Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, А. М. Иксанов, А. В. Маринич, Слабая сходимость конечномерных распределений числа пустых ящиков решета Бернулли, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 28–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:24:59

© 2014 г.

ВАТУТИН В. А.*, ИКСАНОВ А. М.**,
МАРИНИЧ А. В.**

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧИСЛА ПУСТЫХ ЯЩИКОВ РЕШЕТА БЕРНУЛЛИ¹⁾

Решето Бернулли — это случайная схема размещения, получаемая путем размещения независимых точек, равномерно распределенных на сегменте $[0, 1]$, по интервалам, образованным последовательными состояниями мультипликативного случайного блуждания с множителями, лежащими в интервале $(0, 1)$. Предполагая, что число размещаемых точек равно n , мы исследуем сходимость при $n \rightarrow \infty$ конечномерных распределений числа пустых интервалов с номерами, не превосходящими номер последнего занятого интервала. Для доказательств применяется новый подход, позволивший отказаться от ограничений, накладывавшихся в предшествующих работах на носитель распределения множителей мультипликативного случайного блуждания.

Ключевые слова и фразы: решето Бернулли, схема занятости Карлина в случайной среде, сходимость конечномерных распределений, пуассонизация.

1. Введение и основные результаты. Обозначим через $T := (T_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$, $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, мультипликативное случайное блуждание, задаваемое соотношениями

$$T_0 := 1, \quad T_k := \prod_{i=1}^k W_i, \quad k \in \mathbf{N} := \mathbf{N}_0 \setminus \{0\},$$

где $(W_k)_{k \in \mathbf{N}}$ — независимые копии случайной величины W , принимающей значения в интервале $(0, 1)$. Пусть, далее, $(U_j)_{j \in \mathbf{N}}$ — независимые случайные величины, не зависящие от T и имеющие равномерное распределение на $[0, 1]$. Случайная схема размещения, определяемая распределением «шаров» U_1, U_2 и т.д. по бесконечному набору «ящиков» $(T_k, T_{k-1}]$, $k \in \mathbf{N}$, называется *решетом Бернулли*. Исследование этой

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Факультет кибернетики, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина; e-mail: iksan@univ.kiev.ua; marynych@unicyb.kiev.ua

¹⁾ Первый автор поддержан РФФИ (грант № 14-01-00318).

схемы размещения было начато в статье [12]. С тех пор появилось несколько работ [14]–[18], [21], [22], в которых анализировались различные асимптотические свойства решета Бернулли.

Поскольку размещаемый шар попадает в ящик $(T_k, T_{k-1}]$ со случайной вероятностью

$$P_k := T_{k-1} - T_k = W_1 W_2 \cdots W_{k-1} (1 - W_k),$$

решето Бернулли является классической схемой размещения Карлина [13], [24] со *случайными вероятностями* $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$ (или, если угодно, в случайной среде (P_k) или (W_k)). При этом предполагается, что если случайная среда (P_k) фиксирована, то шары распределяются по бесконечному набору ящиков $(T_1, T_0], (T_2, T_1], \dots$ независимо, а вероятность попадания шара в ящик $(T_k, T_{k-1}]$ равна P_k . В дальнейшем мы будем говорить, что ящик $(T_k, T_{k-1}]$ имеет номер k .

Напомним, что некоторые схемы размещения шаров по счетному числу ящиков в *неслучайной среде* рассматривались также в работах [2]–[4], и отметим, что схема размещения по счетному числу ящиков существенно отличается от классической схемы размещения шаров по ящикам, описанной, например, в монографии [1].

Предполагая, что число размещаемых шаров равно n (иными словами, используя выборку объема n из равномерного распределения), обозначим через K_n число занятых ящиков, а через M_n максимальный номер среди занятых ящиков. Положим также $L_n := M_n - K_n$ и заметим, что случайная величина L_n равна числу пустых ящиков с номерами, не превосходящими M_n . В упомянутых выше статьях достаточно полно была изучена сходимост *одномерных* распределений последовательностей случайных величин K_n [12], [15], [17], M_n [17] и L_n [17], [21], [22]. Данная работа содержит первые результаты о сходимости *конечномерных* распределений элементов набора $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Прежде чем формулировать основные результаты статьи, напомним одно из утверждений, содержащихся в теореме 1.1 работы [22].

Утверждение 1.1. *Предположим, что $\mathbf{E} |\ln W| = \infty$ и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} (1 - W)^n}{\mathbf{E} W^n} = c \in (0, \infty).$$

Тогда

$$L_n \xrightarrow{d} L, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где L — случайная величина с геометрическим распределением

$$\mathbf{P}\{L = k\} = \frac{c}{c+1} \left(\frac{1}{c+1} \right)^k, \quad k \in \mathbf{N}_0.$$

В частности, соотношение (1) выполнено, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\}} = c. \quad (2)$$

Нет оснований полагать, что условия $\mathbf{E}|\ln W| = \infty$ и (2) достаточны для сходимости каких-либо конечномерных распределений, связанных с последовательностью (L_n) . Однако при дополнительном предположении о *правильном изменении* числителя (а значит, и знаменателя) в (2) результат такого рода доказан в приводимой ниже теореме 1.1.

Пусть $\varepsilon_{(t,x)}$ — вероятностная мера, сосредоточенная в точке $(t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty]$. Для $\alpha \in (0, 1)$ и $c > 0$ введем пуассоновскую считающую случайную меру $N_{\infty}^{(\alpha, c)} := \sum_k \varepsilon_{(t_k, j_k)}$ на $[0, \infty) \times (0, \infty]$ с мерой интенсивности $\mathbf{LEB} \times \nu_{\alpha, c}$, где $\mathbf{LEB}$ — мера Лебега на $[0, \infty)$, а $\nu_{\alpha, c}$ — мера на $(0, \infty]$, задаваемая равенством

$$\nu_{\alpha, c}((x, \infty]) = c^{-1}x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Пусть, далее, $(X_\alpha(t))_{t \geq 0}$ — устойчивый субординатор порядка α (т.е. устойчивый неубывающий процесс Леви порядка α), не зависящий от $N_{\infty}^{(\alpha, c)}$ и имеющий преобразование Лапласа

$$\mathbf{E} \exp(-zX_\alpha(t)) = \exp(-\Gamma(1 - \alpha)tz^\alpha), \quad z \geq 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Равенство

$$X_\alpha^\leftarrow(s) := \inf\{t \geq 0: X_\alpha(t) > s\}, \quad s \geq 0,$$

задает случайный процесс $(X_\alpha^\leftarrow(s))_{s \geq 0}$ — обратный устойчивый субординатор порядка α .

Условимся в дальнейшем обозначать символами ℓ , $\widehat{\ell}$ и ℓ^* функции, медленно меняющиеся на бесконечности. Кроме того, запись $Z_t(u) \xrightarrow{\text{f.d.}} Z(u)$, $t \rightarrow \infty$ будет обозначать сходимость конечномерных распределений, а именно, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и любых $0 < u_1 < \dots < u_n < \infty$

$$(Z_t(u_1), \dots, Z_t(u_n)) \xrightarrow{d} (Z(u_1), \dots, Z(u_n)), \quad t \rightarrow \infty.$$

Теорема 1.1. *Предположим, что существуют число $\alpha \in (0, 1)$, функция ℓ и константа $c \in (0, \infty)$ такие, что*

$$\mathbf{P}\{|\ln W| > x\} \sim c\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тогда

$$L_{[e^{ut}]} \xrightarrow{\text{f.d.}} \sum_k 1_{\{X_\alpha(t_k) \leq u < X_\alpha(t_k) + j_k\}} =: R_{\alpha, c}(u), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Из сходимости конечномерных распределений в теореме 1.1 немедленно следует стационарность в узком смысле процесса $(R_{\alpha,c}(e^t))_{t \in \mathbf{R}}$.

В лемме 1.1 проверяется согласованность теоремы 1.1 и утверждения 1.1.

Лемма 1.1. При фиксированном $u > 0$ распределение $R_{\alpha,c}(u)$ является геометрическим с вероятностью успеха $c(c+1)^{-1}$.

Теоремы 1.2 и 1.3, приводимые ниже, усиливают теорему 1.1 [21] и теорему 1.2 [22] соответственно, в которых была установлена сходимость одномерных распределений.

Теорема 1.2. Пусть существуют числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta \in [0, \alpha]$, а также функции ℓ и $\hat{\ell}$ такие, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha} \ell(x) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} \sim x^{-\beta} \hat{\ell}(x). \quad (5)$$

В случае $\alpha = \beta$ предположим дополнительно, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\}} = 0$$

и что найдется неубывающая функция $u(x)$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{|\ln W| > x\} u(x)}{\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\}} = 1.$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{P}\{|\ln W| > t\}}{\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > t\}} L_{[e^{ut}]} \xrightarrow{\text{f.d.}} \int_{[0, u]} (u - s)^{-\beta} dX_{\alpha}^{\leftarrow}(s) =: W_{\alpha, \beta}(u). \quad (6)$$

В следующей теореме мы рассматриваем случаи, когда распределение случайной величины $\ln W$ принадлежит либо области притяжения нормального распределения, либо области притяжения устойчивого распределения с параметром $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 1.3. Предположим, что найдутся число $\beta \in [0, 1)$ и функция $\hat{\ell}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} \sim x^{-\beta} \hat{\ell}(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

(а) Если $\sigma^2 = \mathbf{D} \ln W < \infty$, то

$$\frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1} \int_0^{ut} \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > y\} dy}{\sqrt{\mu^{-1} \int_0^t \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > y\} dy}} \xrightarrow{\text{f.d.}} V(u), \quad t \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $\mu := \mathbf{E} |\ln W| < \infty$, а $(V(s))_{s \geq 0}$ — центрированный гауссовский процесс с

$$\mathbf{E} V(t)V(s) = t^{1-\beta} - (t-s)^{1-\beta}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

(b) Предположим, что $\sigma^2 = \infty$ и

$$\int_{[0, x]} y^2 \mathbf{P}\{|\ln W| \in dy\} \sim \ell(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Пусть $c(x) = x^{1/2} \ell^*(x)$ — положительная функция такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ell(c(x)) / c^2(x) = 1$.

(b1) Если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\} (\ell^*(x))^2 = 0, \quad (10)$$

то выполняется соотношение (8).

(b2) Если $\beta = 0$ и, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\} (\ell^*(x))^2 = \infty,$$

то при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1} \int_0^{ut} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > y\} dy}{\mu^{-3/2} c(t) \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} &\xrightarrow{\text{f.d.}} \int_{[0, u]} (u-s)^{-\beta} dZ_2(s) \\ &=: W_{2, \beta}(u), \end{aligned} \quad (11)$$

где $(Z_2(s))_{s \geq 0}$ — броуновское движение.

(c) Предположим, что для $\alpha \in (1, 2)$

$$\mathbf{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha} \ell(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Пусть $c(x) = x^{1/\alpha} \ell^*(x)$ — положительная функция такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ell(c(x)) / c^\alpha(x) = 1$.

(c1) Если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\} x^{2/\alpha-1} (\ell^*(x))^2 = 0, \quad (13)$$

то выполняется соотношение (8).

(c2) Если $\beta \in [0, 2/\alpha - 1]$, причем в случае $\beta = 2/\alpha - 1$ выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\} x^{2/\alpha-1} (\ell^*(x))^2 = \infty, \quad (14)$$

то при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1} \int_0^{ut} \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > y\} dy}{\mu^{-1-1/\alpha} c(t) \mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} &\xrightarrow{\text{f.d.}} \int_{[0, u]} (u-s)^{-\beta} dZ_\alpha(s) \\ &=: W_{\alpha, \beta}(u), \end{aligned} \quad (15)$$

где $(Z_\alpha(s))_{s \geq 0}$ — устойчивый процесс Леви порядка α такой, что при $z \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{izZ_\alpha(1)\} = \exp\left\{-|z|^\alpha \Gamma(1-\alpha) \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sign} z\right)\right\}. \quad (16)$$

З а м е ч а н и е 1.2. (I) Существование и свойства функций $c(t)$, появляющихся в пунктах (b) и (c) теоремы 1.3, хорошо известны. Например, в пункте (b) функция $c(t)$ является при $t \rightarrow \infty$ асимптотически обратной к $t^2 / \int_{[0,t]} y^2 d\mathbf{P}\{|\ln W| \in dy\} \sim t^2 / \ell(t)$. Поэтому, согласно утверждению 1.5.15 [9], $c(t) \sim t^{1/2} (L^\#(t))^{1/2}$, где $L^\#(t)$ есть функция, сопряженная по де Брёйну к функции $1/\ell(t^{1/2})$.

(II) Если распределение случайной величины $|\ln W|$ нерешетчато, то, как доказано в теореме 1.2 [22], сходимость одномерных распределений в пунктах (a), (b1) и (c1) теоремы 1.3 имеет место и без предположения о правильном изменении функции $\mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\}$. Достаточно, наряду с выполнением остальных условий теоремы, потребовать справедливость соотношения $\mathbf{E} |\ln(1-W)| = \infty$.

(III) Пусть $(Z_2(s))_{s \geq 0}$ — процесс броуновского движения, не зависящий от $(V(s))$. Как заметил А. Ю. Пилипенко, конечномерные распределения процесса $(V(s) + Z_2(s^{1-\beta}))$ (напомним, что $\beta \in [0, 1)$) совпадают с конечномерными распределениями шкалированного *дробного броуновского движения*. Ясно, что в случае $\beta = 0$ конечномерные распределения $(V(s))$ совпадают с конечномерными распределениями броуновского движения.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий основные результаты и демонстрирующий влияние поведения хвостов $\mathbf{P}\{|\ln W| > x\}$ и $\mathbf{P}\{|\ln(1-W)| > x\}$ на асимптотику числа пустых ящиков.

П р и м е р 1.1. Для $\alpha > 0$, $\beta \in [0, 1)$ и $(\gamma, \delta) \in D_\beta$, где $D_\beta = \mathbf{R}^2$ при $\beta \neq 0$ и $D_0 = \mathbf{R} \times (-\infty, -1)$ при $\beta = 0$, рассмотрим как угодно зависимые случайные величины W_1 и W_2 с маргинальными распределениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{W_1 \in dx\} &= c_1 x^{-\alpha-1} \ln^\gamma(x) 1_{[e, \infty)}(x) dx, \\ \mathbf{P}\{W_2 \in dx\} &= c_2 x^{-\beta-1} \ln^\delta(x) 1_{[e, \infty)}(x) dx, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 — нормирующие константы. Положим

$$W = e^{-W_1} 1_{\{\zeta=0\}} + (1 - e^{-W_2}) 1_{\{\zeta=1\}},$$

где ζ — случайная величина, не зависящая от (W_1, W_2) , для которой

$$\mathbf{P}\{\zeta = 0\} = \mathbf{P}\{\zeta = 1\} = \frac{1}{2}.$$

При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|\ln W| > x\} &= \frac{1}{2} \mathbf{P}\{W_1 > x\} \sim \frac{c_1}{2\alpha} x^{-\alpha} \ln^\gamma x, \\ \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} &= \frac{1}{2} \mathbf{P}\{W_2 > x\} \sim \frac{c_2}{2\beta} x^{-\beta} \ln^\delta x, \quad \text{если } \beta > 0, \\ \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} &\sim \frac{c_2}{|\delta + 1|} (\ln x)^{\delta+1}, \quad \text{если } \beta = 0. \end{aligned}$$

В таблице 1 приведены различные режимы слабой сходимости конечно-мерных распределений $(L_{[eut]})_{u>0}$ при $t \rightarrow \infty$.

Таблица 1.

№	α	β	(γ, δ)	Предельная теорема	Ссылка на общий результат
1	$\in (0, 1)$	$\in [0, \alpha)$	$\in D_\beta$	Формула (6)	Теорема 1.2
2		$= \alpha$	$\gamma < \delta$		
3			$\gamma = \delta$	Формула (4)	Теорема 1.1
4			$\gamma > \delta$	$L_{[eut]} \xrightarrow{\text{f.d.}} 0$	Теорема 7.1 в [16] + неравенство Маркова
5		$\in (\alpha, 1)$	$\in D_\beta$		
6	$\in (1, 2)$	$\in [0, 2/\alpha - 1)$	$\in D_\beta$	Формула (15)	Теорема 1.3 (c2)
7		$= 2/\alpha - 1$	$\delta + 2\gamma\alpha^{-1} > 0$		
8			$\delta + 2\gamma\alpha^{-1} = 0$	НЕИЗВЕСТНО	
9			$\delta + 2\gamma\alpha^{-1} < 0$	Формула (8)	Теорема 1.3 (c1)
10		$\in (2/\alpha - 1, 1)$	$\in D_\beta$		
11	$= 2$	$= 0$	$\gamma > -1,$ $\delta \in (-2 - \gamma, -1)$	Формула (11)	Теорема 1.3 (b2)
12			$\gamma > -1,$ $\delta = -2 - \gamma$	НЕИЗВЕСТНО	
13			$\gamma \geq -1$ $\delta < -2 - \gamma$	Формула (8)	Теорема 1.3 (b1)
14					Теорема 1.3 (a)
15		$\in (0, 1)$			$\in D_\beta$
16			> 2	$\in [0, 1)$	

Отметим две заслуживающие внимания ситуации, не рассмотренные (по разным причинам) в данной работе.

(I) Предположим, что выполнены условия пунктов (b) или (c) теоремы 1.3, а пределы в (10) или (13) соответственно конечны и отличны от нуля. Авторам неизвестно, имеет ли место в этих случаях сходимость хотя бы одномерных распределений, что объясняет содержание строк 8 и 12 таблицы 1.

(II) Приведенные выше теоремы собраны воедино, поскольку их доказательства проходят в рамках *единого* подхода. К сожалению, этот

подход не применим к мультипликативным случайным блужданиям, для которых $\mathbf{E}|\ln(1-W)| < \infty$, что объясняет отсутствие соответствующих результатов в данной статье, а также ограничение $\beta < 1$ в примере 1.1. Два разных доказательства сходимости одномерных распределений числа пустых ящиков в случае $\mathbf{E}(|\ln W| + |\ln(1-W)|) < \infty$ можно найти в [17], [18]. Кроме того, в статье [17] доказано, что в случае $\mathbf{E}|\ln W| = \infty$, $\mathbf{E}|\ln(1-W)| < \infty$ число пустых ящиков сходится к нулю по вероятности.

Нам кажется естественным завершить этот пункт комментарием о связи решета Бернулли как схемы Карлина в случайной среде с классической схемой Карлина, получаемой фиксацией среды. В любой схеме размещения в случайной среде распределение шаров по ящикам регулируется двумя вероятностными механизмами: случайностью среды и случайностью размещения шаров при фиксированной среде (выборочной случайностью). В работе [15] было введено понятие *сильной среды*: по отношению к некоторому функционалу X_n среда называется *сильной*, если случайность вероятностей (P_k) доминирует над выборочной случайностью в том смысле, что асимптотика центрированной и нормированной последовательности (X_n) совпадает с асимптотикой условного среднего $\mathbf{E}(X_n | (P_k)_{k \in \mathbb{N}})$, таким же образом центрированного и нормированного. Из этого определения следует, что всякий раз, когда среда оказывается сильной по отношению к X_n , асимптотика X_n в схеме Карлина в случайной среде принципиально отличается от асимптотики X_n в классической схеме Карлина, получаемой фиксацией среды. В упомянутой работе [15] было показано, что для любого невырожденного распределения W решето Бернулли имеет сильную среду по отношению к числу занятых ящиков K_n . Результаты данной работы (см., в частности, леммы 2.1 и 2.2, приведенные ниже) демонстрируют, что это утверждение верно и для числа пустых ящиков L_n , по крайней мере для таких распределений W , которые удовлетворяют предположениям приведенных выше теорем. Отметим, наконец, что нам неизвестны работы, в которых бы исследовалась асимптотика числа пустых ящиков в классической схеме Карлина.

Структура работы такова. В п. 2 сформулированы три леммы, доказательства которых приведены в пп. 3 и 4 соответственно. Две из них обосновывают целесообразность пуассонизации решета Бернулли, т.е. перехода от схемы с детерминированным числом шаров к схеме со случайным числом шаров, имеющим распределение Пуассона; а третья обеспечивает депуассонизацию, т.е. обратный переход. Доказательства теорем 1.1, 1.2 и 1.3 приведены в пп. 5, 6, и 7 соответственно. Наконец, вспомогательные результаты собраны в приложении (п. 8).

2. Пуассонизация и депуассонизация. В контексте задач, связанных со случайными размещениями, весьма плодотворной идеей явля-

ется пуассонизация. Пусть $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}}$ — пуассоновский поток единичной интенсивности, не зависящий ни от набора случайных величин (U_k) , ни от мультипликативного случайного блуждания T . Обозначим через $(\pi(t))_{t \geq 0}$ соответствующий процесс Пуассона, определяемый равенством

$$\pi(t) := \#\{k \in \mathbf{N} : \tau_k \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Вместо схемы размещения n шаров мы будем использовать *пуассонизированную* версию решета Бернулли, в которой моменты распределения шаров (точек U_k) по ящикам (интервалам $(T_j, T_{j-1}]$) задаются последовательностью $(\tau_k)_{k \in \mathbf{N}}$. А именно, точка U_k размещается в соответствующий ей ящик из сегмента $[0, 1]$ в момент времени τ_k . Таким образом, за промежуток времени $[0, t]$ по ящикам будет размещено случайное число $\pi(t)$ шаров. Обозначим через $\pi_j(t)$ число шаров, попавших в j -й ящик за промежуток времени $[0, t]$. Ясно, что если набор (среда) (T_i) фиксирован, то, во-первых, при каждом j процесс $(\pi_j(t))_{t \geq 0}$ является процессом Пуассона с интенсивностью $P_j = T_{j-1} - T_j$, а во-вторых, для разных j эти процессы *независимы*. Последнее свойство и определяет преимущество пуассонизированной схемы перед исходной.

Введем обозначения $M(t) := M_{\pi(t)}$, $K(t) := K_{\pi(t)}$ и $L(t) := L_{\pi(t)}$. Тогда, например, $L(t)$ есть число пустых ящиков, принадлежащих промежутку занятости, при бросании $\pi(t)$ шаров. Напомним, что решето Бернулли можно интерпретировать как схему Карлина в случайной среде (W_k) , задаваемой независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Два первых вспомогательных результата данной работы показывают, что изучение асимптотики $L(t)$ можно заменить анализом асимптотического поведения довольно простого функционала, определяемого лишь средой.

Введем стартующее из нуля случайное блуждание $(S_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ равенствами

$$S_0 := 0, \quad S_n := |\ln W_1| + \dots + |\ln W_n|, \quad n \in \mathbf{N},$$

и положим $\eta_n := |\ln(1 - W_n)|$.

Лемма 2.1. *Если $\mathbf{E} |\ln W| = \infty$, то*

$$L(e^{ut}) - \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} \xrightarrow{\text{f.d.}} 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Лемма 2.2. *Если $\mathbf{E} |\ln W| < \infty$, то*

$$\frac{L(e^{ut}) - \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}}}{a(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (18)$$

для любой функции $a(t)$ такой, что $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$. Иными словами, конечномерные распределения семейства процессов $(L(e^{ut}) - \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}}, t \geq 0)$ плотны.

Лемма 2.3, приведенная ниже, позволяет осуществить *депуассонизацию*, т.е. переход от схемы с пуассоновским числом шаров к исходной схеме с детерминированным числом шаров.

Лемма 2.3. *Вне зависимости от того, является ли среднее случайной величины $|\ln W|$ конечным или бесконечным,*

$$L(e^{ut}) - L_{[e^{ut}]} \xrightarrow{\text{f.d.}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отметим, что в работах [17], [21], [22] было использовано несколько подходов к депуассонизации числа пустых ящиков. Однако утверждение леммы 2.3 является наиболее сильным из всех известных ранее, даже если речь идет только об одномерных распределениях.

3. Доказательство лемм 2.1 и 2.2. Положим

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbf{N}: S_k > t\}, \quad t \geq 0,$$

и введем функцию восстановления

$$U(t) := \mathbf{E} \nu(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}\{S_k \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

В дальнейшем мы несколько раз будем использовать теорему Блэкуэлла и ключевую теорему восстановления. В силу предположения $\mathbf{E} |\ln W| = \infty$ отдельный анализ ситуации, когда распределение случайной величины $|\ln W|$ является решетчатым, не требуется. Действительно, согласно теореме Блэкуэлла и соображениям монотонности в решетчатом случае, равно как и в случае, когда распределение $|\ln W|$ нерешетчато,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U(t+h) - U(t)) = 0 \tag{19}$$

для любого $h > 0$. Поэтому дословное повторение доказательства ключевой теоремы восстановления, приведенной в [27, с. 241], позволяет утверждать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} g(t-x) dU(x) = 0,$$

если функция g непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[t, \infty)} g(t-x) dU(x) = 0,$$

если g непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty, 0]$.

Доказательство леммы 2.1. Для доказательства леммы 2.1 достаточно установить сходимость по вероятности к нулю левой

части соотношения (17) при $u = 1$ и воспользоваться приемом Крамера–Уолда, согласно которому для доказательства сходимости по распределению случайных элементов со значениями в пространстве $\mathbf{R}^k$ достаточно доказать сходимость по распределению всевозможных линейных комбинаций их координат [6, гл. 1, §7, с. 76]. Для удобства понимания мы разобьем доказательство леммы на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что максимальный номер ящика среди заполненных за промежутки времени $[0, e^t]$ удовлетворяет соотношению

$$M(e^t) - \nu(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

С этой целью положим $E(n) := -\ln \min(U_1, \dots, U_n)$ и заметим, что $M(e^t) = \nu(E(\pi(e^t)))$. Разность $E(n) - \ln n$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к случайной величине E^* , имеющей распределение Гумбеля. Так как последовательность $(E(n))$ не зависит от процесса $(\pi(t))$, то разность $E(\pi(e^t)) - \ln \pi(e^t)$ также сходится к E^* по распределению при $t \rightarrow \infty$. В силу слабого закона больших чисел для процесса Пуассона $\ln \pi(e^t) - t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $t \rightarrow \infty$. Значит,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (E(\pi(e^t)) - t) = E^* \quad \text{по распределению.} \quad (20)$$

Для простоты записи положим $R(t) := E(\pi(e^t))$. Используя неравенство Маркова и тот факт, что функция восстановления $U(t)$ не убывает, для произвольных $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{(\nu(R(t)) - \nu(t))1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} > \varepsilon \mid R(t)\right\} \\ & \leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E}\left((\nu(R(t)) - \nu(t))1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} \mid R(t)\right) \\ & = \varepsilon^{-1} (U(t + R(t) - t) - U(t))1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} \\ & \leq \varepsilon^{-1} (U(t + \gamma) - U(t)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{(\nu(R(t)) - \nu(t))1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} > \varepsilon \mid R(t)\right\} = 0 \quad \text{почти наверное.}$$

Следовательно,

$$(\nu(R(t)) - \nu(t))1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости (см., например, [5, гл. 2, §6, теорема 3, с. 264]).

Очевидно, что для любых $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{(\nu(R(t)) - \nu(t))1_{\{R(t) - t > \gamma\}} > \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\{R(t) - t > \gamma\}.$$

Отталкиваясь от этого неравенства, вспоминая соотношение (20) и используя абсолютную непрерывность распределения случайной величины E^* , заключаем, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ (\nu(R(t)) - \nu(t)) 1_{\{R(t)-t > \gamma\}} > \varepsilon \right\} \leq \mathbf{P} \{E^* > \gamma\}.$$

Наконец,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ (\nu(R(t)) - \nu(t)) 1_{\{R(t)-t > \gamma\}} > \varepsilon \right\} = 0.$$

Следствием полученных оценок является важное соотношение

$$(\nu(R(t)) - \nu(t)) 1_{\{R(t)-t > 0\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$(\nu(R(t)) - \nu(t)) 1_{\{R(t)-t \leq 0\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Этим и завершается первый этап доказательства леммы 2.1.

Шаг 2. Цель этого шага — нахождение удобной аппроксимации случайной величины $K(e^t)$ — количества ящиков, в каждый из которых за промежуток времени $[0, e^t]$ попал хотя бы один шар. А именно, мы покажем, что

$$K(e^t) - \sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp(-e^{t-S_k}(1 - W_{k+1})) \right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Имеет место представление

$$K(e^t) = \sum_{k \geq 1} 1_{\{\pi_k(e^t) \geq 1\}}, \quad (21)$$

где $\pi_k(e^t)$ — число шаров (пуассонизированной схемы), попавших в k -й ящик во временном промежутке $[0, e^t]$. В силу равенства

$$\mathbf{E}(K(e^t) | (P_j)) = \sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp(-e^{t-S_k}(1 - W_{k+1})) \right) \quad (22)$$

для доказательства желаемой аппроксимации достаточно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \mathbf{D}(K(e^t) | (P_j)) = 0. \quad (23)$$

Поскольку при фиксированных (P_j) индикаторы в (21) независимы, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{D}(K(e^t) | (P_j)) &= \mathbf{E} \sum_{k \geq 0} \left(\exp(-e^{t-S_k}(1 - W_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. - \exp(-2e^{t-S_k}(1 - W_{k+1})) \right) \\ &= \int_{[0, \infty)} (\varphi(e^{t-y}) - \varphi(2e^{t-y})) dU(y), \end{aligned}$$

где $\varphi(y) := \mathbf{E} e^{-y(1-W)}$. По лемме 8.1 (см. приложение) функция $g_0(y) := \varphi(e^y) - \varphi(2e^y)$ непосредственно интегрируема по Риману на $\mathbf{R}$, что позволяет использовать ключевую теорему восстановления, обосновывающую соотношение (23).

Шаг 3. Убедимся в справедливости соотношения

$$Z(t) := \sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})) \right) 1_{\{S_k > t\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

По лемме 8.1 функция $g_1(y) := \mathbf{E}(1 - \exp(-e^y(1-W)))$ непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty, 0]$. Отсюда и из ключевой теоремы восстановления вытекает, что

$$\mathbf{E} Z(t) = \int_{[t, \infty)} g_1(t-y) dU(y) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Шаг 4. Проверим выполнение соотношения при $t \rightarrow \infty$

$$Y(t) := \sum_{k \geq 0} \left(\exp(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})) - 1_{\{S_k + \eta_{k+1} > t\}} \right) 1_{\{S_k \leq t\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Для этого запишем $Y(t)$ в виде разности двух неотрицательных случайных функций:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{k \geq 0} \exp(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})) 1_{\{S_k + \eta_{k+1} \leq t\}} \\ &\quad - \sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})) \right) 1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} \\ &=: Y_1(t) - Y_2(t), \end{aligned}$$

и покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} Y_i(t) = 0$, $i = 1, 2$. Действительно, согласно лемме 8.1 функции $g_2(y) = \mathbf{E} \exp(-e^y(1-W)) 1_{\{1-W > e^{-y}\}}$ и $g_3(y) = \mathbf{E}(1 - \exp(-e^y(1-W))) 1_{\{1-W \leq e^{-y}\}}$ являются непосредственно интегрируемыми по Риману на $[0, \infty)$. Отсюда и из ключевой теоремы восстановления следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y_1(t) &= \int_{[0, t]} g_2(t-y) dU(y) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \\ \mathbf{E} Y_2(t) &= \int_{[0, t]} g_3(t-y) dU(y) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось.

С учетом равенства

$$\begin{aligned} &L(e^t) - \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} \\ &= \left(M(e^t) - \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq t\}} \right) \\ &\quad - \left(K(e^t) - \sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})) \right) \right) - Z(t) + Y(t) \end{aligned}$$

доказательство леммы 2.1 завершается объединением выводов всех четырех шагов.

Доказательство леммы 2.2. Если распределение случайной величины $|\ln W|$ нерешетчато, то доказательство проходит с использованием тех же формул, что и доказательство леммы 2.1. При этом отличие состоит лишь в том, что при реализации шага 1 вместо соотношения (19) (теоремы Блэкуэлла для случая бесконечного среднего) нужно использовать теорему Блэкуэлла для случая конечного среднего:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U(t+h) - U(t)) = \frac{h}{\mathbf{E} |\ln W|}$$

для любого $h > 0$, а при реализации шагов 2–4 в тех местах, где в доказательстве леммы 2.1 была использована ключевая теорема восстановления для случая бесконечного среднего, нужно использовать лемму 8.2 из приложения. Если же распределение $|\ln W|$ является l -решетчатым для некоторого $l > 0$, то доказательство шага 1 леммы 2.1 требует модификации, приводимой ниже.

Шаг 1. Зафиксируем число $\gamma > 0$, и пусть $m \in \mathbf{N}$ таково, что $\gamma \leq ml$. Для выбранного γ и $\varepsilon > 0$ воспользуемся неравенством

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\nu(R(t)) - \nu(t)}{a(t)} 1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} > \varepsilon \mid R(t) \right\} \leq \frac{U(t+ml) - U(t)}{\varepsilon a(t)}.$$

Отсюда, из соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U(t+ml) - U(t)) = \frac{ml}{\mathbf{E} |\ln W|}$$

и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\frac{\nu(R(t)) - \nu(t)}{a(t)} 1_{\{0 < R(t) - t \leq \gamma\}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Что же касается шагов 2–4, то для их реализации, так же, как и в нерешетчатом случае, нужно воспользоваться леммой 8.2.

4. Доказательство леммы 2.3. Достаточно показать, что

$$K(t) - K_{[t]} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{и} \quad M(t) - M_{[t]} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (24)$$

и воспользоваться приемом Крамера–Уолда. В силу легко проверяемого неравенства $\mathbf{P}\{M(t) \neq M_{[t]}\} \leq \mathbf{P}\{K(t) \neq K_{[t]}\}$ лишь первое утверждение требует доказательства.

Докажем сначала, что для любого $x > 0$

$$K(t + x\sqrt{t}) - K(t - x\sqrt{t}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (22) для достаточно больших t получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t})) \\ &= \int_{[0, \infty)} \left(\varphi((t-x\sqrt{t})e^{-y}) - \varphi((t+x\sqrt{t})e^{-y}) \right) dU(y), \end{aligned}$$

где $\varphi(y) = \mathbf{E} e^{-y(1-W)}$. Так как функция $-\varphi'(y)$ не возрастает, то по теореме о среднем значении для дифференцируемых функций

$$\varphi((t-x\sqrt{t})e^{-y}) - \varphi((t+x\sqrt{t})e^{-y}) \leq -\varphi'((t-x\sqrt{t})e^{-y}) \cdot 2x\sqrt{t}e^{-y}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t})) \\ & \leq \frac{2x\sqrt{t}}{t-x\sqrt{t}} \int_{[0, \infty)} \left(-\varphi'((t-x\sqrt{t})e^{-y}) \right) (t-x\sqrt{t})e^{-y} dU(y). \end{aligned}$$

Согласно лемме 8.1, функция $g_4(y) = -\varphi'(e^y)e^y$ является непосредственно интегрируемой по Риману на $\mathbf{R}$. Отсюда и из леммы 8.2 вытекает, что

$$\int_{[0, \infty)} \left(-\varphi'((t-x\sqrt{t})e^{-y}) \right) (t-x\sqrt{t})e^{-y} dU(y) = O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для любого $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t})) = 0,$$

что влечет (25).

Поскольку процесс $(K(s))_{s \geq 0}$ не убывает с вероятностью единица, то для любого $x > 0$

$$\begin{aligned} |K_{[t]} - K(t)| &= |K(\tau_{[t]}) - K(t)| 1_{\{t-x\sqrt{t} \leq \tau_{[t]} \leq t+x\sqrt{t}\}} \\ &\quad + |K(\tau_{[t]}) - K(t)| 1_{\{|\tau_{[t]} - t| > x\sqrt{t}\}} \\ &\leq K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t}) + |K(\tau_{[t]}) - K(t)| 1_{\{|\tau_{[t]} - t| > x\sqrt{t}\}}. \end{aligned}$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|K_{[t]} - K(t)| > 2\varepsilon\} &\leq \mathbf{P}\{K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t}) > \varepsilon\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{|K(\tau_{[t]}) - K(t)| 1_{\{|\tau_{[t]} - t| > x\sqrt{t}\}} > \varepsilon\} \\ &\leq \mathbf{P}\{K(t+x\sqrt{t}) - K(t-x\sqrt{t}) > \varepsilon\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{|\tau_{[t]} - t| > x\sqrt{t}\}. \end{aligned}$$

Учитывая (25) и используя центральную предельную теорему для $\tau_{[t]}$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}\{|K_{[t]} - K(t)| > 2\varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{|\mathcal{N}(0, 1)| > x\},$$

где $\mathcal{N}(0, 1)$ обозначает случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение. Устремляя x к ∞ , убеждаемся в справедливости первого из соотношений в (24), что и требовалось.

5. Доказательство теоремы 1.1 и леммы 1.1. Согласно лемме 2.3, достаточно доказать, что

$$L(e^{ut}) \xrightarrow{\text{f.d.}} R_{\alpha,c}(u), \quad t \rightarrow \infty.$$

Поскольку условие (3) влечет равенство $\mathbf{E} |\ln W| = \infty$, то, применяя лемму 2.1, заключаем, что желаемое утверждение эквивалентно соотношению

$$\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_{k+\eta_{k+1}}\}} \xrightarrow{\text{f.d.}} R_{\alpha,c}(u), \quad t \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Введем ряд обозначений, используемых лишь в этом пункте и в лемме 8.4 из приложения:

$D := D[0, \infty)$ — пространство Скорохода функций, заданных на $[0, \infty)$, непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева;

$M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$ — множество радоновских точечных мер на $[0, \infty) \times (0, \infty]$, наделенное грубой (vague) топологией;

$C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$ — множество неотрицательных непрерывных функций, заданных на $[0, \infty) \times (0, \infty]$ и имеющих компактный носитель²⁾;

$\mu_{\alpha,c}$ — мера на $(0, \infty) \times (0, \infty]$ такая, что

$$\mu_{\alpha,c}\{(u, v): u > x_1 \text{ или } v > x_2\} = x_1^{-\alpha} + c^{-1}x_2^{-\alpha}, \quad x_1, x_2 > 0,$$

здесь константа c та же, что и в (3).

Напомним также, что обозначения $N_{\infty}^{(\alpha,c)}$, $\nu_{\alpha,c}$, $(X_{\alpha}(t))$ и (S_n) были введены перед формулировками теоремы 1.1 и леммы 2.1 соответственно.

Хорошо известно, что условие $\mathbf{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$, где $\alpha \in (0, 1)$, гарантирует выполнение соотношения

$$\frac{S_{[ut]}}{c(t)} \Rightarrow X_{\alpha}(u), \quad t \rightarrow \infty,$$

в D в J_1 -топологии Скорохода, где $c(t)$ — любая положительная функция, удовлетворяющая соотношению $\lim_{t \rightarrow \infty} tc^{-\alpha}(t)\ell(c(t)) = 1$ (см. замечание 1.2(I) по поводу существования таких функций). Кроме того, имеет место сходимость

$$\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)} \Rightarrow X_{\alpha}(u), \quad t \rightarrow \infty, \quad (27)$$

в D в J_1 -топологии Скорохода, где $S_{[ut]-1} = 0$ для $0 \leq u < 1/t$. Действительно, согласно теореме 3 [8], очевидная сходимость конечномерных распределений влечет сходимость в J_1 -топологии, поскольку

²⁾ Обратим внимание читателя на то, что по второй координате роли точек 0 и ∞ меняются, т.е. компактными в $[0, \infty) \times (0, \infty]$ будут, в частности, множества $[0, a] \times [b, \infty]$ при $a, b > 0$.

для каждого $t > 0$ траектории процесса в левой части (27) не убывают почти наверное, а предельный субординатор является стохастически непрерывным. Далее, согласно утверждению 3.21 [26], условие $\mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| > x\} \sim c^{-1}x^{-\alpha}\ell(x)$ влечет за собой сходимость

$$\sum_{k \geq 1} \varepsilon_{(k/t, \eta_k/c(t))} \Longrightarrow N_{\infty}^{(\alpha, c)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

в $M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$ в грубой топологии. По определению грубой сходимости последнее эквивалентно сходимости одномерных распределений

$$\sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \xrightarrow{d} \sum_m g(t_m, j_m), \quad t \rightarrow \infty, \quad (28)$$

для любых функций $g \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$.

Если бы скачки случайного блуждания имели такое же распределение, как $|\ln W|$, и не зависели от последовательности $(\eta_k) = (|\ln(1 - W_k)|)$, то предельное соотношение (26) вытекало бы из следствия 2.3 работы [25]. В нашем случае, когда упомянутая независимость отсутствует, доказательство Микоша и Резника все еще применимо, за исключением того, что соотношение

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)}, \sum_{k \geq 1} \varepsilon_{(k/t, \eta_k/c(t))}\right) \Longrightarrow (X_{\alpha}(u), N_{\infty}^{(\alpha, c)}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (29)$$

в пространстве $D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$, наделенном продакт-топологией, порожденной J_1 -топологией Скорохода и грубой топологией, *должно быть доказано*, в то время как в ситуации, рассматриваемой в статье [25], оно выполняется автоматически. Действительно, если соотношение (29) верно, то дословное повторение последней части доказательства теоремы 2.1 [25] позволяет утверждать, что

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_{(S_k/c(t), \eta_{k+1}/c(t))} \Longrightarrow \sum_m \varepsilon_{(X_{\alpha}(t_m), j_m)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

в пространстве $M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. Переход от последнего соотношения к (26) осуществляется так же, как в доказательстве следствия 2.3 [25].

Согласно лемме 8.4, для доказательства соотношения (29) достаточно проверить, что для любой функции $g \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$ имеет место слабая сходимость

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)}, \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right)\right) \Longrightarrow \left(X_{\alpha}(u), \sum_m g(t_m, j_m)\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

в $D \times [0, \infty)$.

Полагая вторые координаты функциями в D , принимающими постоянные значения, и используя лемму 2.6 [20], заключаем, что достаточно убедиться в сходимости конечномерных распределений, т.е. в том, что при $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]-1}}{c(t)} + \gamma \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^n \gamma_i X_\alpha(u_i) + \gamma \sum_m g(t_m, j_m) \quad (30)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$, любых $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n \geq 0$ и любых $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$, и в плотности координат.

Плотность координат следует из (27) и (28) соответственно. По техническим соображениям нам будет удобнее проверить справедливость соотношения

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]}}{c(t)} + \gamma \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^n \gamma_i X_\alpha(u_i) + \gamma \sum_m g(t_m, j_m) \quad (31)$$

при $t \rightarrow \infty$, которое эквивалентно (30) в силу леммы Слупцкого.

Установим (31), используя метод доказательства утверждения 3.21 [26]. Для $z > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \phi_t(z) &:= \mathbf{E} \exp \left(-z \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]}}{c(t)} + \gamma \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \right) \right) \\ &= \mathbf{E} \exp \left(-z \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{c(t)} \sum_{k \geq 1} |\ln W_k| 1_{\{k \leq u_i t\}} + \gamma \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \right) \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \mathbf{E} \exp \left(-z \left(\frac{|\ln W|}{c(t)} \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k \leq u_i t\}} + \gamma g\left(\frac{k}{t}, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\right) \right) \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} \left(1 - K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \right) \\ &\quad \times \mathbf{P} \left\{ \frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv \right\}, \end{aligned}$$

где $K(z, u, v, w) := 1 - \exp(-z(u \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{w \leq u_i\}} + \gamma g(w, v)))$. Обозначим через C (компактный) носитель g . Ясно, что для любого $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} &\int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \mathbf{P} \left\{ \frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv \right\} \\ &\leq \mathbf{E} \left(1 - \exp \left(- \frac{z |\ln W|}{c(t)} \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k \leq u_i t\}} \right) \right) \\ &\quad + \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{|\ln W|}{c(t)}, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \right) \in C \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbf{N}} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \mathbf{P}\left\{\frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv\right\} = 0. \quad (32)$$

Очевидно, что для достаточно малых значений $x_0 > 0$ найдется число $M = M(x_0) > 0$ такое, что

$$0 \leq -\ln(1-x) - x \leq Mx^2, \quad 0 < x \leq x_0.$$

Отсюда, учитывая (32), получаем для достаточно больших t

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\ln \phi_t(z) - \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \\ &\quad \times \mathbf{P}\left\{\frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv\right\} \\ &\leq M \sum_{k \geq 1} \left(\int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \mathbf{P}\left\{\frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv\right\} \right)^2. \end{aligned}$$

Используя (32) еще раз, заключаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln \phi_t(z) - \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \right. \\ \left. \times \mathbf{P}\left\{\frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv\right\} \right) = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

для каждого $z > 0$.

Условия (3) влекут за собой соотношения

$$t \mathbf{P}\left\{\left(\frac{|\ln W|}{c(t)}, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\right) \in \cdot\right\} \xrightarrow{v} \mu_{\alpha, c}(\cdot), \quad t \rightarrow \infty, \quad (34)$$

и

$$t \mathbf{P}\left\{\frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in \cdot\right\} \xrightarrow{v} \nu_{\alpha, c}(\cdot), \quad t \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где символ $\xrightarrow{v}$ обозначает грубую сходимость мер. Заметим, что мера $\mu_{\alpha, c}$ сосредоточена на координатных осях. Этим объясняется независимость компонент предельного вектора в соотношении (29), а также формула интегрирования

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} f(u, v) \mu_{\alpha, c}(du, dv) \\ = \alpha \int_0^\infty f(u, 0) u^{-\alpha-1} du + \alpha c^{-1} \int_0^\infty f(0, v) v^{-\alpha-1} dv, \quad (36) \end{aligned}$$

имеющая место для всех функций f , для которых интегралы корректно определены.

Из соотношения (34) получаем

$$\begin{aligned} \mu^{(t)}(dx, du, dv) &:= \sum_{k \geq 1} \varepsilon_{k/t}(dx) \mathbf{P} \left\{ \frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv \right\} \\ &\xrightarrow{v} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\varepsilon_{k/t}$ обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке k/t , в то время как соотношение (35) дает

$$\mu^{(t)}(dx, (0, \infty], dv) \xrightarrow{v} dx \mu_{\alpha, c}((0, \infty], dv), \quad t \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K\left(z, u, v, \frac{k}{t}\right) \mathbf{P} \left\{ \frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)} \in dv \right\} \\ = \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) \mu^{(t)}(dx, du, dv) \end{aligned}$$

и покажем, что для каждого $z > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) \mu^{(t)}(dx, du, dv) \\ = \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) dx \mu_{\alpha, c}(du, dv). \end{aligned} \quad (39)$$

Это соотношение не следует автоматически из (37), так как при фиксированном z функция $K(z, \cdot)$ не сосредоточена на компакте в пространстве $(0, \infty] \times (0, \infty] \times [0, \infty)$. Для доказательства (39) заметим, что в этом же пространстве функция $(u, v, x) \mapsto K(z, u, v, x) 1_{\{u \geq 1 \text{ или } x > u_n\}}$ имеет компактный носитель (см. сноску²) на с. 43) при любом фиксированном $z > 0$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int K(z, u, v, x) 1_{\{u < 1, x \leq u_n\}} \mu^{(t)}(dx, du, dv) \\ = \int K(z, u, v, x) 1_{\{u < 1, x \leq u_n\}} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv). \end{aligned} \quad (40)$$

Для простоты выкладок³) докажем это соотношение в случае $n = 1$. Так как при фиксированном z функция

$$\widehat{K}(z, u, v, x) := \begin{cases} \frac{1 - \exp(-z(u\gamma_1 + \gamma g(x, v)))}{u\gamma_1 + \gamma g(x, v)}, & u\gamma_1 + \gamma g(x, v) \neq 0, \\ z, & u\gamma_1 + \gamma g(x, v) = 0, \end{cases}$$

³) Общий случай доказывается путем разбиения области интегрирования по переменной x на интервалы $[u_{i-1}, u_i]$ и проверки сходимости интегралов по каждому из промежутков.

непрерывна и ограничена, то для доказательства (40) достаточно установить слабую сходимость мер

$$u1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} \mu^{(t)}(dx, du, dv) \implies u1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv), \quad t \rightarrow \infty, \quad (41)$$

и

$$\begin{aligned} g(x, v)1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} \mu^{(t)}(dx, du, dv) \\ \implies g(x, v)1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (37) следует, что в формулах (41) и (42) имеет место грубая сходимость, так как если функция f непрерывна и имеет компактный носитель, то этим же свойством обладают функции $u1_{\{u < 1, x \leq u_1\}}f$ и $g(x, v)1_{\{u < 1, x \leq u_1\}}f$. Согласно теореме 30.8 (ii) из [7], эта сходимость будет усилена до слабой сходимости, если мы покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int u1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} \mu^{(t)}(dx, du, dv) = \int u1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv) \quad (43)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int g(x, v)1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} \mu^{(t)}(dx, du, dv) \\ = \int g(x, v)1_{\{u < 1, x \leq u_1\}} dx \mu_{\alpha, c}(du, dv). \end{aligned} \quad (44)$$

Допредельное выражение в левой части (43) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[u_1 t]} \int_{[0, 1) \times (0, \infty)} u \mathbf{P} \left\{ \frac{|\ln W|}{c(t)} \in du, \frac{|\ln(1 - W)|}{c(t)} \in dv \right\} \\ = \frac{[u_1 t]}{c(t)} \mathbf{E} |\ln W| 1_{\{|\ln W| < c(t)\}}, \end{aligned}$$

что в силу (3) стремится к $\alpha(1 - \alpha)^{-1}u_1$ при $t \rightarrow \infty$. Очевидно, что найденное предельное значение равно правой части (43). Докажем справедливость равенства (44). Положим $\hat{g}(x, v) := g(x, v)1_{\{x \leq u_1\}}$. Ясно, что $\hat{g} \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty))$. Так как функция $\hat{g}(x, v)1_{\{u \geq 1\}}$ имеет компактный носитель, то равенство (44) будет доказано, если мы покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \hat{g}(x, v) \mu^{(t)}(dx, du, dv) = \int \hat{g}(x, v) dx \mu_{\alpha, c}(du, dv). \quad (45)$$

Для проверки этого факта достаточно заметить, что эквивалентная форма записи (45) имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \hat{g}(x, v) \mu^{(t)}(dx, (0, \infty], dv) = \int \hat{g}(x, v) dx \mu_{\alpha, c}((0, \infty], dv),$$

причем последнее соотношение следует из (38). Итак, формула (39) доказана.

Используя формулу интегрирования (36) и равенство $g(x, 0) = 0$, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) dx \mu_{\alpha, c}(du, dv) \\ &= \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \exp \left(-zu \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{x \leq u_i\}} \right) \right) dx u^{-\alpha-1} du \\ &+ \alpha c^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \exp(-z\gamma g(x, v)) \right) dx v^{-\alpha-1} dv \\ &= -\ln \mathbf{E} \exp \left(-z \sum_{i=1}^n \gamma_i X_\alpha(u_i) \right) - \ln \mathbf{E} \exp \left(-z\gamma \sum_m g(t_m, j_m) \right) \end{aligned}$$

для каждого $z > 0$. Из этой формулы с учетом (39) и (33) получаем (31) и, следовательно, совместную сходимость (29). Теорема 1.1 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 1.1. Для нахождения распределения $R_{\alpha, c}(u)$ зафиксируем $\delta > 0$, положим

$$R_{\alpha, c}^{(\delta)}(u) := \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u < S_k + \eta_{k+1}, \eta_{k+1} > \delta\}}$$

и воспользуемся равенством

$$\mathbf{E} e^{-z R_{\alpha, c}^{(\delta)}(u)} = \mathbf{E} \exp \left(- \int_{[0, \infty)} \int_{(\delta, \infty)} (1 - e^{-z 1_{\{X_\alpha(s) \leq u < X_\alpha(s) + y\}}}) ds \nu_{\alpha, c}(dy) \right),$$

при $z \geq 0$, являющимся частным случаем формулы, приведенной в [25, с. 136]. Отсюда, после ряда естественных преобразований, выводим, что

$$\mathbf{E} e^{-z R_{\alpha, c}^{(\delta)}(u)} = \mathbf{E} \exp \left(-c^{-1} \int_{[0, u]} ((u-s) \vee \delta)^{-\alpha} dX_\alpha^\leftarrow(s) (1 - e^{-z}) \right), \quad z \geq 0.$$

Переходя к пределу $\delta \downarrow 0$ и используя теорему непрерывности для преобразований Лапласа, получаем

$$\mathbf{E} e^{-z R_{\alpha, c}(u)} = \mathbf{E} \exp \left(-c^{-1} \int_{[0, u]} (u-s)^{-\alpha} dX_\alpha^\leftarrow(s) (1 - e^{-z}) \right), \quad z \geq 0.$$

Таким образом, распределение $R_{\alpha, c}(u)$ является смешанным пуассоновским с параметром $c^{-1} \int_{[0, u]} (u-s)^{-\alpha} dX_\alpha^\leftarrow(s)$. В статье [23] показано, что распределение последнего интеграла является показательным с единичным средним. Поэтому распределение $R_{\alpha, c}(u)$ является геометрическим с вероятностью успеха $c(c+1)^{-1}$, что и утверждалось. Лемма 1.1 доказана.

6. Доказательство теоремы 1.2. Если мы убедимся в справедливости соотношения

$$\frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} L(e^{ut}) \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha, \beta}(u), \quad t \rightarrow \infty, \quad (46)$$

где $F(t) := \mathbf{P}\{|\ln W| \leq t\}$ и $G(t) := \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| \leq t\}$, $t \geq 0$, то ввиду леммы 2.3 из него будет следовать (6).

Так как первое из условий (5) влечет равенство $\mathbf{E}|\ln W| = \infty$, то в силу леммы 2.1 достаточно проверить, что

$$\frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha, \beta}(u), \quad t \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Согласно теореме 2.9 [23], при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} | S_k) \\ &= \frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} \sum_{k \geq 0} (1 - G(ut - S_k)) 1_{\{S_k \leq ut\}} \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha, \beta}(u). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\sum_{k \geq 0} \left(1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} - \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} | S_k) \right) \right)^2 \\ &= \int_{[0, t]} G(y)(1 - G(y)) dU(y). \end{aligned}$$

Так же, как это делалось в доказательстве леммы 5.2 [23], можно показать, что

$$\int_{[0, t]} G(y)(1 - G(y)) dU(y) \sim \text{const} \frac{1 - G(t)}{1 - F(t)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда, из неравенства Маркова и условий теоремы следует, что

$$\frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} \sum_{k \geq 0} \left(1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} - \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq t < S_k + \eta_{k+1}\}} | S_k) \right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поскольку нормирующий множитель правильно меняется при $t \rightarrow \infty$, то использование приема Крамера–Уолда дает возможность утверждать, что

$$\frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} \sum_{k \geq 0} \left(1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} | S_k) \right) \xrightarrow{\text{f.d.}} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, выполняется соотношение (47), а значит, и (46). Теорема 1.2 доказана.

7. Доказательство теоремы 1.3. Напомним введенные ранее обозначения: $G(t) = \mathbf{P}\{|\ln(1 - W)| \leq t\}$, (S_n) — стартующее из нуля случайное блуждание с шагами $|\ln W_k|$, а $\eta_n = |\ln(1 - W_n)|$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть, далее,

$$q(t) := \sqrt{\mu^{-1} \int_0^t (1 - G(y)) dy}.$$

Утверждение 7.1. Если $\mu = \mathbf{E}|\ln W| < \infty$ и выполнено условие (7), то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} | S_k)}{q(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} V(u).$$

Доказательство. Мы ограничимся проверкой сходимости двумерных распределений. Общий случай громоздок и не требует новых идей.

Зафиксируем $0 < u_1 < u_2$. Согласно приему Крамера–Уолда, достаточно установить, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j=1}^2 \gamma_j \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u_j t\}} (1_{\{S_k + \eta_{k+1} > u_j t\}} - (1 - G(u_j t - S_k)))}{q(t)} \\ & \xrightarrow{d} \gamma_1 V(u_1) + \gamma_2 V(u_2) \end{aligned} \quad (48)$$

для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$.

Заметим, что случайная величина $\gamma_1 V(u_1) + \gamma_2 V(u_2)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\gamma_1^2 u_1^{1-\beta} + \gamma_2^2 u_2^{1-\beta} + 2\gamma_1 \gamma_2 (u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}).$$

Введем σ -алгебры $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_k := \sigma(W_1, \dots, W_k)$, $k \in \mathbf{N}$. Поскольку

$$\mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^2 \gamma_j 1_{\{S_k \leq u_j t\}} (1_{\{S_k + \eta_{k+1} > u_j t\}} - (1 - G(u_j t - S_k))) \middle| \mathcal{F}_k \right) = 0,$$

то для доказательства (48) можно применить мартингальную центральную предельную теорему (см. [19, следствие 3.1]), согласно которой достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(X_{tk}^2 | \mathcal{F}_k) \xrightarrow{\mathbf{P}} \gamma_1^2 u_1^{1-\beta} + \gamma_2^2 u_2^{1-\beta} + 2\gamma_1 \gamma_2 (u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (49)$$

где

$$X_{tk} := \frac{\sum_{j=1}^2 \gamma_j 1_{\{S_k \leq u_j t\}} (1_{\{S_k + \eta_{k+1} > u_j t\}} - (1 - G(u_j t - S_k)))}{q(t)},$$

и что для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(X_{tk}^2 1_{\{|X_{tk}| > \varepsilon\}} | \mathcal{F}_k) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Неравенство $|X_{tk}| \leq (|\gamma_1| + |\gamma_2|)/q(t)$ показывает, что в наших условиях соотношение (50) следует из (49).

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(X_{tk}^2 | \mathcal{F}_k) &= \frac{\sum_{j=1}^2 \gamma_j^2 \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u_j t\}} (1 - G(u_j t - S_k)) G(u_j t - S_k)}{q^2(t)} \\ &+ \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u_1 t\}} (1 - G(u_2 t - S_k)) G(u_1 t - S_k)}{q^2(t)}. \end{aligned}$$

Покажем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u_1 t\}} (1 - G(u_2 t - S_k))}{q^2(t)} &= \frac{\int_{[0, u_1]} (1 - G(t(u_2 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} \\ &\rightarrow u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta} \end{aligned} \quad (51)$$

почти наверное. По усиленному закону больших чисел, примененному к процессу $(\nu(t))$, соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu(ty)}{\mu^{-1}t} = y$$

выполняется почти наверное для всех $y \in [0, u_1]$. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(t(u_2 - y))}{1 - G(t)} = (u_2 - y)^{-\beta}$$

равномерно по $y \in [0, u_1]$. Значит⁴⁾,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{[0, u_1]} (1 - G(t(u_2 - y))) d\nu(ty)}{\mu^{-1}t(1 - G(t))} &= \int_0^{u_1} (u_2 - y)^{-\beta} dy \\ &= (1 - \beta)^{-1} (u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}) \end{aligned}$$

почти наверное. Остается заметить, что $\int_0^t (1 - G(y)) dy \sim (1 - \beta)^{-1} t(1 - G(t))$.

Для доказательства того, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{[0, u_1]} (1 - G(t(u_2 - y)))(1 - G(t(u_1 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} = 0 \quad (52)$$

⁴⁾ Для доказательства подобного соотношения в более общей ситуации см. [22, лемма А.6].

почти наверное, зафиксируем $\varepsilon \in (0, u_1)$ и, воспользовавшись монотонностью функции $1 - G(t)$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{[0, u_1 - \varepsilon]} (1 - G(t(u_2 - y)))(1 - G(t(u_1 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} \\ & \leq \frac{(1 - G(\varepsilon t)) \int_{[0, u_1 - \varepsilon]} (1 - G(t(u_2 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (51), в котором вместо u_1 подставлено $u_1 - \varepsilon$, заключаем, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю почти наверное при $t \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{(u_1 - \varepsilon, u_1]} (1 - G(t(u_2 - y)))(1 - G(t(u_1 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} \\ & \leq \frac{\int_{(u_1 - \varepsilon, u_1]} (1 - G(t(u_2 - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)}, \end{aligned}$$

причем при $t \rightarrow \infty$ предел правой части этого неравенства равен $(u_2 - u_1 + \varepsilon)^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}$. Для завершения доказательства (52) достаточно теперь устремить ε к нулю.

Таким образом, мы установили, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq u_1 t\}} (1 - G(u_2 t - S_k)) G(u_1 t - S_k)}{q^2(t)} = u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}$$

почти наверное.

Покажем теперь, что при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut\}} (1 - G(ut - S_k))}{q^2(t)} = \frac{\int_{[0, u]} (1 - G(t(u - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} \xrightarrow{\mathbf{P}} u^{1-\beta}. \quad (53)$$

Заметим прежде всего, что для любого $\varepsilon \in (0, u)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{[0, u - \varepsilon]} (1 - G(t(u - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} = u^{1-\beta} - \varepsilon^{1-\beta}$$

почти наверное, в чем можно убедиться аналогично тому, как было доказано (51). Так как правая часть последнего равенства стремится к $u^{1-\beta}$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то для завершения доказательства соотношения (53) осталось проверить, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\int_{(u - \varepsilon, u]} (1 - G(t(u - y))) d\nu(ty)}{q^2(t)} > \delta \right\} = 0.$$

В силу неравенства Маркова последнее будет справедливо, если мы покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{(u - \varepsilon, u]} (1 - G(t(u - y))) dU(ty)}{q^2(t)} = 0. \quad (54)$$

Используя сначала лемму 8.3, а затем правильное изменение функции $1 - G(t)$, получаем

$$\int_{((u-\varepsilon)t, ut]} (1 - G(ut - y)) dU(y) \sim \mu^{-1} \int_0^{\varepsilon t} (1 - G(y)) dy \sim \varepsilon^{1-\beta} q^2(t),$$

при $t \rightarrow \infty$, что доказывает (54). Значит, соотношение (53) выполняется.

Наконец, применяя подход, подобный тому, что был использован для доказательства (52) (или, еще проще, анализируя асимптотику первого момента), убеждаемся в том, что при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut\}} (1 - G(ut - S_k))^2}{q^2(t)} = \frac{\int_{[0, u]} (1 - G(t(u - y)))^2 d\nu(ty)}{q^2(t)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (55)$$

Сходимость по вероятности в (49) следует теперь из (51), (52), (53) и (55) (последними двумя соотношениями нужно воспользоваться отдельно для $u = u_1$ и для $u = u_2$). Утверждение 7.1 доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.3. Если выполнены условия (7) и $\mu = \mathbf{E} |\ln W| < \infty$ (принадлежность распределения случайной величины $|\ln W|$ области притяжения устойчивого закона не требуется), то, согласно утверждению 7.1, при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_{k+\eta_{k+1}}\}} - \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq ut < S_{k+\eta_{k+1}}\}} | S_k)}{q(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} V(u). \quad (56)$$

Далее, если выполнены предположения одного из пунктов (a)–(c), то, считая, что случаям (a) и (b) соответствует $\alpha = 2$, и полагая $g(t) = \sqrt{\sigma^2 \mu^{-3} t} (1 - G(t))$ в случае (a) и $g(t) = \mu^{-1-1/\alpha} c(t) (1 - G(t))$ в случаях (b) и (c), мы можем применить теорему 2.7 из [23], в соответствии с которой при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(1_{\{S_k \leq ut < S_{k+\eta_{k+1}}\}} | S_k) - \mu^{-1} \int_0^{ut} (1 - G(y)) dy}{g(t)} \\ &= \frac{\sum_{k \geq 0} (1 - G(ut - S_k)) 1_{\{S_k \leq ut\}} - q^2(ut)}{g(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha, \beta}(u). \end{aligned} \quad (57)$$

Рассмотрим теперь все случаи, перечисленные в теореме 1.3.

Случаи (a), (b1) и (c1). Наша цель — проверка соотношения

$$\frac{L(e^{ut}) - q^2(ut)}{q(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} V(u), \quad t \rightarrow \infty.$$

В силу леммы 2.3 этого будет достаточно для доказательства теоремы 1.3 в рассматриваемых случаях.

Так как предположения теоремы 1.3 влекут соотношения $\mu < \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$, то, согласно лемме 2.2, для доказательства интересующей нас сходимости достаточно убедиться в том, что

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - q^2(ut)}{q(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} V(u), \quad t \rightarrow \infty.$$

Если будет доказано соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{q(t)} = 0, \quad (58)$$

то желаемый результат будет следовать из (56) и (57).

Заметим сначала, что в силу утверждения 1.5.8 [9]

$$q^2(t) \sim \text{const } t^{1-\beta} \widehat{\ell}(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

В случае (а) имеем $g^2(t) \sim \text{const } t^{1-2\beta} (\widehat{\ell}(t))^2$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому соотношение (58) выполняется (при $\beta = 0$ нужно заметить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\ell}(t) = 0$). В случае (b1) имеем $g^2(t) \sim \text{const } t^{1-2\beta} (\ell^*(t) \widehat{\ell}(t))^2$, $t \rightarrow \infty$, и справедливость (58) обеспечивается предположением (10). Наконец, в случае (с1) имеем $g^2(t) \sim \text{const } t^{2/\alpha-2\beta} (\ell^*(t) \widehat{\ell}(t))^2$, $t \rightarrow \infty$, и (58) вытекает из условия (13).

Случаи (b2) и (с2). Рассуждая так же, как в предыдущих случаях, заключаем, что, во-первых, достаточно доказать соотношение

$$\frac{L(e^{ut}) - q^2(ut)}{g(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha,\beta}(u), \quad t \rightarrow \infty,$$

во-вторых, последнее будет следовать из сходимости

$$\frac{\sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - q^2(ut)}{g(t)} \xrightarrow{\text{f.d.}} W_{\alpha,\beta}(u), \quad t \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{q(t)} = \infty, \quad (60)$$

то (59) является следствием (56) и (57). Рассмотрим случай (с2), так как анализ случая (b2) аналогичен. Согласно условиям теоремы, $g^2(t) \sim \text{const } t^{-2\beta+2/\alpha} (\ell^*(t) \widehat{\ell}(t))^2$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому при $\beta \in [0, 2/\alpha - 1)$ соотношение (60) выполняется автоматически, а в случае $\beta = 2/\alpha - 1$ оно обеспечивается равенством (14). Теорема 1.3 доказана.

8. Приложение. Лемма 8.1 применяется в доказательствах лемм 2.1 и 2.3.

Лемма 8.1. Пусть θ — случайная величина, принимающая значения в полуинтервале $(0, 1]$. Тогда функции $g_0(y) := \mathbf{E} \exp(-e^y \theta) - \mathbf{E} \exp(-2e^y \theta)$ и $g_4(y) := e^y \mathbf{E} \theta \exp(-e^y \theta)$ являются непосредственно интегрируемыми по Риману на $\mathbf{R}$, функция $g_1(y) := \mathbf{E} (1 - \exp(-e^y \theta))$ — на полуоси $(-\infty, 0]$, а функции $g_2(y) := \mathbf{E} \exp(-e^y \theta) 1_{\{\theta > e^{-y}\}}$ и $g_3(y) := \mathbf{E} (1 - \exp(-e^y \theta)) 1_{\{\theta \leq e^{-y}\}}$ — на полуоси $[0, \infty)$.

Доказательство. Поскольку функции g_i , $i = 0, 4$, и g_3 неотрицательны, достаточно проверить их интегрируемость по Лебегу на $\mathbf{R}$ и $[0, \infty)$ соответственно, а также то, что функции $e^{-y} g_i(y)$, $i = 0, 3, 4$, не возрастают (см., например, доказательство следствия 2.17 [11]). Первое свойство вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} g_0(y) dy &= \int_0^\infty y^{-1} (\mathbf{E} e^{-y\theta} - \mathbf{E} e^{-2y\theta}) dy \\ &= \mathbf{E} \int_0^\infty y^{-1} (e^{-y\theta} - e^{-2y\theta}) dy = \ln 2, \\ \int_{\mathbf{R}} g_4(y) dy &= \mathbf{E} \int_0^\infty \theta e^{-y\theta} dy = 1 \end{aligned}$$

и оценок

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g_3(y) dy &= \mathbf{E} \int_1^\infty y^{-1} (1 - \exp(-y\theta)) 1_{\{\theta \leq y^{-1}\}} dy \\ &= \mathbf{E} \int_\theta^1 y^{-1} (1 - e^{-y}) dy \leq \int_0^1 y^{-1} (1 - e^{-y}) dy < \infty. \end{aligned}$$

При этом для оправдания последней цепочки оценок нужно использовать замену переменной и условие $\theta \in (0, 1]$ почти наверное. Далее, при фиксированном $z \in (0, 1]$ функция $y^{-1} (1 - e^{-yz}) e^{-yz}$ не возрастает на $[0, \infty)$. Значит, и функция $e^{-y} g_0(y)$ не возрастает. По тем же соображениям, при фиксированном $z \in (0, 1]$ функции $y^{-1} (1 - e^{-yz})$ и $1_{\{z \leq y^{-1}\}}$ не возрастают на $(0, \infty)$. Поэтому не возрастает и их произведение. Значит, функция $e^{-y} g_3(y)$ не возрастает. Для функции g_4 необходимое свойство монотонности, очевидно, выполнено.

Поскольку функция g_1 неотрицательна и не убывает, достаточно проверить ее интегрируемость по Лебегу на $(-\infty, 0]$:

$$\int_{-\infty}^0 g_1(y) dy = \int_0^1 y^{-1} \mathbf{E} (1 - e^{-y\theta}) dy \leq \int_0^1 \mathbf{E} \theta dy \in (0, 1].$$

Положительная функция $h(y) := \exp(-e^y)$ является непосредственно интегрируемой по Риману на $[0, \infty)$. Поскольку функция g_2 является сверткой h и функции распределения случайной величины $|\ln \theta|$, то

функция g_2 непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$ согласно утверждению 2.16 (d) в [10, с. 297]. Лемма доказана.

Обозначим через $(S_n^*)_{n \in \mathbf{N}_0}$ случайное блуждание, стартующее из нуля, приращения которого распределены так же, как неотрицательная случайная величина ξ^* . Положим

$$U^*(t) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\{S_n^* \leq t\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Эти обозначения используются (без напоминания) в формулировках двух следующих утверждений, первое из которых — лемма 8.2, — по-видимому, известна. Мы приводим доказательство леммы 8.2, поскольку оно не было обнаружено в доступных нам источниках.

Лемма 8.2. *Если функция $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$, то*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} f(t-y) dU^*(y) < \infty.$$

Если же функция f непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty, 0]$, то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{[t, \infty)} f(t-y) dU^*(y) < \infty.$$

Доказательство. Если распределение ξ^* нерешетчатое, то (даже более сильное) утверждение следует из ключевой теоремы восстановления. Предположим, что распределение ξ^* является l -решетчатым, $l > 0$. Мы рассмотрим только случай непосредственной интегрируемости на $[0, \infty)$.

Поскольку

$$f(t) \leq \sum_{n \geq 1} \sup_{(n-1)l \leq s < nl} f(s) 1_{[(n-1)l, nl)}(t), \quad t \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{[0, t]} f(t-y) dU^*(y) &\leq \sum_{n \geq 1} \sup_{(n-1)l \leq s < nl} f(s) (U^*(t-nl) - U^*(t-(n-1)l)) \\ &\leq U^*(l) \sum_{n \geq 1} \sup_{(n-1)l \leq s < nl} f(s). \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из субаддитивности U^* на $\mathbf{R}$. Остается заметить, что ряд в правой части этой цепочки неравенств сходится вследствие непосредственной интегрируемости по Риману функции f . Лемма доказана.

Лемма 8.3 применяется в доказательстве утверждения 7.1.

Лемма 8.3. Пусть функция $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ не возрастает, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} f(y) dy = \infty$ и $0 < \mathbf{E} \xi^* < \infty$. Для $0 \leq a < b \leq 1$ выполняется соотношение

$$\int_{[at, bt]} f(t-y) dU^*(y) \sim (\mathbf{E} \xi^*)^{-1} \int_{(1-b)t}^{(1-a)t} f(y) dy, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если распределение ξ^* нерешетчатое или 1-решетчатое, то доказательство аналогично доказательству теоремы 4 [28], где анализировался случай $a = 0, b = 1$. Если распределение ξ^* является l -решетчатым, то распределение $l^{-1}\xi^*$ является 1-решетчатым. Отсюда, обозначая $f_l(t) := f(lt)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{[at, bt]} f(t-y) dU^*(y) &= \int_{[al^{-1}t, bl^{-1}t]} f_l(l^{-1}t-y) d \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\{l^{-1}S_n^* \leq y\} \\ &\sim \frac{l}{\mathbf{E} \xi^*} \int_{(1-b)l^{-1}t}^{(1-a)l^{-1}t} f_l(y) dy = \frac{1}{\mathbf{E} \xi^*} \int_{(1-b)t}^{(1-a)t} f(y) dy. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В формулировке и доказательстве леммы 8.4, необходимой для доказательства теоремы 1.1, используются обозначения, введенные в п. 5.

Лемма 8.4. Пусть $X_t, t > 0$ и X — случайные элементы, принимающие значения в пространстве D , а m_t и m — случайные точечные процессы, принимающие значения из множества $M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. Слабая сходимость

$$(X_t, m_t) \Longrightarrow (X, m), \quad t \rightarrow \infty, \quad (61)$$

в продакт-топологии $D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждой функции $f \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$

$$(X_t, m_t(f)) \Longrightarrow (X, m(f)), \quad t \rightarrow \infty, \quad (62)$$

в продакт-топологии $D \times [0, \infty)$.

Доказательство. Предположим, что имеет место сходимость (61). Тогда для любой фиксированной функции $f \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$ отображение $T_f: D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty]) \rightarrow D \times [0, \infty)$, определяемое формулой $T_f(X, m) = (X, m(f))$, является непрерывным в продакт-топологии, и (62) следует из теоремы о непрерывном отображении.

Обратно, пусть (62) выполнено. Тогда $X_t \Rightarrow X$ в D , и $m_t(f) \xrightarrow{d} m(f)$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, семейства $(X_t)_{t \geq 0}$ и $(m_t(f))_{t \geq 0}$ плотны в D и $[0, \infty)$ соответственно. Значит, они относительно компактны по теореме Прохорова. Из леммы 3.20 [26] заключаем, что семейство (m_t) плотно (и относительно компактно) в $M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. Очевидно, что

тогда и декартово произведение $(X_t, m_s)_{t,s \geq 0}$ относительно компактно в $D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. Поэтому семейство $(X_t, m_t)_{t \geq 0}$ плотно в $D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. Остается заметить, что частичные пределы набора $(X_t, m_t)_{t \geq 0}$ совпадают по распределению, так как для каждой функции $f \in C_K([0, \infty) \times (0, \infty])$ имеет место (62). Лемма доказана.

Авторы выражают признательность рецензенту за ряд полезных комментариев, учтенных при подготовке окончательной версии данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
2. Мирахмедов Ш. А. Рандомизированные разделимые статистики в обобщенной схеме размещения по счетному множеству ячеек. — Дискрет. матем., 1989, т. 1, № 4, с. 46–62.
3. Мирахмедов Ш. А. Рандомизированные разделимые статистики в схеме независимого размещения частиц по ячейкам. — Дискрет. матем., 1990, т. 2, № 2, с. 97–111.
4. Михайлов В. Г. Центральная предельная теорема для схемы независимого размещения частиц по ячейкам. — Тр. МИАН, 1981, т. 157, с. 138–152.
5. Ширяев А. Н. Вероятность, кн. 1. М.: МЦНМО, 2007, 551 с.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
7. Bauer H. Measure and Integration Theory. Berlin: de Gruyter, 2001, 230 p.
8. Bingham N. H. Limit theorems for occupation times of Markov processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1971, v. 17, p. 1–22.
9. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 512 p.
10. Çinlar E. Introduction to Stochastic Processes. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1975, 402 p.
11. Durrett R., Liggett T. M. Fixed points of the smoothing transformation. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1983, v. 64, p. 275–301.
12. Gnedin A. V. The Bernoulli sieve. — Bernoulli, 2004, v. 10, № 1, p. 79–96.
13. Gnedin A., Hansen A., Pitman J. Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws. — Probab. Surv., 2007, v. 4, p. 146–171.
14. Gnedin A., Iksanov A. Regenerative compositions in the case of slow variation: a renewal theory approach. — Electron. J. Probab., 2012, v. 17, paper № 77, p. 1–19.
15. Gnedin A., Iksanov A., Marynych A. Limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. — Theory Stochastic Process., 2010, v. 16, № 2, p. 44–57.
16. Gnedin A., Iksanov A., Marynych A. The Bernoulli sieve: an overview. — Discr. Math. Theor. Comput. Sci., 2010, v. AM, p. 329–342.
17. Gnedin A., Iksanov A., Negadajlov P., Rösler U. The Bernoulli sieve revisited. — Ann. Appl. Probab., 2009, v. 19, № 4, p. 1634–1655.
18. Gnedin A., Iksanov A., Roesler U. Small parts in the Bernoulli sieve. — Discr. Math. Theor. Comput. Sci., Proc., 2008, v. AI, p. 235–242.
19. Hall P., Heyde C. C. Martingale Limit Theory and Its Applications. New York: Academic Press, 1980, 308 p.
20. Iglehart D. L. Weak convergence of compound stochastic process, I. — Stochastic Process. Appl., 1973, v. 1, p. 11–31.
21. Iksanov A. On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve, I. — Stochastics, 2013, v. 85, № 6, p. 946–959.

22. *Iksanov A.* On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve, II. — *Stochastic Process. Appl.*, 2012, v. 122, № 7, p. 2701–2729.
23. *Iksanov A., Marynych A., Meiners M.* Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions. *Stochastic Process. Appl.*, 2014, v. 124, № 6, p. 2132–2170.
24. *Karlin S.* Central limit theorems for certain infinite urn schemes. — *J. Math. Mech.*, 1967, v. 17, p. 373–401.
25. *Mikosch T., Resnick S.* Activity rates with very heavy tails. — *Stochastic Process. Appl.*, 2006, v. 116, № 2, p. 131–155.
26. *Resnick S.* *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes.* New York: Springer-Verlag, 1987, 320 p.
27. *Resnick S.* *Adventures in Stochastic Processes.* Boston: Birkhäuser, 2005.
28. *Sgibnev M. S.* Renewal theorem in the case of an infinite variance. — *Sib. Math. J.*, 1982, v. 22, p. 787–796.

Поступила в редакцию
16.III.2013

Исправленный вариант
2.X.2013