Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Гетце, А. А. Наумов, А. Н. Тихомиров, Предельные теоремы для двух классов случайных матриц с зависимыми элементами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 61–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:16:15

© 2014 г.

ГЁТЦЕ Ф.^{*}, НАУМОВ А. А.^{**},
ТИХОМИРОВ А. Н.^{***}ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДВУХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ
МАТРИЦ С ЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В работе рассматриваются случайные симметричные матрицы с зависимыми элементами. Предположим, что элементы матрицы имеют нулевое математическое ожидание и конечные дисперсии, которые могут быть различными числами. Предполагая выполнение условия Линдеберга и сходимость нормированных сумм дисперсий в каждой строке и столбце к единице, мы доказываем, что ожидаемая эмпирическая спектральная функция распределения собственных значений матрицы сходится к полукруговому закону Вигнера. Результат может быть обобщен на класс ковариационных матриц с зависимыми элементами. В этом случае ожидаемая эмпирическая спектральная функция распределения сходится к закону Марченко–Пастура.

Ключевые слова и фразы: случайные матрицы, полукруговой закон, закон Марченко–Пастура, числа Каталана.

1. Введение. Рассмотрим треугольный массив случайных величин X_{jk} , $1 \leq j \leq k < \infty$, и предположим, что $\mathbb{E}X_{jk} = 0$, $\mathbb{E}X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$, и пусть $X_{jk} = X_{kj}$ для всех $1 \leq j < k < \infty$. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и сформируем случайную матрицу

$$\mathbf{X}_n = \{X_{jk}\}_{j,k=1}^n.$$

^{*}Faculty of Mathematics, University of Bielefeld, 33501 Bielefeld, 1, Germany; e-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

^{**}Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: naumovne@gmail.com

^{***}Коми научный центр УРО РАН, Сыктывкарский государственный университет, Сыктывкар, Республика Коми, Россия; e-mail: sasha-tikh@yandex.ru

¹⁾ Работа поддержана грантом CRC 701 «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics», Bielefeld. Тихомиров А. Н. и Наумов А. А. поддерживаются также РФФИ (грант № 14-01-00500). Наумов А. А. поддерживается грантом фонда German Research Foundation (DFG) в рамках International Research Training Group IRTG 1132 и Фондом Саймонса. Тихомиров А. Н. также поддерживается программой фундаментальных исследований УРО РАН № 12-P-1-1013.

Обозначим через $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n$ и определим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\lambda_i \leq x),$$

где $\mathbb{I}(B)$ обозначает индикатор события B . Дополнительно определим ожидаемую эмпирическую спектральную функцию распределения $F^{\mathbf{X}_n}(x) := \mathbb{E}\mathcal{F}^{\mathbf{X}_n}(x)$.

Пусть $g(x)$ и $G(x)$ обозначают плотность и функцию распределения стандартного полукругового закона:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{I}(|x| \leq 2), \quad G(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du.$$

Вигнер в работе [1] рассмотрел случай, когда X_{jk} являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами и имеют моменты всех порядков (гауссовский случай и симметричный бернуллиевский случай). Он показал, что F_n сходится к $G(x)$. Этот результат позже был назван полукруговым законом Вигнера. Полукруговой закон был обобщен в разных направлениях Арнольдом в работе [2]. Например, была установлена сходимости почти наверное эмпирических спектральных функций распределения, но все также при дополнительных моментных ограничениях на элементы матрицы. Наиболее общие условия сходимости почти наверное к полукруговому закону Вигнера для симметричных матриц, рассмотренных выше, были установлены Пастуром [3]. Для всех $\tau > 0$ определим отношение Линдеберга для случайных матриц соотношением

$$L_n(\tau) := \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} X_{ij}^2 \mathbb{I}(|X_{ij}| \geq \tau \sqrt{n}).$$

Пастур показал, что условие Линдеберга является достаточным для справедливости полукругового закона. Из его результата, в частности, следует, что если X_{jk} , $1 \leq j \leq k \leq n$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, то $\mathcal{F}^{\mathbf{X}_n}(x)$ сходится почти наверное к полукруговому закону Вигнера. Отметим еще раз, что в работе Пастура требовалось выполнение равенства, что $\mathbb{E} X_{jk}^2 = 1$ для всех элементов матрицы. В ряде работ (см., например, [4] и [5]) авторам удалось в некоторых специальных случаях отказаться от выполнения этого требования.

В настоящей работе нас будут интересовать симметричные случайные матрицы с зависимыми элементами. В работе [6] Гётце и Тихомиров обобщили полукруговой закон на класс случайных матриц со структурой случайного поля. Ниже мы определим ансамбль симметричных

матриц со структурой случайного поля и получим достаточные условия, аналогичные условиям в мартингальной центральной предельной теореме (см., например, [7]). Подчеркнем, что, следуя [4] и [5], в настоящей работе мы не предполагаем, что все дисперсии слагаемых X_{jk} , $1 \leq j \leq k \leq n$, являются одинаковыми.

Определим набор σ -алгебр

$$\mathfrak{F}^{(i,j)} := \sigma\{X_{kl} : 1 \leq k \leq l \leq n, (k,l) \neq (i,j)\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\mathbb{E}(X_{ij} | \mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (2)$$

$$L_n(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любого фиксированного } \tau > 0. \quad (3)$$

Всюду далее мы будем использовать условие (3) не только для матрицы $\mathbf{X}_n$, но и для других матриц, заменяя элементы X_{ij} в определении отношения Линдберга соответствующими элементами этих матриц.

Для всех $1 \leq i \leq n$ обозначим сумму дисперсий в строке через $B_i^2 := n^{-1} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2$. Наложим условия на поведение дисперсий σ_{ij}^2 :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |B_i^2 - 1| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} B_i \leq C, \quad (5)$$

где C — некоторая абсолютная константа.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что условия (4) и (5) следуют из условия

$$\max_{1 \leq i \leq n} |B_i^2 - 1| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть случайные матрицы $\mathbf{X}_n$ удовлетворяют условиям (1)–(5). Тогда

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}_n}(x) - G(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Зафиксируем произвольные $1 \leq i \leq j \leq n$. Используя свойства математических ожиданий и условие (1), легко видеть, что для всех $(k,l) \neq (i,j)$, $1 \leq k \leq l \leq n$,

$$\mathbb{E}X_{ij}X_{kl} = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_{ij}X_{kl} | \mathfrak{F}^{(i,j)}) = \mathbb{E}X_{kl}\mathbb{E}(X_{ij} | \mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0.$$

Следовательно, элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ некоррелированы. Если дополнительно потребовать, чтобы элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ были независимыми случайными величинами, то условия (1) и (2) будут автоматически выполнены. Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 1 и представляет собой обобщение полукругового закона для симметричных случайных матриц с независимыми элементами.

Следствие 1. Пусть элементы X_{jk} случайной матрицы $\mathbf{X}_n$ независимы для всех $1 \leq j \leq k \leq n$ и $\mathbb{E}X_{jk} = 0$, $\mathbb{E}X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Предположим, что $\mathbf{X}_n$ удовлетворяет условиям (3)–(5). Тогда

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}_n}(x) - G(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В работе [6] авторы рассматривают ансамбли симметричных случайных матриц с фиксированным или ограниченным следом. Впервые такие ансамбли были рассмотрены в работах [8] и [9]. Разумным обобщением может служить следующий ансамбль. Предположим, что X_{jk} , $1 \leq j \leq k \leq n$, имеют совместное равномерное распределение на многомерном эллипсе или эллипсоиде с полуосями σ_{jk} , $1 \leq j \leq k \leq n$. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=i}^n \left(\frac{X_{jk}}{\sigma_{jk}} \right)^2 = N$$

или, в случае эллипсоида,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=i}^n \left(\frac{X_{jk}}{\sigma_{jk}} \right)^2 \leq N,$$

где $N = n(n-1)/2$. Следуя рассуждениям работы [6], легко установить справедливость условий (1)–(5).

Следствие 2. Пусть элементы X_{jk} , $1 \leq j \leq k \leq n$, случайной матрицы $\mathbf{X}_n$ удовлетворяют условиям выше. Тогда

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}_n}(x) - G(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следующий пример демонстрирует, что если условие (4) не выполнено, то последовательность эмпирических спектральных функций распределения может не сходиться к полукруговому закону.

Обозначим через $\mathbf{X}_n$ блочную матрицу вида

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

где матрица $\mathbf{A}$ симметричная и имеет размеры $m \times m$. Матрица $\mathbf{B}$ имеет размеры $m \times (n-m)$, а $\mathbf{D}$ обозначает диагональную матрицу размера

$(n - m) \times (n - m)$. Предположим, что элементы матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ имеют стандартное нормальное распределение. Положим $m := n/2$. Легко установить, что условие (4) не выполнено. На рис. 1 изображена компьютерная реализация спектра матрицы $\mathbf{X}_n$ в случае $n = 2000$.

Рис. 1. Спектр случайной матрицы $\mathbf{X}_n$.

Определим расстояние Леви между функциями распределения F_1 и F_2 формулой

$$L(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon > 0: F_1(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_2(x) \leq F_1(x + \varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Следующая теорема иллюстрирует принцип универсальности Линдберга для случайных матриц.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n$ — независимые случайные матрицы с $\mathbb{E}X_{jk} = \mathbb{E}Y_{jk} = 0$ и $\mathbb{E}X_{jk}^2 = \mathbb{E}Y_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Предположим, что матрица $\mathbf{X}_n$ удовлетворяет условиям (1)–(4), а матрица $\mathbf{Y}_n$ имеет гауссовские независимые элементы. Дополнительно потребуем, чтобы для матрицы $\mathbf{Y}_n$ было выполнено условие (3). Тогда

$$L(F^{\mathbf{X}_n}(x), F^{\mathbf{Y}_n}(x)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В силу теоремы 2 для доказательства теоремы 1 достаточно установить сходимость к полукруговому закону в гауссовском случае.

Теорема 3. Пусть элементы Y_{jk} случайной матрицы $\mathbf{Y}_n$ независимы для всех $1 \leq j \leq k \leq n$ и имеют гауссовское распределение с $\mathbb{E}Y_{jk} = 0$, $\mathbb{E}Y_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Предположим, что условия (3)–(5) выполнены. Тогда

$$\sup_x |F^{\mathbf{Y}_n}(x) - G(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Результат теоремы 3 следует из общего результата работы [4], где используются методы свободной вероятности. Доказательство теоремы 3, использующее классический метод моментов

и комбинаторные рассуждения, приведено в работе [10]. Для удобства читателей в настоящей работе мы приведем доказательство теоремы 3 (см. п. 3).

Результат теоремы 1 также может быть обобщен на класс случайных ковариационных матриц. Впервые такие матрицы изучались в работе Уишарта [11]. Рассмотрим массив случайных величин X_{jk} , $1 \leq j, k < \infty$, таких, что $\mathbb{E}X_{jk} = 0$ и $\mathbb{E}X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Сформируем матрицу $\mathbf{X} = \{X_{jk}\}$ размера $p \times n$. Обозначим через $s_1^2 \leq \dots \leq s_p^2$ собственные значения матрицы $n^{-1}\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ и определим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbb{I}(s_i^2 \leq x).$$

Положим $F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) := \mathbb{E}\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x)$. Предположим, что $p = p(n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} p/n = y$. Без потери общности мы можем считать, что $y \in (0, 1]$.

Пусть $g_y(x)$ и $G_y(x)$ обозначают плотность и функцию распределения закона Марченко–Пастура:

$$g_y(x) = \frac{1}{2yx\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \mathbb{I}_{[a,b]}(x), \quad G_y(x) = \int_{-\infty}^x g_y(u) du,$$

где $a = (1 - \sqrt{y})^2$, $b = (1 + \sqrt{y})^2$. В работе [12] Марченко и Пастур рассмотрели матрицы $\mathbf{X}$ с независимыми строками и показали, что эмпирическая функция распределения $\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x)$ сходится к $G_y(x)$. В частности, из этого результата следует, что если все элементы матрицы X_{jk} являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, то эмпирическая спектральная функция распределения сходится к закону Марченко–Пастура.

Сходимость к закону Марченко–Пастура была обобщена на другие ансамбли случайных матриц (см., например, [13]). Отметим результаты работ [14] и [15]. В частности, в работе [14] Гётце и Тихомиров получили обобщение результата [6] на случай ковариационных матриц и рассмотрели матрицы со структурой случайного поля. В работе [15] Адамчек рассмотрел матрицы со структурой случайного поля, но вместо условия, что все $\mathbb{E}X_{jk}^2$ равны 1, предположил выполнение закона больших чисел для сумм квадратов элементов матрицы по строкам и по столбцам.

Мы предположим, что выполнено условие (3), но переопределим $L_n(\tau)$ следующим образом:

$$L_n(\tau) := \frac{1}{np} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{ij}^2 \mathbb{I}(|X_{ij}| \geq \tau\sqrt{n}). \quad (7)$$

Введем набор σ -алгебр

$$\mathfrak{F}^{(i,j)} := \sigma\{X_{kl} : 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq n, (k,l) \neq (i,j)\},$$

$1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$\mathbb{E}(X_{ij} | \mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{1}{np} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E} |\mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (9)$$

$$L_n(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \tau > 0. \quad (10)$$

Для всех $1 \leq i \leq p$ обозначим $B_i^2 := n^{-1} \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^2$ и для всех $1 \leq j \leq n$ положим $D_j^2 := p^{-1} \sum_{l=1}^p \sigma_{lj}^2$. Наложим условия на поведение σ_{ij}^2 :

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |B_i^2 - 1| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (11)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |D_j^2 - 1| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (12)$$

$$\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq p} B_i, \max_{1 \leq j \leq n} D_j \right\} \leq C, \quad (13)$$

где C — некоторая абсолютная константа.

Теорема 4. Пусть матрица $\mathbf{X}$ удовлетворяет условиям (8)–(13) и $\lim_{n \rightarrow \infty} p/n = y \in (0, 1]$. Тогда

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) - G_y(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 4 может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его опустим.

Всюду далее будем опускать индексы в обозначениях матриц. Под $\|\cdot\|$ будем понимать спектральную норму матрицы.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть $S^{\mathbf{X}}(z)$ и $S^{\mathbf{Y}}(z)$ обозначают преобразования Стилтеса эмпирических спектральных функций распределения $F^{\mathbf{X}}$ и $F^{\mathbf{Y}}$ соответственно. В силу взаимонепрерывного соответствия между функциями распределения и преобразованиями Стилтеса, утверждение теоремы 2 будет следовать из соотношения

$$|S^{\mathbf{X}}(z) - S^{\mathbf{Y}}(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } z \in D, \quad (14)$$

где $D = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im} z > 0\}$. Положим

$$\mathbf{R}^{\mathbf{X}}(z) := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X} - z\mathbf{I} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(z) := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{Y} - z\mathbf{I} \right)^{-1}. \quad (15)$$

По определению эмпирической функции распределения

$$S^{\mathbf{X}}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr } \mathbb{E} \mathbf{R}^{\mathbf{X}}(z) \quad \text{и} \quad S^{\mathbf{Y}}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr } \mathbb{E} \mathbf{R}^{\mathbf{Y}}(z).$$

Заметим, что мы можем заменить произвольное $\tau > 0$ в (3) убывающей к нулю последовательностью τ_n такой, что

$$L_n(\tau_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (16)$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \sqrt{n} = \infty$.

Урезание случайных величин. В этом разделе будет показано, что элементы матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ можно считать равномерно ограниченными по модулю. Мы будем опускать индексы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в обозначениях резольвенты и преобразований Стильтеса.

Рассмотрим произвольную симметричную матрицу $\mathbf{D}$ размера $n \times n$. Положим $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \mathbf{D}$. Пусть

$$\tilde{\mathbf{R}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{X}} - z\mathbf{I} \right)^{-1}, \quad \text{где } z = u + iv.$$

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$|\mathrm{Tr} \mathbf{R} - \mathrm{Tr} \tilde{\mathbf{R}}| \leq \frac{1}{v^2} (\mathrm{Tr} \mathbf{D}^2)^{1/2}.$$

Доказательство. В силу соотношения для резольвенты матрицы

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{R} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{R}}. \quad (17)$$

Пусть $z = u + iv$, $v > 0$. Используя оценку для резольвенты матрицы, мы получим

$$\max\{\|\mathbf{R}\|, \|\tilde{\mathbf{R}}\|\} \leq \frac{1}{v}. \quad (18)$$

Применяя (17) и (18), легко показать, что

$$|\mathrm{Tr} \mathbf{R} - \mathrm{Tr} \tilde{\mathbf{R}}| = \frac{1}{\sqrt{n}} |\mathrm{Tr} \mathbf{R} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{R}}| \leq \frac{1}{v^2} (\mathrm{Tr} \mathbf{D}^2)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Представим элементы матрицы $\mathbf{X}$ в виде $X = \hat{X} + \check{X}$, где $\hat{X} := X \mathbb{I}(|X| < \tau_n \sqrt{n})$ и $\check{X} := X \mathbb{I}(|X| \geq \tau_n \sqrt{n})$. Определим матрицу $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{X}_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Пусть

$$\hat{\mathbf{R}}(z) := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\mathbf{X}} - z\mathbf{I} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \hat{S}(z) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \mathrm{Tr} \hat{\mathbf{R}}(z).$$

В силу леммы 1

$$|S(z) - \hat{S}(z)| \leq \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} X_{ij}^2 \mathbb{I}(|X_{ij}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \right)^{1/2} = v^{-2} L_n^{1/2}(\tau_n).$$

Из (16) следует, что

$$|S(z) - \widehat{S}(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Введем центрированные случайные величины $\overline{X}_{ij} = \widehat{X}_{ij} - \mathbb{E}(\widehat{X}_{ij} | \mathfrak{F}^{(i,j)})$ и определим матрицу $\overline{\mathbf{X}} = \{\overline{X}_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Пусть

$$\overline{\mathbf{R}}(z) := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \overline{\mathbf{X}} - z\mathbf{I} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \overline{S}(z) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \text{Tr} \overline{\mathbf{R}}(z).$$

Снова в силу леммы 1

$$|\widehat{S}(z) - \overline{S}(z)| \leq \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} X_{ij}^2 \mathbb{I}(|X_{ij}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \right)^{1/2} = v^{-2} L_n^{1/2}(\tau_n).$$

Ввиду (16) правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Нам осталось проверить, что в условиях (2) и (4) можно заменить матрицу $\mathbf{X}$ на матрицу $\overline{\mathbf{X}}$. Для всех $1 \leq i \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{X}_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2 &= \mathbb{E}(\overline{X}_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \mathbb{E}(\widehat{X}_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) \\ &\quad - \mathbb{E}(\check{X}_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) + \mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2. \end{aligned}$$

В силу неравенства треугольника и условий (2), (16)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} |\mathbb{E}(\overline{X}_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} |\mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| + 2L_n(\tau_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя (19), легко проверить справедливость условия (4) для матрицы $\overline{\mathbf{X}}$.

Определим случайные величины $\widehat{Y}_{ij} = Y_{ij} \mathbb{I}(|Y_{ij}| \leq \tau_n \sqrt{n})$. Аналогично предыдущим выкладкам можно показать, что мы можем заменить исходную матрицу $\mathbf{Y}$ на матрицу $\widehat{\mathbf{Y}} = \{\widehat{Y}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n |\mathbb{E} \widehat{Y}_{ij}^2 - \sigma_{ij}^2| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Всюду далее будем предполагать, что $|X_{ij}| \leq \tau_n \sqrt{n}$, $|Y_{ij}| \leq \tau_n \sqrt{n}$ и выполнены условия (1)–(4).

Универсальность спектра собственных значений. Для доказательства соотношения (14) мы будем использовать метод из работы Бенткуса [16] (см. также [17]). Определим семейство матриц

$\mathbf{Z} := \mathbf{Z}(\varphi) := \mathbf{X} \cos \varphi + \mathbf{Y} \sin \varphi$. Легко видеть, что $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}(\pi/2) = \mathbf{Y}$. Положим $\mathbf{W} := \mathbf{W}(\varphi) := n^{-1/2} \mathbf{Z}$ и

$$\mathbf{R}(z, \varphi) := (\mathbf{W} - z\mathbf{I})^{-1}. \quad (21)$$

Определим преобразование Стильтеса

$$S(z, \varphi) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{R}(z, \varphi)]_{ii}.$$

Заметим, что $S(z, 0)$ и $S(z, \pi/2)$ являются преобразованиями Стильтеса $S^{\mathbf{X}}(z)$ и $S^{\mathbf{Y}}(z)$ соответственно.

В силу теоремы Ньютона–Лейбница

$$S\left(z, \frac{\pi}{2}\right) - S(z, 0) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial S(z, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (22)$$

Для упрощения записи мы будем опускать аргументы в обозначениях матриц и преобразований Стильтеса.

Беря производную матрицы $\mathbf{W}$ по аргументу θ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T,$$

где $\mathbf{e}_i$ обозначает единичный вектор-столбец с 1 на i -м месте. Мы можем переписать производную под интегралом в (22) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{n} \mathbb{E} \operatorname{Tr} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varphi} \mathbf{R} = -\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \operatorname{Tr} \mathbf{R} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \varphi} u_{ij}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $u_{ij} = -[\mathbf{R}^2]_{ji}$.

Для всех $1 \leq i \leq j \leq n$ определим случайные величины

$$\xi_{ij} := Z_{ij}, \quad \hat{\xi}_{ij} := \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \varphi} = -X_{ij} \sin \varphi + Y_{ij} \cos \varphi,$$

и наборы случайных величин

$$\xi^{(ij)} := \{\xi_{kl}: 1 \leq k \leq l \leq n, (k, l) \neq (i, j)\}.$$

Используя формулу Тейлора, можно написать

$$\begin{aligned} u_{ij}(\xi_{ij}, \xi^{(ij)}) &= u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) + \xi_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) \\ &\quad + \mathbb{E}_\theta(1 - \theta) \xi_{ij}^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \xi_{ij}^2}(\theta \xi_{ij}, \xi^{(ij)}), \end{aligned}$$

где θ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$ и не зависит от $(\xi_{ij}, \xi^{(ij)})$. Умножая обе части последнего равенства на $\hat{\xi}_{ij}$ и переходя к математическим ожиданиям, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{\xi}_{ij} u_{ij}(\xi_{ij}, \xi^{(ij)}) &= \mathbb{E} \hat{\xi}_{ij} u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) + \mathbb{E} \hat{\xi}_{ij} \xi_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) \\ &\quad + \mathbb{E}(1 - \theta) \hat{\xi}_{ij} \xi_{ij}^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \xi_{ij}^2}(\theta \xi_{ij}, \xi^{(ij)}). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу независимости Y_{ij} и $\xi^{(ij)}$ имеем

$$\mathbb{E} Y_{ij} u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) = \mathbb{E} Y_{ij} \mathbb{E} u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) = 0. \quad (25)$$

По свойству условного математического ожидания и в силу условия (1)

$$\mathbb{E} X_{ij} u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) = \mathbb{E} u_{ij}(0, \xi^{(ij)}) \mathbb{E}(X_{ij} | \mathfrak{F}^{(ij)}) = 0. \quad (26)$$

Используя (24), (25) и (26), мы можем переписать (23) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} \hat{\xi}_{ij} \xi_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(1 - \theta) \hat{\xi}_{ij} \xi_{ij}^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \xi_{ij}^2}(\theta \xi_{ij}, \xi^{(ij)}) =: \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\hat{\xi}_{ij} \xi_{ij} = -\frac{1}{2} X_{ij}^2 \sin 2\varphi + X_{ij} Y_{ij} \cos^2 \varphi - X_{ij} Y_{ij} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \varphi Y_{ij}^2 \sin 2.$$

Случайные величины Y_{ij} не зависят от X_{ij} и $\xi^{(ij)}$. Используя этот факт, мы можем написать

$$\mathbb{E} X_{ij} Y_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) = \mathbb{E} Y_{ij} \mathbb{E} X_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) = 0, \quad (27)$$

$$\mathbb{E} Y_{ij}^2 \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) = \sigma_{ij}^2 \mathbb{E} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}). \quad (28)$$

Снова в силу свойства условного математического ожидания получим

$$\mathbb{E} X_{ij}^2 \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) = \mathbb{E} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(0, \xi^{(ij)}) \mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(ij)}). \quad (29)$$

Легко установить, что производная $u_{ij} = -[\mathbf{R}^2]_{ji}$ равна

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}} = \left[\mathbf{R}^2 \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \right]_{ji} + \left[\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R}^2 \right]_{ji}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{R}]_{ji} + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}^2 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}]_{ji} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{R}^2]_{ji} + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}^2]_{ji} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}^2]_{ji} [\mathbf{R}]_{ji} + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}^2]_{jj} [\mathbf{R}]_{ii} + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}]_{ji} [\mathbf{R}^2]_{ji} + \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{R}]_{jj} [\mathbf{R}^2]_{ii}.
\end{aligned}$$

Используя очевидную оценку резольвенты матрицы, $\|\mathbf{R}\| \leq v^{-1}$, получим

$$\left| \frac{\partial u_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n} v^3}. \quad (30)$$

Из (27)–(30) и (19), (20) можем заключить, что

$$|\mathbb{A}_1| \leq \frac{C}{n^2 v^3} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} |\mathbb{E}(X_{ij}^2 | \mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Нам остается оценить $\mathbb{A}_2$. Вычислим вторую производную функции u_{ij} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \xi_{ij}^2} &= - \left[\mathbf{R}^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \right]_{ji} - \left[\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R}^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \right]_{ji} \\
&\quad - \left[\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R}^2 \right]_{ji} =: \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_3.
\end{aligned}$$

Представим член $\mathbb{T}_1$ в виде суммы:

$$\mathbb{T}_1 = - \left[\mathbf{R}^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_{ij}} \mathbf{R} \right]_{ji} =: \mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{12} + \mathbb{T}_{13} + \mathbb{T}_{14}, \quad (32)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{11} &= -\frac{1}{n} [\mathbf{R}^2]_{ji} [\mathbf{R}]_{ji} [\mathbf{R}]_{ji}, & \mathbb{T}_{12} &= -\frac{1}{n} [\mathbf{R}^2]_{ji} [\mathbf{R}]_{jj} [\mathbf{R}]_{ii}, \\
\mathbb{T}_{13} &= -\frac{1}{n} [\mathbf{R}^2]_{jj} [\mathbf{R}]_{ii} [\mathbf{R}]_{ji}, & \mathbb{T}_{14} &= -\frac{1}{n} [\mathbf{R}^2]_{jj} [\mathbf{R}]_{ij} [\mathbf{R}]_{ii}.
\end{aligned}$$

Снова используя оценку $\|\mathbf{R}\| \leq v^{-1}$, можно показать, что

$$\max\{|\mathbb{T}_{11}|, |\mathbb{T}_{12}|, |\mathbb{T}_{13}|, |\mathbb{T}_{14}|\} \leq \frac{C}{n v^4}.$$

Из этих оценок и разложения (32) следует, что $|\mathbb{T}_1| \leq C/(n v^4)$. Повторяя рассуждения выше, можно показать, что $\max\{|\mathbb{T}_2|, |\mathbb{T}_3|\} \leq C/(n v^4)$. Окончательно имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \xi_{ij}^2}(\theta \xi_{ij}, \xi^{(ij)}) \right| \leq \frac{C}{n v^4}.$$

Используя предположения $|\xi_{ij}| \leq \tau_n \sqrt{n}$ и (4), получим оценку

$$|\mathbb{A}_2| \leq \frac{C \tau_n}{v^4}. \quad (33)$$

Устремляя τ_n к нулю, можно вывести справедливость утверждения теоремы 2 из (22), (23), (31) и (33).

3. Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы мы будем использовать метод моментов. Легко видеть, что моменты ожидаемой эмпирической функции распределения $F^{\mathbf{Y}}(x)$ могут быть переписаны в виде нормированного следа степени матрицы $\mathbf{Y}$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dF^{\mathbf{Y}}(x) = \mathbb{E} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{Y} \right)^k.$$

Для доказательства сходимости последовательности $F^{\mathbf{Y}}(x)$ к $G(x)$ достаточно показать, что

$$\mathbb{E} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{Y} \right)^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dG(x) + o_k(1)$$

для всех $k \geq 1$, где $o_k(1)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного k .

Хорошо известно, что моменты полукругового закона равны

$$\beta_k = \int_{\mathbb{R}} x^k dG(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}, & k = 2m, \\ 0, & k = 2m + 1. \end{cases}$$

Отметим, что моменты β_{2m} совпадают с числами Каталана.

Всюду далее в этом пункте мы будем использовать обозначения и определения из [18]. Графом будем называть триплет (E, V, F) , где E — множество ребер, V — множество вершин и F — функция, $F: E \rightarrow V \times V$. Пусть $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ обозначает вектор, принимающий значения из множества $\{1, \dots, n\}^k$. По вектору $\mathbf{i}$ построим Γ -граф следующим образом. Нарисуем горизонтальную линию и нанесем на нее числа $i_1, \dots, i_k$. Будем рассматривать различные числа в качестве вершин и нарисуем k ребер e_j из i_j в i_{j+1} , $j = 1, \dots, k$, используя соглашение $i_{k+1} = i_1$. Обозначим число различных i_j через t . Построенный таким образом граф будем обозначать $\Gamma(k, t)$.

Будем говорить, что два $\Gamma(k, t)$ -графа изоморфны, если один может быть получен из другого перестановкой $(1, \dots, n)$. В силу этого определения все Γ графы могут быть разбиты на классы изоморфных между собой графов. Назовем $\Gamma(k, t)$ -граф каноническим, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множество вершин есть $\{1, \dots, t\}$;
- 2) множество ребер есть $\{e_1, \dots, e_k\}$;
- 3) существует функция g из $\{1, \dots, k\}$ в $\{1, \dots, t\}$ такая, что $g(1) = 1$ и $g(i) \leq \max\{g(1), \dots, g(i-1)\} + 1$ для $1 < i \leq k$;
- 4) $F(e_i) = (g(i), g(i+1))$, для $i = 1, \dots, k$, где мы используем соглашение $g(k+1) = g(1) = 1$.

Легко видеть, что каждый класс изоморфных графов содержит один и только один канонический Γ -граф с ассоциированной с ним функцией g . Произвольный граф в этой категории может быть определен с помощью соотношения $F(e_j) = (i_{g(j)}, i_{g(j+1)})$. Легко видеть, что число $\Gamma(k, t)$ -графов в каждом классе изоморфных графов равно $n(n-1) \cdots (n-t+1)$.

Разобьем все канонические графы на три категории. Категория C_1 содержит все канонические $\Gamma(k, t)$ -графы, у которых каждое ребро совпадает ровно с одним другим ребром, идущим в противоположном направлении, и граф несовпадающих ребер является деревом. Легко видеть, что если k нечетно, то категория C_1 не содержит ни одного графа. Если k четно, скажем, $k = 2m$, обозначим $\Gamma(k, t)$ -граф через $\Gamma_1(2m)$. Категория C_2 содержит все канонические графы, у которых существует хотя бы одно ребро с нечетной кратностью. Граф из этой категории обозначим через $\Gamma_2(k, t)$. Категория C_3 состоит из всех остальных канонических графов, которые будем обозначать $\Gamma_3(k, t)$.

Известно (см. [18, лемма 2.4]), что число канонических $\Gamma_1(2m)$ -графов равно

$$\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}.$$

Перепишем нормированный след степени матрицы $\mathbf{Y}$ в виде

$$\mathrm{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{Y} \right)^k = \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} Y_{i_1 i_2} Y_{i_2 i_3} \cdots Y_{i_k i_1}, \quad (34)$$

где сумма берется по всем векторам $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$.

По каждому вектору $\mathbf{i}$ построим граф $G(\mathbf{i})$ как указано выше. Обозначим $Y(\mathbf{i}) = Y(G(\mathbf{i}))$.

Мы можем разбить моменты $F^{\mathbf{Y}}(x)$ на три группы:

$$\mathbb{E} \frac{1}{n} \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{Y} \right)^k = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\mathbf{i}} \mathbb{E} Y_{i_1 i_2} Y_{i_2 i_3} \cdots Y_{i_k i_1} = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_j = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\Gamma(k, t) \in C_j} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(k, t)} \mathbb{E} Y(G(\mathbf{i})),$$

и суммирование в первой сумме $\sum_{\Gamma(k, t) \in C_j}$ производится по всем каноническим $\Gamma(k, t)$ -графам в категории C_j , а суммирование в $\sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(k, t)}$ производится по всем графам, изоморфным данному каноническому графу.

Из независимости Y_{ij} и равенства $\mathbb{E} Y_{ij}^{2s-1} = 0$, $s \geq 1$, следует, что $S_2 = 0$.

Для графов из категорий C_1 и C_3 введем дополнительные обозначения. Рассмотрим $\Gamma(k, t)$ -граф $G(\mathbf{i})$. Без потери общности будем считать, что i_l , $l = 1, \dots, t$, являются различными координатами вектора

$\mathbf{i}$, и определим вектор $\mathbf{i}_t = (i_1, \dots, i_t)$. Положим $G(\mathbf{i}_t) := G(\mathbf{i})$. Пусть $\tilde{\mathbf{i}}_t = (i_1, \dots, i_{q-1}, i_{q+1}, \dots, i_t)$ и $\hat{\mathbf{i}}_t = (i_1, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}, \dots, i_{q-1}, i_{q+1}, \dots, i_t)$ обозначают векторы, полученные из $\mathbf{i}_t$ удалением элементов в позициях q и p, q соответственно. Дополнительно потребуем, чтобы значения координат $\hat{\mathbf{i}}_t$ не совпадали с i_p . Обозначим граф без вершины i_q и всех инцидентных ей ребер через $G(\tilde{\mathbf{i}}_t)$. Если через вершину i_q проходит цикл, то обозначим через $G'(\mathbf{i}_t)$ граф без этого цикла. Через $\tilde{G}(\mathbf{i}_t)$ обозначим граф, полученный из $G(\mathbf{i}_t)$ удалением ребра между i_p и i_q с учетом кратности.

Теперь оценим S_3 . Для графа из категории C_3 мы знаем, что k должно быть четным, например, $k = 2m$. Мы изобразили пример $\Gamma_3(k, t)$ -графа на рис. 2. Этот граф соответствует члену $Y(G(\mathbf{i}_3)) = Y_{i_1 i_1}^2 Y_{i_1 i_2}^2 Y_{i_2 i_3}^4 Y_{i_3 i_3}^2$.

Рис. 2. Граф $\Gamma_3(10, 3)$.

Заметим, что $\mathbb{E} Y_{i_p i_q}^{2s} \leq_s \sigma_{i_p i_q}^{2s}$. Это позволяет нам оценивать моменты высших порядков через дисперсии.

Каждый граф G из категории C_3 можно представить в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$ следующим образом. Раскрасим все ребра G в два цвета, причем совпадающие ребра будут иметь один цвет. Выберем граф G_1 так, чтобы было выполнено одно из следующих условий:

- i) граф G_1 содержит одну вершину и все инцидентные ей петли;
- ii) граф G_1 содержит две вершины и ребро между ними, причем кратность ребра больше двух;
- iii) каждое ребро из G_1 совпадает ровно с одним ребром, идущим в противоположном направлении, и граф из несовпадающих ребер представляет собой простой цикл.

Предположим, что сумма кратностей всех ребер графа G_1 равна $2s$. Нам остается рассмотреть оставшиеся $2(m - s)$ ребер графа G_2 .

Обозначим через V_1, E_1 и V_2, E_2 множества вершин и ребер графов G_1 и G_2 соответственно. Мы определим $\mathbf{i}_t^1 := (i_l : i_l \in V_1)$. Зафиксируем граф G_1 и рассмотрим граф G_2 .

а) Если E_2 пусто, то переходим на шаг с). В противном случае рассмотрим следующие возможности.

1. Существует петля кратности $2a$, $a \geq 1$, инцидентная вершине $i_q \in V_2$. В этом случае мы имеем оценку

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(2m, t)} \mathbb{E}Y(G(\mathbf{i})) \leq_a \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\mathbf{i}_t} \mathbb{E}[Y(G'(\mathbf{i}_t))] \sigma_{i_q i_q}^{2a}.$$

Применяя a раз неравенство $n^{-1} \sigma_{i_q i_q}^2 \leq B_{i_q}^2$ и условие (5), мы удалим все петли, инцидентные вершине i_q .

2. Не существует петель, инцидентных $i_q \in V_2 \setminus V_1$, но i_q соединено только с одной вершиной $i_p \in V_2$ ребром из G_2 и кратность этого ребра равна $2b$, $b \geq 1$. В этом случае имеем оценку

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(2m, t)} \mathbb{E}Y(G(\mathbf{i})) \leq_b \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\mathbf{i}_t} \mathbb{E}[Y(G(\mathbf{i}_t))] \sum_{i_q=1}^n \sigma_{i_p i_q}^{2b}.$$

Мы можем использовать $b - 1$ раз неравенство $n^{-1} \sigma_{i_p i_q}^2 \leq B_{i_p}^2$ и условие (5) и последовательно удалить все ребра за исключением двух. На последнем шаге мы можем снова использовать (5) и удалить i_q .

3. Не существует петель в G_2 и не существует вершин в $V_2 \setminus V_1$, которые были бы соединены в точности с одной вершиной из V_2 . Тогда мы можем взять любые две вершины, скажем, i_p и i_q , из V_2 и написать оценку

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(2m, t)} \mathbb{E}Y(G(\mathbf{i})) \leq_b \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\mathbf{i}_t} \mathbb{E}[Y(\tilde{G}(\mathbf{i}_t))] \sigma_{i_p i_q}^{2c}.$$

Используя c раз неравенство $n^{-1} \sigma_{i_p i_q}^2 \leq B_{i_p}^2$ и условие (5), удалим все ребра между i_p и i_q .

б) Переходим на шаг а).

с) Легко видеть, что на каждого шаге а) мы используем одно и то же условие (5). Следовательно, мы можем написать

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(2m, t)} \mathbb{E}Y(G(\mathbf{i})) \leq_m \frac{C^{2(m-s)} n^{m-s}}{n^{m+1}} \sum_{\mathbf{i}_t^1} \mathbb{E}Y(G_1(\mathbf{i}_t^1)). \quad (35)$$

Остается оценить правую часть в (35). В случае i) напомним оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_1=1}^n \mathbb{E}Y_{i_1 i_1}^{2s} &\leq_s \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_1=1}^n \sigma_{i_1 i_1}^{2s} \leq \frac{C^{2(s-1)}}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sigma_{i_1 i_1}^2 \\ &\leq C^{2(s-1)} \tau_n^2 + \frac{C^{2(s-1)}}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \mathbb{E}Y_{i_1 i_1}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_1}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \\ &\leq C^{2(s-1)} \tau_n^2 + C^{2(s-1)} L_n(\tau_n) = o_s(1), \end{aligned}$$

где мы использовали неравенство $n^{-1} \sigma_{i_1 i_1}^2 \leq B_{i_1}^2$ и условие (5).

В случае ii) имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^{2s} &\leq_s \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_1, i_2=1}^n \sigma_{i_1 i_2}^{2s} \leq \frac{C^{2(s-2)}}{n^3} \sum_{i_1, i_2=1}^n \sigma_{i_1 i_2}^4 \\ &\leq C^{2(s-2)} \frac{\tau_n^2}{n^2} \sum_{i_1, i_2=1}^n \sigma_{i_1 i_2}^2 + \frac{C^{2(s-2)}}{n^3} \sum_{i_1, i_2=1}^n \sigma_{i_1 i_2}^2 \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \\ &\leq C^{2(s-1)} \tau_n^2 + C^{2(s-1)} L_n(\tau_n) = o_s(1), \end{aligned}$$

где мы снова использовали неравенство $n^{-1} \sigma_{i_1 i_1}^2 \leq B_{i_1}^2$ и (5).

Остается рассмотреть случай iii). Для этого нам потребуются дополнительные обозначения. Переобозначим вершины из V_1 и предположим, что $\mathbf{i}_t^1 = \mathbf{i}_s := (i_1, \dots, i_s)$. Через $G_1(\mathbf{i}_s)$ обозначим граф $G_1(\mathbf{i}_t^1)$. Используя введенные ранее обозначения $\tilde{i}_s, \hat{i}_s$ и $\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)$, будем предполагать, что $p = 1$ и $q = 2$. Через $\tilde{G}_1(\tilde{i}_s)$ обозначим граф, полученный из $\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)$ удалением вершины i_2 и ребра между i_2 и i_3 с учетом кратности. Напишем

$$\frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(G_1(\mathbf{i}_s)) \leq \frac{\tau_n^2}{n^s} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)) \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)) \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}). \quad (37)$$

Сначала оценим правую часть в (36). Граф из несовпадающих ребер $\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)$ является деревом. Мы можем последовательно удалить все ребра и вершины графа $\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)$, используя предположение (5) на каждом шаге. Мы установим справедливость оценки

$$\frac{\tau_n^2}{n^s} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)) \leq C^{2(s-1)} \tau_n^2. \quad (38)$$

Для члена (37) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)) \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \\ &\leq \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E} Y(\hat{G}_1(\tilde{i}_s)) \sigma_{i_2 i_3}^2 \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \\ &\leq \frac{C^2}{n^s} \sum_{i_1, i_2=1}^n \mathbb{E} Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \sum_{\hat{i}_s} \mathbb{E} Y(\hat{G}_1(\tilde{i}_s)). \end{aligned} \quad (39)$$

Снова используя (5), можно показать, что

$$\sum_{\hat{i}_s} \mathbb{E} Y(\hat{G}_1(\tilde{i}_s)) \leq C^{2(s-2)} n^{s-2}. \quad (40)$$

В силу (39) и (40) получим

$$\frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E}Y(\tilde{G}_1(\mathbf{i}_s)) \mathbb{E}Y_{i_1 i_2}^2 \mathbb{I}(|Y_{i_1 i_2}| \geq \tau_n \sqrt{n}) \leq C^{2(s-1)} L_n(\tau_n). \quad (41)$$

Из (38) и (41) получим оценку

$$\frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\mathbf{i}_s} \mathbb{E}Y(G_1(\mathbf{i}_s)) \leq C^{2(s-1)} \tau_n^2 + C^{2(s-1)} L_n(\tau_n).$$

Окончательно для случаев i)–iii) будем иметь

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\mathbf{i}) \in \Gamma(2m, t)} \mathbb{E}Y(G(\mathbf{i})) \leq_m C^{2(m-1)} (\tau_n^2 + L_n(\tau_n)) = o_m(1).$$

В качестве примера мы рекомендуем проверить алгоритм для графа, изображенного на рис. 2.

Легко видеть, что число канонических графов в категории C_3 имеет порядок $O_m(1)$. Окончательно получаем следующую оценку для S_3 :

$$S_3 = o_m(1).$$

Нам остается оценить S_1 . Для графа из категории C_1 мы знаем, что k должно быть четным числом, например, $k = 2m$. Для графов из категории C_1 , используя обозначения $\mathbf{i}_t, \tilde{\mathbf{i}}_t$ и $\hat{\mathbf{i}}_t$, будем полагать $t = m + 1$.

Рис. 3. Слева: дерево несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(10)$. Справа: дерево несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(10)$ с удаленным листом i_6 .

Слева на рис. 3 изображен пример дерева несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(2m)$ для $m = 5$. Член, соответствующий этому дереву, равен $Y(G(\mathbf{i}_6)) = Y_{i_1 i_2}^2 Y_{i_2 i_3}^2 Y_{i_2 i_4}^2 Y_{i_1 i_5}^2 Y_{i_5 i_6}^2$.

Обозначим через $\sigma^2(\mathbf{i}_{m+1}) = \sigma^2(G(\mathbf{i}_{m+1}))$ произведение m чисел $\sigma_{i_s i_t}^2$, где i_s, i_t , $s < t$, — некоторые вершины графа $G(\mathbf{i}_{m+1})$, соединенные ребром из этого графа. В нашем примере $\sigma^2(\mathbf{i}_{m+1}) = \sigma^2(\mathbf{i}_6) = \sigma_{i_1 i_2}^2 \sigma_{i_2 i_3}^2 \sigma_{i_2 i_4}^2 \sigma_{i_1 i_5}^2 \sigma_{i_5 i_6}^2$.

Если $m = 1$, то $\sigma^2(\mathbf{i}_2) = \sigma_{i_1 i_2}^2$ и

$$\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n \sigma_{i_1 i_2}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i_1=1}^n \left[\frac{1}{n} \sum_{i_2=1}^n \sigma_{i_1 i_2}^2 - 1 \right] + 1 + o(1), \quad (42)$$

где мы использовали соотношение $n^{-2} \sum_{i_1=1}^n \sigma_{i_1 i_1}^2 = o(1)$. В силу (4) первое слагаемое в (42) имеет порядок $o(1)$. Число канонических графов в C_1 для $m = 1$ равно 1. Мы заключаем, что для $m = 1$

$$S_1 = n^{-2} \sum_{\Gamma_1(2)} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^n \sigma_{i_1 i_2}^2 = 1 + o(1).$$

Далее предположим, что $m > 1$. Рассмотрим дерево несовпадающих ребер графа G . Можно найти лист в дереве, скажем, i_q , и вершину i_p , которая соединена с i_q ребром из этого дерева. Мы имеем $\sigma^2(\mathbf{i}_{m+1}) = \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) \sigma_{i_p i_q}^2$, где $\sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) = \sigma^2(G(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}))$.

В нашем примере можно взять лист i_6 . Справа на рис. 3 изображено дерево с удаленным листом i_6 . Мы имеем $\sigma_{i_p i_q}^2 = \sigma_{i_5 i_6}^2$ и $\sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_6) = \sigma_{i_1 i_2}^2 \sigma_{i_2 i_3}^2 \sigma_{i_2 i_4}^2 \sigma_{i_1 i_5}^2$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\mathbf{i}_{m+1}} \sigma^2(\mathbf{i}_{m+1}) &= \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) \sum_{i_q=1}^n \sigma_{i_p i_q}^2 + o_m(1) \\ &= \frac{1}{n^m} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) \left[\frac{1}{n} \sum_{i_q=1}^n \sigma_{i_p i_q}^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{n^m} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) + o_m(1), \quad (44)$$

где мы добавили некоторые графы из категории C_3 и воспользовались оценками, аналогичными оценкам для члена S_3 . Теперь покажем, что слагаемое (43) имеет порядок $o_m(1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^m} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) \left| \frac{1}{n} \sum_{i_q=1}^n \sigma_{i_p i_q}^2 - 1 \right| \\ = \frac{1}{n} \sum_{i_p=1}^n \left| \frac{1}{n} \sum_{i_q=1}^n \sigma_{i_p i_q}^2 - 1 \right| \frac{1}{n^{m-1}} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}). \end{aligned} \quad (45)$$

Последовательно удаляя все вершины из дерева и используя (5), получим

$$\frac{1}{n^{m-1}} \sum_{\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}} \sigma^2(\tilde{\mathbf{i}}_{m+1}) \leq C^{2(m-1)}. \quad (46)$$

В силу (46) и (4) мы показали, что слагаемое (43) имеет порядок $o_m(1)$. Для первого слагаемого в (44) повторим процедуру и остановимся, если у нас осталось только две различные вершины. На последнем шаге мы воспользуемся результатом (42). Окончательно имеем

$$S_1 = \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\Gamma_1(2m)} \sum_{\mathbf{i}_{m+1}} \sigma^2(\mathbf{i}_{m+1}) = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} + o_m(1),$$

что завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wigner E. P.* On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. — *Ann. Math.*, 1958, v. 67, p. 325–327.
2. *Arnold L.* On Wigner's semicircle law for the eigenvalues of random matrices. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1971, v. 19, p. 191–198.
3. *Пастур Л. А.* Спектры случайных самосопряженных операторов. — *Успехи матем. наук*, 1973, т. 28, № 1, с. 3–64.
4. *Shlyakhtenko D.* Random gaussian band matrices and freeness with amalgamation. — *Int. Math. Res. Not.*, 1996, № 20, p. 1013–1025.
5. *Erdős L.* Universality of Wigner random matrices: a survey of recent results. *arXiv:1004.0861*.
6. *Götze F., Tikhomirov A. N.* Limit theorems for spectra of random matrices with martingale structure. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 1, с. 171–192.
7. *Hall P., Heyde C. C.* *Martingale Limit Theory and Its Application*. New York: Academic Press, 1980, 308 p.
8. *Rosenzweig N.* *Statistical Mechanics of Equally Likely Quantum Systems*. New York: Benjamin, 1963, 91 p.
9. *Bronk B. V.* *Topics in the theory of random matrices*. PhD thesis. Princeton: Princeton Univ., 1964.
10. *Наумов А. А.* Предельные теоремы для двух классов случайных матриц с гауссовскими элементами. — *Зап. науч. сем. ПОМИ*, 2013, т. 412, с. 214–225.
11. *Wishart J.* Generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. — *Biometrika*, 1928, v. 20, p. 32–52.
12. *Марченко В. А., Пастур Л. А.* Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. — *Матем. сб.*, 1967, т. 72, № 4, с. 507–536.
13. *O'Rourke S.* A note on the Marchenko–Pastur law for a class of random matrices with dependent entries. — *Electron. Commun. Probab.*, 2012, v. 17, paper № 28, 13 p.
14. *Götze F., Tikhomirov A. N.* Limit theorems for spectra of positive random matrices under dependence. — *Зап. науч. сем. ПОМИ*, 2004, т. 311, с. 92–123.
15. *Adamczak R.* On the Marchenko–Pastur and circular laws for some classes of random matrices with dependent entries. — *Electron. J. Probab.*, 2011, v. 16, № 37, p. 1068–1095.
16. *Бентжус В.* Новый подход к аппроксимациям в теории вероятностей и теории операторов. — *Liet. Mat. Rink.*, 2003, v. 43, № 4, p. 444–470.
17. *Pastur L., Shcherbina M.* *Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices*. Providence: Amer. Math. Soc., 2011, 632 p.
18. *Bai Z., Silverstein J. W.* *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*. Dordrecht: Springer, 2010, 551 p.