$

Следствие 2.1. 1) $b_\zeta = \mathbf{E}\zeta^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi_-^2 < \infty$.

2) Если F_- — л.п. и $F_-^I(t) \in \mathcal{R}_\gamma$, то $F_\zeta^I = F_-^I(t)/(1-p) \in \mathcal{R}_\gamma$.

Доказательство леммы 2.1. Утверждения леммы 2.1 известны (см., например, [5, гл. XII]). Однако их доказательство не занимает много места, и мы для полноты изложения его приведем. Обозначим $f(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda\xi}$ и воспользуемся следующим факторизационным тождеством, справедливым при $a > 0$:

$$1 - f(\lambda) = (1 - \mathbf{E}(e^{i\lambda\chi_+}; \eta_+ < \infty))(1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}). \quad (2.9)$$

Это тождество можно переписать в виде

$$1 - f(\lambda) = (1 - p\mathbf{E}e^{i\lambda\chi})(1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}). \quad (2.10)$$

Если поделить обе части тождества (2.10) на λ и устремить λ к 0, то мы получим (2.6). Из (2.10), (1.8) получаем

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-} &= \frac{\mathbf{E}e^{i\lambda S}}{1-p} (1 - f(\lambda)), \\ \mathbf{P}(\zeta \geq t) = \mathbf{P}(\chi_- \leq -t) &= \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \mathbf{P}(S \in du) \mathbf{P}(\xi \leq -t-u) \\ &= \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \mathbf{P}(S \in du) F_-(t+u). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что при всех $t > 0$ ($\mathbf{P}(S=0) = 1-p$) справедливо (2.7). Кроме того, если F_- — л.п., то из (2.11) получаем (2.8). Лемма 2.1 доказана.

Следующим шагом при изучении асимптотики $\mathbf{P}(S \geq x)$ является описание асимптотики функции

$$U(t) := \mathbf{P}(\chi \geq t).$$

Теорема 2.2. Пусть $a > 0$ и распределение ξ неарифметично. Тогда:

(i) если $\mathbf{E}\xi_-^2 < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$

$$U(t) = \frac{(1-p)F_+^I(t)}{pa} + \frac{b_\zeta(1-p)^2F_+(t)}{2pa^2} + o(F_+(t)); \quad (2.12)$$

(ii) если выполнено условие $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, то при $t \rightarrow \infty$

$$U(t) = \frac{1-p}{pa} F_+^I(t) + \frac{1-p}{pa^2} C(\alpha, \beta) F_+^I(t) F_-^I(t) (1 + o(1)),$$

где $C(\alpha, \beta) = (\alpha-1) \int_1^\infty s^{-\alpha} (s-1)^{1-\beta} ds$.

Если распределение ξ арифметично, то при целых t утверждения теоремы сохраняются, но коэффициент b_ζ в (2.12) следует заменить на $b_\zeta + a_\zeta$.

Доказательство. В силу тождества (2.10) имеем

$$pU(t) = p\mathbf{P}(\chi \geq t) = \int_0^\infty dH(u) F_+(t+u) = - \int_t^\infty H(v-t) dF_+(v). \quad (2.13)$$

Если $\mathbf{E} \xi_-^2 < \infty$, то $b_\zeta < \infty$ в силу следствия 2.1 и по теореме 2.1 и лемме 2.1

$$H(t) = \frac{t(1-p)}{a} + \frac{b_\zeta(1-p)^2}{2a^2} + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Стало быть,

$$pU(t) = -\frac{1-p}{a} \int_t^\infty (v-t) dF_+(v) + \frac{b_\zeta(1-p)^2}{2a^2} F_+(t) + o(F_+(t)),$$

где $-\int_t^\infty (v-t) dF_+(v) = F_+^I(t)$.

Это доказывает (2.12).

Если $\mathbf{E} \xi_-^2 = \infty$, то по условиям теоремы 2.2 F_- — л.п. и $F_-^I \in \mathcal{R}_\gamma$ при $\gamma = \beta - 1$. В силу теоремы 2.1 и леммы 2.1 $F_\zeta^I(t) \sim (1-p)^{-1} F_-^I(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$H(t) = \frac{t(1-p)}{a} + \frac{tF_-^I(t)(1-p)}{a^2(1-\gamma)} (1 + o(1)).$$

Полагая $Q(t) := tF_-^I(t)$, мы в силу (2.13) получим

$$pU(t) = \frac{1-p}{a} F_+^I(t) - \frac{1-p}{(1-\gamma)a^2} \int_t^\infty Q(v-t) dF_+(v). \quad (2.14)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} - \int_t^\infty Q(v-t) dF_+(v) &= \int_t^\infty F_+(v) d_v Q(v-t) \\ &= \int_t^\infty F_+(v) F_-^I(v-t) dv - \int_t^\infty F_+(v)(v-t) F_-(v-t) dv. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Делая замену переменных $v = st$, мы получим для первого интеграла в правой части (2.15) значение

$$tF_+(t)F_-^I(t) \int_1^\infty \frac{F_+(st)}{F_+(t)} \frac{F_-^I(t(s-1))}{F_-^I(t)} ds, \quad (2.16)$$

где подынтегральная функция для каждого s сходится при $t \rightarrow \infty$ к $s^{-\alpha}(s-1)^{-\gamma}$, $\gamma = \beta - 1$. Кроме того, в силу свойств п.м.ф. (см., например, [2], [6]) подынтегральная функция для заданного $\varepsilon > 0$ при всех $s > 1$ и всех достаточно больших t не превосходит $cs^{-\alpha+\varepsilon}(s-1)^{-\gamma+\varepsilon}$,

$c = \text{const.}$ Так как $\alpha > 1$, то при $\varepsilon < \gamma/2$ мы получаем, что подынтегральная функция в (2.16) допускает интегрируемую мажоранту и, стало быть,

$$\int_t^\infty F_+(v)F_-^I(v-t)dv \sim CtF_+(t)F_-^I(t), \quad C = \int_1^\infty s^{-\alpha}(s-1)^{-\gamma}ds.$$

Заметим теперь, что $tF_-(t) \sim (\beta-1)F_-^I(t)$ и, следовательно, второй интеграл в правой части (2.15) имеет с точностью до множителя $(\beta-1)$ ту же асимптотику, что и первый. Поэтому при $t \rightarrow \infty$

$$-\int_t^\infty Q(v-t)dF_+(v) \sim (2-\beta)CtF_+(t)F_-^I(t).$$

Так как $tF_+(t) \sim (\alpha-1)F_+^I(t)$, то вместе с (2.14) это доказывает второе утверждение теоремы.

В арифметическом случае изменения в доказательстве сводятся лишь к замене коэффициента b_ζ на $b_\zeta + a_\zeta$ в соответствии с теоремой 2.1. Теорема 2.2 доказана.

3. Аппроксимация второго порядка вероятностей больших отклонений сумм неотрицательных случайных величин, не имеющих среднего. Обратимся теперь к представлению (1.9) и уточним асимптотику $\mathbf{P}(X_n \geq x)$, $n \geq 2$, при $x \rightarrow \infty$, используя асимптотические разложения для $U(x) = \mathbf{P}(\chi \geq x)$, полученные в теореме 2.2.

Отметим, что соотношение (1.9) можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \mathbf{P}(X_\tau \geq x),$$

где τ не зависит от $\{X_n\}$, $\mathbf{P}(\tau = n) = (1-p)p^n$, $n = 0, 1, \dots$.

Аппроксимация $\mathbf{P}(S_n \geq x)$ второго и более высоких порядков при $x \rightarrow \infty$, когда существует $\mathbf{E}\xi = 0$, а $F_+(x)$ есть п.м.ф., изучена весьма полно в [3]. Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то при некоторых предположениях на гладкость $F_+(x)$ при $x \rightarrow \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = nF_+(x) \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)(n-1)\mathbf{E}\xi^2}{2x^2} (1 + o(1)) \right]$$

равномерно по $n \leq cx^2/\ln x$ при некотором $c > 0$ и $x \rightarrow \infty$, где $-\alpha$ — степенной показатель п.м.ф. $F_+(x)$.

Если $\mathbf{E}\xi$ не существует, то природа второго члена асимптотики для $\mathbf{P}(S_n \geq x)$ существенно меняется, как это видно из теоремы 3.1, приведенной ниже.

Как уже отмечалось, мы будем изучать в этом пункте асимптотику $\mathbf{P}(X_n \geq x)$, $n \geq 2$, для сумм $X_n = \sum_{j=1}^n \chi_j$, где в соответствии с теоремой 2.2 хвост $U(x) = \mathbf{P}(\chi \geq x)$ распределения χ представим при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$U(x) = V(x) + w(x)(1 + o(1)), \quad (3.1)$$

где

1) $V(x) = \int_x^\infty v(t) dt$, функция $v \in \mathcal{R}_\alpha$, $\alpha > 1$, монотонно убывает, так что

$$V(x) \sim \frac{v(x)x}{\alpha - 1} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad V \in \mathcal{R}_{\alpha-1};$$

2) функция $w \in \mathcal{R}_\gamma$ монотонно убывает, $\gamma > \alpha - 1$.

Согласно теореме 2.2, при выполнении $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$, в (3.1) имеем

$$V(x) = \frac{(1-p)F_+^I(x)}{pa}, \quad w(x) = \frac{b_\zeta(1-p)^2 F_+(x)}{2pa^2},$$

так что $\gamma = \alpha$.

При выполнении $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\alpha > 1$, $\beta \in (0, 1)$, функция $V(x)$ сохраняет прежнее значение,

$$w(x) = \frac{1-p}{pa^2} C(\alpha, \beta) F_+^I(x) F_-^I(x),$$

так что $\gamma = \alpha + \beta - 2 > \alpha - 1$, $\alpha > 1$ — любое число.

Положим

$$\Pi := nU(x) \quad (\sim nV(x) \text{ при } x \rightarrow \infty). \quad (3.2)$$

Из теоремы 2.6.1 в [3] вытекает следующее утверждение. Если $U(x) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $\alpha \in (1, 2)$, то существует функция $\theta(t) \downarrow 0$, $t \downarrow 0$, такая, что

$$\left| \frac{\mathbf{P}(X_n \geq x)}{\Pi} - 1 \right| < \theta(\Pi). \quad (3.3)$$

Если существует $a_\chi := \mathbf{E}\chi < \infty$, то обозначим

$$\Pi_1 := nU(x - a_\chi n).$$

Если, кроме того, $U \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $\alpha \in (2, 3)$ или $\alpha > 3$, то из теорем 3.4.1, 4.4.1 в [3] вытекает, что существует функция $\theta(t) \downarrow 0$, $t \downarrow 0$, такая, что

$$\left| \frac{\mathbf{P}(X_n \geq x)}{\Pi_1} - 1 \right| < \theta(\Pi_1). \quad (3.4)$$

В дальнейшем нам понадобятся эти утверждения лишь для $n = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Можно считать, например, что везде в дальнейшем $n < x^\rho$, где $\rho < \min(1/2, (\alpha - 1)/2)$ фиксировано. (На самом деле нам достаточно рассматривать $n < c \ln x$, $c = \text{const}$; см. п. 4.) Для таких n и $x \rightarrow \infty$ выполняется $\Pi_1 \rightarrow 0$ (если $a_\chi < \infty$) и функции Π и Π_1 асимптотически эквивалентны:

$$\Pi \sim \Pi_1 \quad \text{при } \Pi_1 \rightarrow 0 \quad (\text{или при } \Pi \rightarrow 0, \quad n = o(x)).$$

Поэтому везде в дальнейшем (в тех случаях, когда $a_\chi < \infty$) мы для единообразия вместо Π_1 будем писать Π , имея в виду, что $n = o(x)$.

Соотношения (3.3), (3.4) при $\Pi \rightarrow 0$ дают *аппроксимацию первого порядка* для функции

$$U_n(x) = \mathbf{P}(X_n \geq x).$$

Эта аппроксимация является *равномерной* по всем n и x таким, что $nU(x) = \Pi \rightarrow 0$; мы будем записывать ее в виде

$$U_n(x) = \Pi(1 + \bar{o}(1)). \quad (3.5)$$

Равномерность означает, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \frac{U_n(x)}{\Pi} - 1 \right| < \varepsilon$$

при всех n и x таких, что $\Pi < \delta$. Равномерность такого вида будет иметь место во всех соотношениях этого пункта, например, в соотношениях $U(x) = V(x)(1 + \bar{o}(1))$ (так как $\Pi \rightarrow 0$ влечет за собой $x \rightarrow \infty$),

$$\left| \frac{U_n(tx)}{\Pi} - t^{1-\alpha} \right| = \bar{o}(1), \quad t > 0, \quad (3.6)$$

и др. При этом в силу свойств п.м.ф. (см., например, [3], [6]) сходимость в (3.6) будет также равномерной и по t из любого отрезка $[t_1, t_2]$, $t_1 > 0$.

Символ $\bar{O}(1)$ будет иметь аналогичный смысл равномерности: мы будем писать $\varphi(x, n) = \bar{O}(1)$, если найдется постоянная c такая, что $\varphi(x, n) \leq c$ для всех n и x , для которых Π (или Π_1) достаточно мало. Символы $\bar{o}(\varphi(x, n))$ и $\bar{O}(\varphi(x, n))$ для $\varphi(x, n) > 0$ означают соответственно $\varphi(x, n)\bar{o}(1)$ и $\varphi(x, n)\bar{O}(1)$.

Рассмотрим следующие три непересекающиеся возможности.

(а) $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) = O(V^2(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Этот случай реализуется при условии $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, а также при условиях $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$, $F_-^I(x) = O(F_+^I(x))$ при $x \rightarrow \infty$.

(б) $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) \gg V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Этот случай имеет место при выполнении $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, $F_-^I(x) \gg F_+^I(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

(с) $\alpha > 2$. Здесь всегда выполнено $w(x) \gg V^2(x)$. Этот случай возможен лишь при условии $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$.

Следующее утверждение посвящено аппроксимации *второго порядка* для $U_n(x)$ при выполнении (3.1).

Теорема 3.1.. Пусть выполнено (3.1) и $\Pi = nU(x) \rightarrow 0$. Тогда:

(а) если $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) = O(V^2(x))$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$U_n(x) = nU(x) + n(n-1)V^2(x)A(\alpha)(1 + \bar{o}(1)), \quad (3.7)$$

где

$$A(\alpha) = 2^{2(\alpha-1)} + (\alpha-1) \int_0^{1/2} s^{1-\alpha}(1-s)^{-\alpha} ds; \quad (3.8)$$

(b) если $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) \gg V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$U_n(x) = nU(x) + \bar{o}(nw(x)) + \bar{O}(n(n-1)V^2(x)); \quad (3.9)$$

(c) если $\alpha > 2$, $\alpha \neq 3$, $n < x^\rho$, то при достаточно малом $\rho > 0$

$$U_n(x) = nU(x) + \bar{o}(nw(x)). \quad (3.10)$$

В [8] был получен следующий результат. Пусть $\mathcal{L}^2$ есть класс суб-экспоненциальных распределений таких, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(S_2 \geq x) - 2F_+(x) + F_+^2(x)}{F_+^2(x)} = 0.$$

Тогда при любом фиксированном n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(S_n \geq x) - nF_+(x)}{F_+^2(x)} = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

Сравнение с теоремой 3.1, (а) показывает, что $\mathcal{L}^2 \cap \mathcal{R}_{\alpha-1}$ при $\alpha \in (1, 2)$ есть класс распределений, для которых $A(\alpha) = -1/2$. Но $A(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (1, 2)$, так что класс $\mathcal{L}^2 \cap \mathcal{R}_{\alpha-1}$ при $\alpha \in (1, 2)$ пуст.

Доказательство теоремы 3.1. (а) Положим

$$y = \frac{x}{r}, \quad r \in (2, 3);$$

$$G_n = \{X_n \geq x\}, \quad B_j = \{\chi_j < y\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^n B_j.$$

Тогда, согласно теореме 2.2.1 в [3], для $\alpha \in (1, 2)$

$$\mathbf{P}(G_n B) = \bar{O}(\Pi^r). \quad (3.11)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n \bar{B}) + \mathbf{P}(G_n B) = \mathbf{P}(G_n \bar{B}) + \bar{O}(\Pi^r), \\ \mathbf{P}(G_n \bar{B}) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n G_n \bar{B}_j\right) = \Sigma_1 - \Sigma_2 + \bar{O}(\Pi^3), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \bar{B}_j), \quad \Sigma_2 = \sum_{i < j \leq n} \mathbf{P}(G_n \bar{B}_i \bar{B}_j). \quad (3.13)$$

Оценки слагаемых этих сумм мы выделим в отдельные утверждения.

Лемма 3.1. При $\alpha \in (1, 2)$, $\Pi \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) = U(x) + (\alpha - 1)(n - 1)U^2(x)I(\alpha)(1 + q_2(r) + \bar{o}(1)) \\ + (n - 1)V^2(x) \cdot 2^{2\alpha-1}(1 + q_3(r) + \bar{o}(1)) + \bar{o}(w(x)),$$

где $q_i(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$, $i = 2, 3$.

(Порядковая нумерация слагаемых $q_i(r)$, $i = 1, \dots, 7$, устанавливается в доказательствах лемм 3.1, 3.2.)

Доказательство. Имеем

$$P := \mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) = \mathbf{P}(G_n \bar{B}_n) = P_1 + P_2, \quad (3.14)$$

где

$$P_1 = \mathbf{P}(X_{n-1} \geq x - y, \chi_n \geq y), \quad P_2 = \mathbf{P}(X_{n-1} + \chi_n \geq x, X_{n-1} < x - y).$$

При $\Pi \rightarrow 0$ находим

$$P_1 = \mathbf{P}(X_{n-1} \geq x - y) \mathbf{P}(\chi_n \geq y) = (n - 1)U(x - y)U(y)(1 + \bar{o}(1)) \\ = (n - 1)r^{2(\alpha-1)}(r - 1)^{1-\alpha}U^2(x)(1 + \bar{o}(1)) \\ = (n - 1) \cdot 2^{2(\alpha-1)}(1 + q_1(r))U^2(x)(1 + \bar{o}(1)), \quad (3.15)$$

где $q_1(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$. Далее,

$$P_2 \equiv I_0^{x-y} := - \int_0^{x-y} dU_{n-1}(t)U(x - t) = I_0^{\varepsilon x} + I_{\varepsilon x}^{x-y},$$

где

$$I_0^{\varepsilon x} = - \int_0^{\varepsilon x} dU_{n-1}(t)U(x - t)$$

и $\varepsilon = \varepsilon(\Pi) \rightarrow 0$ при $\Pi \rightarrow 0$ достаточно медленно, так что $\varepsilon x \rightarrow \infty$. При $t < \varepsilon x$ имеем

$$U(x - t) = V(x) + tv(x)(1 + \bar{o}(1)) + w(x)(1 + \bar{o}(1)). \quad (3.16)$$

Поэтому

$$I_0^{\varepsilon x} = V(x)[1 - U_{n-1}(\varepsilon x)] + v(x)(1 + \bar{o}(1)) \\ \times \int_0^{\varepsilon x} t \mathbf{P}(\chi_{n-1} \in dt) + w(x)(1 + \bar{o}(1)).$$

Здесь при ε , стремящемся к 0 настолько медленно, что $U(\varepsilon x) = \varepsilon^{1-\alpha}U(x)(1 + \bar{o}(1))$, выполняются соотношения

$$\int_0^{\varepsilon x} t \mathbf{P}(X_{n-1} \in dt) = \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} \varepsilon x U_{n-1}(\varepsilon x)(1 + \bar{o}(1)) \\ = (n - 1) \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} \varepsilon^{2-\alpha} x U(x)(1 + \bar{o}(1)).$$

Стало быть,

$$I_0^{\varepsilon x} = U(x) - V(x)U_{n-1}(\varepsilon x) + \bar{o}(w(x)) + \varepsilon^{2-\alpha}\bar{O}(U^2(x)), \quad (3.17)$$

где $\varepsilon^{2-\alpha}\bar{O}(U^2(x)) = \bar{o}(U^2(x))$.

Рассмотрим теперь $I_{\varepsilon x}^{x-y}$, считая сначала, что ε — малое фиксированное число. Так как $U_{n-1}(\varepsilon x) = \bar{o}(1)$ при $\Pi \rightarrow 0$, то

$$I_{\varepsilon x}^{x-y} = - \int_{\varepsilon x}^{x-y} dU_{n-1}(t)V(x-t) + \bar{o}(w(x)).$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon x}^{x-y} &= -U_{n-1}(t)V(x-t) \Big|_{\varepsilon x}^{x-y} + \int_{\varepsilon x}^{x-y} U_{n-1}(t)v(x-t) dt + \bar{o}(w(x)) \\ &= U_{n-1}(\varepsilon x)V(x) + U_{n-1}(\varepsilon x)[V(x(1-\varepsilon)) - V(x)] - U_{n-1}(x-y)V(y) \\ &\quad + x \int_{\varepsilon}^{1-1/r} U_{n-1}(xs)v(x(1-s)) ds + \bar{o}(w(x)). \end{aligned}$$

Так как $U_{n-1}(xs) = (n-1)s^{1-\alpha}U(x)(1+\bar{o}(1))$, $v(x(1-s)) = (1-s)^{-\alpha}v(x) \times (1+\bar{o}(1))$ равномерно по $s \in [\varepsilon, 1-1/r]$, то здесь

$$\begin{aligned} x \int_{\varepsilon}^{1-1/r} U_n(xs)v(x(1-s)) ds &= (n-1)xv(x)U(x) \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{1-1/r} s^{1-\alpha}(1-s)^{-\alpha} ds (1+\bar{o}(1)); \end{aligned}$$

при этом $xv(x) = (\alpha-1)V(x)(1+\bar{o}(1)) = (\alpha-1)U(x)(1+\bar{o}(1))$,

$$\int_{\varepsilon}^{1-1/r} s^{1-\alpha}(1-s)^{-\alpha} ds = I(\alpha) - p_1(\varepsilon) + q_2(r),$$

где $p_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $q_2(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} U_{n-1}(x-y)V(y) &= (n-1)V^2(x)r^{2(\alpha-1)}(1-r)^{1-\alpha}(1+\bar{o}(1)) \\ &= (n-1)V^2(x) \cdot 2^{2(\alpha-1)}(1+q_3(r))(1+\bar{o}(1)), \end{aligned}$$

где $q_3(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$ и

$$U_{n-1}(\varepsilon x)[V(x(1-\varepsilon)) - V(x)] = (n-1)\varepsilon^{2-\alpha}U(x)xv(x)(1+\bar{o}(1))$$

при ε , стремящемся к 0 достаточно медленно. Ясно, что другие соотношения, описывающие поведение $I_{\varepsilon x}^{x-y}$, также останутся справедливыми,

если $\varepsilon = \varepsilon(\Pi)$ стремится к 0 при $\Pi \rightarrow 0$ достаточно медленно. Поэтому в результате мы получаем

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon x}^{x-y} &= U_{n-1}(\varepsilon x)V(x) + (n-1)(\alpha-1)U^2(x)[I(\alpha) - p_1(\varepsilon) + q_2(r)](1 + \bar{o}(1)) \\ &\quad + (n-1)V^2(x) \cdot 2^{2(\alpha-1)}(1 + q_3(r))(1 + \bar{o}(1)) \\ &\quad + (n-1)V^2(x)\bar{o}(1) + \bar{o}(w(x)). \end{aligned}$$

Складывая это с (3.17), получим

$$\begin{aligned} P_2 \equiv I_0^{x-y} &= U(x) + (n-1)(\alpha-1)U^2(x)[I(\alpha) - p_1(\varepsilon) + q_2(r)](1 + \bar{o}(1)) \\ &\quad + (n-1)V^2(x) \cdot 2^{2(\alpha-1)}(1 + q_3(r))(1 + \bar{o}(1)) + \bar{o}(w(x)). \end{aligned}$$

Учитывая (3.15), находим, что $P = P_1 + P_2$ допускает такую же запись, но с заменой в правой части множителя $2^{2(\alpha-1)}$ на $2^{2\alpha-1}$. Кроме того, слагаемое $q_3(r)$ будет иметь несколько иной смысл, но свойство $q_3(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$ сохранится. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. При $\Pi \rightarrow 0$, $i \neq j$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} 2^{2(\alpha-1)}U^2(x)(1 + q_4(r) + \bar{o}(1)) &\geq \mathbf{P}(G_n \bar{B}_i \bar{B}_j) \\ &\geq 2^{2(\alpha-1)}U^2(x)(1 - q_5(r) + q_4(r) + \bar{o}(1)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $q_l(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$, $l = 4, 5$; оценки в (3.18) от i и j не зависят.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n \bar{B}_i \bar{B}_j) &= \mathbf{P}(G_n \bar{B}_{n-1} \bar{B}_n) = \int_y^\infty \int_y^\infty dU(t) dU(s) U_{n-2}(x - t - s) \\ &= \int_{t \geq y, s \geq y, t+s \geq x} dU(t) dU(s) + \int_{T_y} dU(t) dU(s) U_{n-2}(x - t - s), \end{aligned}$$

где T_y — треугольная область $\{(t, s): t \geq y, s \geq y, s + t < x\}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(G_n \bar{B}_{n-1} \bar{B}_n) = U^2(y) - \int_{T_y} dU(t) dU(s) [1 - U_{n-2}(x - t - s)] \leq U^2(y). \quad (3.19)$$

Кроме того,

$$U^2(y) = U^2(x) \cdot 2^{2(\alpha-1)}(1 + q_4(r) + \bar{o}(1)) \quad \text{при } \Pi \rightarrow 0,$$

где $q_4(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$. Это доказывает первое неравенство в (3.18).

Далее, интеграл в (3.19) не превосходит

$$\begin{aligned} \int_{T_y} dU(t) dU(s) &\leq \left(\int_y^{x-y} dU(t) \right)^2 \\ &= (U(y) - U(x - y))^2 = U^2(x)q_5(r)(1 + \bar{o}(1)), \end{aligned}$$

где

$$q_5(r) = r^{\alpha-1} - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \downarrow 2.$$

Сказанное доказывает второе неравенство в (3.18). Лемма 3.2 доказана.

Вернемся к доказательству п. (а) теоремы 3.1. В силу (3.12) и лемм 3.1, 3.2

$$\begin{aligned} U_n(x) &\leq n\mathbf{P}(G_n\bar{B}_n) - \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{P}(G_n\bar{B}_{n-1}\bar{B}_n) + \bar{O}(\Pi^r) \\ &= nU(x) + n(n-1)U^2(x)A(\alpha)(1+q_6(r)+\bar{o}(1)) + \bar{o}(nw(x)) + \bar{O}(\Pi^r), \end{aligned}$$

где $q_6(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 2$,

$$A(\alpha) = (\alpha-1)I(\alpha) + 2^{2(\alpha-1)}.$$

Так как

$$w(x) = O(V^2(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

то

$$\lim_{\Pi \rightarrow 0} \frac{U_n(x) - nU(x)}{n(n-1)V^2(x)} \leq A(\alpha)(1+q_6(r)).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Pi \rightarrow 0} \frac{U_n(x) - nU(x)}{n(n-1)V^2(x)} \geq A(\alpha)(1+q_7(r)), \quad q_7(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \downarrow 2.$$

Левые части этих неравенств от r не зависят. Правые части по форме зависят от r , но выбором $r > 2$, достаточно близкого к 2, могут быть сделаны сколь угодно близкими к $A(\alpha)$. Это возможно лишь в случае, когда существует

$$\lim_{\Pi \rightarrow 0} \frac{U_n(x) - nU(x)}{n(n-1)V^2(x)} = A(\alpha).$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

(b) Рассмотрим теперь альтернативный к (3.20) случай $w(x) \gg V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда из лемм 3.1, 3.2 вытекает, что

$$U_n(x) = nU(x) + \bar{o}(nw(x)) + \bar{O}(n(n-1)V^2(x)) + \bar{O}(\Pi^r).$$

Соотношение (3.9) доказано.

(с) Пусть теперь $\alpha \in (2, 3)$. В этом случае существует $a_\chi = \mathbf{E}\chi$, соотношение (3.3) заменяется на эквивалентное (при рассматриваемых значениях $n = o(x)$) соотношение (3.4). Воспользуемся опять соотношением (3.12), но теперь при $r = 2$, в котором в обозначениях (3.13)

$$\mathbf{P}(G_n\bar{B}) = \Sigma_1 + \bar{O}(\Pi^2). \quad (3.21)$$

Для новой оценки Σ_1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.3. При $\alpha \in (2, 3)$, $\Pi \rightarrow 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) = U(x) + \bar{O}(nv(x)) + \bar{o}(w(x)). \quad (3.22)$$

Доказательство. Воспользуемся опять соотношениями (3.14), (3.15) при $r = 2$. Из (3.15) вытекает, что

$$P_1 < c(n-1)U^2(x). \quad (3.23)$$

Остается оценить

$$\begin{aligned} P_2 &= - \int_0^{x/2} dU_{n-1}(t) U(x-t) \\ &= U(x) \left(1 - U_{n-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \int_0^{x/2} dU_{n-1}(t) [U(x-t) - U(x)], \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$U(x-t) - U(x) \leq ctv(x) + o(w(x)) \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{x}{2} \right], \quad x \rightarrow \infty.$$

Поэтому интеграл в правой части (3.24) не превосходит $cv(x)(n-1)a_\chi + o(w(x)) = \bar{O}(nv(x)) + \bar{o}(w(x))$. Так как $U_{n-1}(x/2) = \bar{O}(\Pi)$ для $\alpha \in (2, 3)$ (см. (3.4)), то в результате получаем

$$P_2 = U(x) + \bar{O}(nV^2(x)) + \bar{O}(nv(x)) + \bar{o}(w(x)),$$

что вместе с (3.23) и соотношением $V^2(x) = o(v(x))$ доказывает (3.22). Лемма 3.3 доказана.

Вернемся к доказательству п. (с) теоремы 3.1. Имеем в силу (3.21) и леммы 3.3

$$U_n(x) = nU(x) + \bar{O}(n^2v(x)) + \bar{o}(nw(x)) + \bar{O}(\Pi^2). \quad (3.25)$$

Здесь, очевидно,

$$\Pi^2 \ll n^2v(x) \quad \text{при } \alpha > 2, \quad \Pi \rightarrow 0.$$

Сравним теперь $nw(x)$ и $n^2v(x)$ или, что то же, $w(x)$ и $nv(x)$. При $n < x^\rho$ и достаточно малом ρ имеем

$$-\gamma = 2 - \alpha - \beta > \rho - \alpha \quad \text{при } \beta \in (1, 2)$$

и, стало быть, $n^2v(x) \ll nw(x)$ при $\Pi \rightarrow 0$. Таким образом, из (3.25) мы получаем (3.10).

Нам осталось рассмотреть случай $\alpha > 3$. Если $\alpha > 3$, то при $r = 2$, $n < x^\rho$ по теореме 4.1.1 в [3] вместо (3.11) выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(G_n B) = \bar{O}(\Pi^{r_1})$$

при любом фиксированном $r_1 < 2$. Кроме того, сохраняются соотношение (3.4) и утверждение леммы 3.3. Поэтому справедливо соотношение (3.25), в котором Π^2 надо заменить на Π^{r_1} . Ясно, что при r_1 , достаточно близком к 2, и достаточно малом ρ все рассуждения, доказывающие (3.10) с помощью (3.25), при $\alpha > 3$ сохраняются. Теорема 3.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2. Докажем сначала утверждение теоремы в терминах представления (3.1).

Теорема 4.1. Пусть выполнено (3.1). Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) Если $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) = O(V^2(x))$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \frac{pV(x)}{1-p} + \frac{pw(x)}{1-p} (1 + o(1)) + \frac{2p^2 A(\alpha) V^2(x)}{(1-p)^2} (1 + o(1)), \quad (4.1)$$

где $A(\alpha)$ определено в (3.8).

(b, c) Если выполнено одно из следующих двух условий:

(b) $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) \gg V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$ или

(c) $\alpha > 2$, $\alpha \neq 3$,

то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S \geq x) = \frac{pV(x)}{1-p} + \frac{pw(x)}{1-p} (1 + o(1)). \quad (4.2)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.9) и разделим сумму в (1.9) на две подсуммы: $\Sigma_I := \sum_{n \leq n_x}$ (по значениям $n \leq n_x$) и $\Sigma_{II} := \sum_{n > n_x}$ (по $n > n_x$), где $n_x = [c \ln x]$, $c = -2\alpha/\ln p$. Тогда вторая подсумма не превосходит

$$\frac{p^{-c \ln x}}{(1-p)p} = \frac{x^{-2\alpha}}{(1-p)p}. \quad (4.3)$$

Оценим теперь Σ_I .

Рассмотрим сначала случай (а): если $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) = O(V^2(x))$ при $x \rightarrow \infty$, то по теореме 3.1

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= (1-p) \sum_{n \leq n_x} p^n \mathbf{P}(X_n \geq x) \\ &= (1-p)U(x) \sum_{n \leq n_x} np^n + (1-p)A(\alpha)V^2(x) \sum_{n \leq n_x} n(n-1)p^n(1 + \bar{o}(1)), \end{aligned}$$

где $\bar{o}(1)$ есть функция двух переменных n и x , которая равномерно по n и x сходится к 0, если $\Pi = nV(x)$ сходится к нулю. Но Π сходится к

нулю, если $n \leq n_x$ и $x \rightarrow \infty$, так как $V(x) \ln x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому, учитывая равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} np^n = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p^n = \frac{2p^2}{(1-p)^3},$$

получим при $x \rightarrow \infty$

$$\Sigma_I = \frac{pU(x)}{1-p} + \frac{2p^2 A(\alpha) V^2(x)}{(1-p)^2} (1 + \bar{o}(1)) + \bar{O}(x^{-2\alpha} \ln^2 x).$$

Это доказывает (4.1).

Рассмотрим случай (b): $\alpha \in (1, 2)$, $w(x) \gg V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$. В этом случае по теореме 3.1 совершенно аналогично находим при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= \frac{pU(x)}{1-p} + \bar{o}(w(x)) + \bar{O}(V^2(x)) + \bar{O}(x^{-2\alpha} \ln^2 x) \\ &= \frac{pV(x)}{1-p} + \frac{pw(x)}{1-p} (1 + \bar{o}(1)). \end{aligned}$$

В случае (с) сумма Σ_I имеет, очевидно, такой же вид. Теорема 4.1 доказана.

Вернемся к теореме 1.2. Она вытекает из теорем 4.1, 2.2. Напомним, что при выполнении условия $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$

$$V(x) = \frac{(1-p)F_+^I(x)}{pa}, \quad w(x) = \frac{(1-p)b_\zeta F_+(x)}{2pa^2}. \quad (4.4)$$

При выполнении $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$ обозначение $V(x)$ сохраняет свой смысл,

$$w(x) = \frac{1-p}{pa^2} C(\alpha, \beta) F_-(x) F_+(x). \quad (4.5)$$

Если выполнено условие $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, то $\alpha > 2(\alpha - 1)$ и, стало быть, $w(x) \ll V^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$, так что следует воспользоваться равенством (4.1), в котором среднее слагаемое исчезает.

Если выполнено $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, $F_-(x) = O(F_+(x))$ при $x \rightarrow \infty$, то следует вновь воспользоваться равенством (4.1), но при новом значении w (см. (4.5)), так что среднее слагаемое в (4.1) может быть сравнимым с последним.

Если выполнено $[\mathbf{R}_\beta^\alpha]$ и одно из условий (b) или (с), то следует воспользоваться равенством (4.2). Теорема 1.2 доказана.

5. Аппроксимация второго порядка для максимума обобщенных процессов восстановления. В этом пункте мы получим аналог теоремы 1.2 для обобщенных процессов восстановления.

Пусть $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots$ — последовательность положительных независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным средним $a_\tau := \mathbf{E}\tau$. Положим $T_0 := 0$,

$$T_k := \tau_1 + \dots + \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и пусть

$$\nu(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(T_k \leq t), \quad t \geq 0,$$

есть порожденный этой последовательностью (непрерывный справа) процесс восстановления. Заметим, что $\{\nu(t) < k\} = \{T_k > t\}$ и что $\nu(t) + 1$ есть момент первого прохождения уровня t случайным блужданием $\{T_k; k \geq 0\}$:

$$\nu(t) + 1 = \min\{k \geq 0: T_k > t\}.$$

Предположим далее, что

$$S_0 = 0, \quad S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \geq 1,$$

есть независимое от $\{\tau_i; i \geq 1\}$ случайное блуждание, порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$.

Процесс с непрерывным временем

$$Z(t) := S_{\nu(t)} + qt, \quad t \geq 0,$$

где q — вещественное число, называется *обобщенным процессом восстановления с линейным сносом q* .

Обозначим

$$\overline{Z} := \sup_{t \geq 0} Z(t).$$

Задача об асимптотике $\mathbf{P}(\overline{Z} \geq x)$ при $x \rightarrow \infty$ во многом может быть сведена к задаче об асимптотике $\mathbf{P}(S \geq x)$ для максимумов $S = \sup_k S_k$ обычных случайных блужданий, рассмотренных в пп. 1–3. Это следует из того, что при $q \leq 0$

$$\overline{Z} = \sup_{k \geq 0} (S_k + qT_k) =: Y, \quad (5.1)$$

а при $q > 0$

$$\overline{Z} = \sup_{k \geq 1} (S_{k-1} + qT_k) = q\tau_1 + \sup_{k \geq 1} [S_{k-1} + q(T_k - \tau_1)] \stackrel{d}{=} q\tau + Y, \quad (5.2)$$

где случайные величины τ и Y независимы, $Y = \sup_{k \geq 0} Y_k$ для случайного блуждания $Y_k = \sum_{j=1}^k \eta_j$, порожденного независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_j = \xi_j + q\tau_j$. Из этих представлений в [3] (см. теорему 16.1.1) получены следующие асимптотические соотношения первого порядка.

Теорема 5.1. Пусть $a_\eta := \mathbf{E}\eta = -a + qa_\tau < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Если $q \leq 0$ и $F_+ \in \mathcal{R}_\alpha$, то

$$\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x) \sim \frac{1}{|a_\eta|} \int_x^\infty F_+(t) dt \sim \frac{x F_+(x)}{(\alpha - 1)|a_\eta|}. \quad (5.3)$$

II. Если $q > 0$ и выполнено одно из следующих трех условий:

- (i) $F_+ \in \mathcal{R}$ и $F_\tau(t) = o(F_+(t))$ при $t \rightarrow \infty$;
- (ii) $F_+ \in \mathcal{R}$, $F_\tau \in \mathcal{R}$;
- (iii) $F_\tau \in \mathcal{R}$ и $F_+(t) = o(F_\tau(t))$ при $t \rightarrow \infty$,

то

$$\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x) \sim \frac{1}{|a_\eta|} \int_x^\infty \left(F_+(t) + F_\tau\left(\frac{t}{q}\right) \right) dt. \quad (5.4)$$

Заметим, что в случаях II(i) и II(iii) второе и первое слагаемое соответственно под интегралом в (5.4) становятся пренебрежимо малыми и их можно опустить.

Наибольший интерес в приложениях представляет случай $q \leq 0$. С другой стороны, формулировка результатов в случае $q > 0$ наиболее громоздка. Поэтому для краткости мы ограничимся рассмотрением асимптотики $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ при $q \leq 0$. Случай $q > 0$ может быть рассмотрен совершенно аналогично.

Справедливо следующее утверждение, описывающее асимптотику второго порядка $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ при $q \leq 0$. Обозначения $F_\pm(x)$, α , β по-прежнему относятся к случайным величинам ξ .

Кроме того, мы будем использовать обозначения

$$\eta = \xi + q\tau, \quad \xi_{(\pm)} = \pm \max(0, \pm \xi), \quad \eta_{(\pm)} = \pm \max(0, \pm \eta)$$

$$(\text{так что } \xi = \xi_{(+)} + \xi_{(-)}, \quad \eta = \eta_{(+)} + \xi_{(-)}),$$

$$F_{\eta+}(t) = \mathbf{P}(\eta \geq 1), \quad F_{\eta-}(t) = \mathbf{P}(\eta \leq -t) \quad \text{при } t > 0.$$

Теорема 5.2. I. Если $q = 0$, то $\bar{Z} = Y = S$ и асимптотика $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ описывается теоремой 1.2 без каких-либо изменений.

II. Пусть $q < 0$.

(i) Если выполнены условия $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (1, 2)$, $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, то $\mathbf{E}\eta_{(-)}^2 < \infty$, $F_{\eta+} \in \mathcal{R}_\alpha$ и вероятность $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x) = \mathbf{P}(Y \geq x)$ равна правой части соотношения (1.5), в которой a надо заменить на $|a_\eta|$.

(ii) Пусть $\max(\mathbf{E}\tau^2, \mathbf{E}\xi_{(-)}^2) = \infty$, $F_+(t) \in \mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \in (1, 2)$, $F_{\eta-}(t) \in \mathcal{R}$, $F_{\eta-}(t) = O(F_+(t))$ при $t \rightarrow \infty$ и $-\beta_\eta$ есть степенной показатель п.м.ф. $F_{\eta-}(t)$, $t \rightarrow \infty$. Тогда вероятность $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ равна правой части в (1.6), в которой надо заменить a на $|a_\eta|$, β на β_η , $F_-^I(x)$ на $F_{\eta-}^I(x) = \int_x^\infty F_{\eta-}(t) dt$.

(iii) Пусть $\max(\mathbf{E}\tau^2, \mathbf{E}\xi_{(-)}^2) = \infty$, $F_{\eta-} \in \mathcal{R}_{\beta_\eta}$, $\beta_\eta \in (1, 2)$ и выполнено одно из двух условий:

либо $F_+ \in \mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \in (1, 2)$, $F_{\eta-}(x) \gg F_+(x)$ при $x \rightarrow \infty$,

либо $F_+ \in \mathcal{R}_\alpha$, $\alpha > 2$, $\alpha \neq 3$.

Тогда вероятность $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ равна правой части в (1.7), в которой надо заменить a на $|a_\eta|$, β на β_η , $F_-^I(x)$ на $F_{\eta-}^I(x)$.

З а м е ч а н и е. 5.1 По поводу условия $F_{\eta-} \in \mathcal{R}$ можно заметить, что оно выполнено очевидным образом в следующих случаях.

(a) $F_- \in \mathcal{R}_\beta$, $F_\tau(t) := \mathbf{P}(\tau \geq t) = o(F_-(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда $F_{\eta-}(t) \sim F_-(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $\beta_\eta = \beta$.

(b) $F_- \in \mathcal{R}_\beta$, $F_\tau \in \mathcal{R}_\beta$.

Тогда $F_{\eta-}(t) \sim F_-(t) + F_\tau(t)$, $\beta_\eta = \beta$.

(c) $F_\tau \in \mathcal{R}_{\beta_\tau}$, $F_-(t) = o(F_\tau(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда $F_{\eta-}(t) \sim F_\tau(t)$, $\beta_\eta = \beta_\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5.2. I. Первое утверждение теоремы очевидно.

II. Пусть $q < 0$. Тогда $\bar{Z} = Y$ и чтобы воспользоваться теоремой 1.2, надо найти асимптотику $F_{\eta+}(x) = \mathbf{P}(\eta \geq x)$, $F_{\eta-}(x) = \mathbf{P}(\eta \leq -x)$ и $F_{\eta+}^I(x) := \int_x^\infty F_{\eta+}(t) dt$. Нетрудно видеть, что при $q < 0$, $x \rightarrow \infty$

$$F_{\eta+}(x) = \mathbf{P}(\xi + q\tau \geq x) \sim \mathbf{P}(\xi \geq x) = F_+(x). \quad (5.5)$$

Далее, для последовательности $\varepsilon = \varepsilon(x)$, при $x \rightarrow \infty$ сходящейся к 0 настолько медленно, что $\varepsilon x \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} F_{\eta+}^I(x) &= \int_x^\infty \mathbf{P}(\xi \geq v - q\tau) dv = \mathbf{E} F_+^I(x - q\tau) \\ &= F_+^I(x) + \mathbf{E} \left[(F_+^I(x - q\tau) - F_+^I(x)); \tau < \varepsilon x \right] + \theta F_+^I(x) \mathbf{P}(\tau \geq \varepsilon x), \end{aligned}$$

где $|\theta| \leq 1$ и по теореме о среднем

$$\mathbf{E} \left[(F_+^I(x - q\tau) - F_+^I(x)); \tau < \varepsilon x \right] = -q \mathbf{E} [\tau F_+(x - \theta_\tau \varepsilon x); \tau < \varepsilon x], \quad (5.6)$$

$|\theta_\tau| \leq 1$, $F_+(x + t) \sim F_+(x)$ равномерно по $t \in [0, \varepsilon x]$. Поэтому значение (5.6) асимптотически эквивалентно $-qF_+(x)\mathbf{E}\tau$. Кроме того, так как $\mathbf{E}\tau < \infty$, то последовательность $\varepsilon(x)$ можно выбрать настолько медленно сходящейся к нулю, что $\mathbf{P}(\tau \geq \varepsilon x) = o(1/x)$. В результате мы получаем

$$F_{\eta+}^I(x) = F_+^I(x) - qF_+(x) \mathbf{E}\tau + F_+^I(x) o\left(\frac{1}{x}\right). \quad (5.7)$$

Отметим далее, что из неравенств

$$\xi_{(-)} + q\tau \leq \eta_{(-)} = \min(0, \xi + q\tau) \leq \xi_{(-)}$$

и

$$\mathbf{P}(\eta_{(-)} < -v) \geq \mathbf{P}(\xi < 0)\mathbf{P}\left(\tau > \frac{v}{q}\right)$$

вытекает, что $\mathbf{E}\eta_{(-)}^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi_{(-)}^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$.

Мы можем теперь перейти к доказательству подраздела (i) второго утверждения теоремы 5.2.

(i) Пусть $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ и ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{<\infty}^\alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда $\mathbf{E}\eta_{(-)}^2 < \infty$ и нужное нам утверждение II(i) вытекает из (5.5), (5.7) и утверждения (i) теоремы 1.2. При этом надо учесть, что в (5.7)

$$F_+(t) = o\left((F_+^I(t))^2\right), \quad F_+^I(t)o\left(\frac{1}{x}\right) = o\left((F_+^I(t))^2\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

(ii) Пусть выполнены условия раздела II(ii) теоремы 5.2. Здесь в дополнение к (5.5), (5.7) нам понадобится асимптотика $F_{\eta-}(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Согласно предположениям имеем $F_{\eta-} \in \mathcal{R}_{\beta_\eta}$. Поэтому требуемое утверждение непосредственно вытекает из утверждения (ii) теоремы 1.2 с учетом соотношений, аналогичных (5.8).

(iii) Пусть выполнены условия раздела II(iii) теоремы 5.2. Тогда вновь утверждение теоремы 5.2 вытекает непосредственно из раздела (iii) теоремы 1.2, примененного к случайным величинам η , Y .

Теорема 5.2 доказана.

З а м е ч а н и е 5.2. Теорема 5.2 показывает, что в условиях I, II(i) асимптотика второго порядка $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ или не зависит от распределения τ (в условии I), либо зависит от него лишь через коэффициент $a_\eta = -a + q\tau$.

З а м е ч а н и е 5.3. Теорема 5.2 переносит утверждение теоремы 1.2 на обобщенные процессы восстановления. Совершенно аналогично на обобщенные процессы восстановления можно перенести утверждение теоремы 1.1 в случае $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, пользуясь при $q \leq 0$ соотношением $\bar{Z} = Y$ и теоремой 1.1, примененной к случайным величинам η и Y . При этом окажется, что второй член асимптотического разложения для $\mathbf{P}(\bar{Z} \geq x)$ будет содержать по сравнению с (1.3) дополнительное слагаемое $-qF_+(x)\mathbf{E}\tau$ (см. (5.7)).

Теоремы 1.1, 1.2, 5.2 позволяют получать асимптотику второго порядка для стационарных распределений времени ожидания и длины очереди в теории очередей, для вероятности разорения в теории страхования, в том числе в задачах о страховании с кредитованием (ср. с [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk. — *Stochastic Process. Appl.*, 1977, v. 5, p. 27–37.
2. *Боровков А. А.* О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм. — *Сиб. матем. журн.*, 2002, т. 43, № 6, с. 1235–1264.
3. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. 1: Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2008, 650 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 652 с.
6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels I. L.* Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p.
7. *Borovkov A. A.* Insurance with borrowing. The first- and second-order approximations. — *Adv. Appl. Probab.*, 2009, v. 41, № 4, p. 1141–1160.
8. *Geluk J. L., Pakes A. G.* Second order subexponential distributions. — *J. Aust. Math. Soc. Ser. A*, 1991, v. 51, № 1, p. 73–87.

Поступила в редакцию
5.II.2013