Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, О числе компонент
случайного A -отображения, *Теория вероятн. и ее примен.*,
2014, том 59, выпуск 1, 81–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:26:52

© 2014 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ СЛУЧАЙНОГО A -ОТОБРАЖЕНИЯ¹⁾

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — полугруппа отображений множества из n элементов в себя, A — некоторое фиксированное подмножество множества натуральных чисел $\mathbf{N}$, $V_n(A)$ — множество отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры контуров которых принадлежат множеству A . Отображения из $V_n(A)$ принято называть A -отображениями. Рассмотрим случайное отображение σ_n , равномерно распределенное на $V_n(A)$. Предполагается, что множество A имеет асимптотическую плотность $\varrho > 0$. Пусть ν_n — число компонент связности случайного отображения σ_n . В настоящей статье показано, что случайная величина ν_n асимптотически нормальна со средним $a(n) = \sum_{k \in A(\sqrt{n})} 1/k$ и дисперсией $\varrho \ln(n)/2$, где $A(t) = \{k: k \in A, k \leq t\}$.

Ключевые слова и фразы: случайные A -отображения, случайные A -подстановки, циклические точки, контуры, деревья, компоненты случайных отображений, тауберова лемма.

1. Введение. Зафиксируем множество $A \subseteq \mathbf{N}$. Положим $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Через $V_n = V_n(A)$ обозначим множество всех однозначных отображений из X_n в X_n , объемы компонент которых принадлежат множеству A . Такие отображения называются A -отображениями, подробнее о них см. [24], [25] или [26].

Пусть $\sigma_n = \sigma_n(A)$ — случайное отображение, равномерно распределенное на $V_n(A)$, а $\tau_n = \tau_n(A)$ — случайная подстановка, равномерно распределенная на множестве $T_n(A)$ всех подстановок степени n с длинами циклов из множества A .

Асимптотические свойства различных функционалов от случайной подстановки τ_n изучались ранее в статьях [1], [2], [5], [7], [9], [12], [14], [16]–[18], [30], [36] (более подробные ссылки содержатся в книге [36]).

Что же касается случайных A -отображений с множеством A общего вида, то их асимптотические свойства исследовались лишь в статьях [22], [23]. Наиболее изученными здесь являются случаи $A = \{1\}$ и $A = \mathbf{N}$ (см., например, книги [19] и [13]–[15]). Отметим также книги [31]–[33], в которых большое внимание уделяется случайным подстановкам и случайным отображениям.

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00318).

Недавние исследования случайных отображений содержатся в статьях [8], [20], [27], [29] и [35].

Пусть λ_n — число циклических точек, а ν_n — число компонент случайного A -отображения σ_n , и пусть ξ_n — общее число циклов случайной A -подстановки τ_n . Существует простой метод доказательства предельной теоремы для ν_n в ситуации, когда справедливы предельные теоремы для λ_n и ξ_n (см. [13, раздел I.14, с. 101]). При условии, что $\lambda_n = k$ эти k циклических точек случайного отображения σ_n образуют случайную A -подстановку степени k с общим числом циклов ν_n . Остается воспользоваться предельной теоремой для общего числа циклов случайной A -подстановки степени k , а затем усреднить этот результат по распределению λ_n .

В настоящей статье мы докажем предельную теорему для ν_n в ситуации, когда предельная теорема для ξ_n , вообще говоря, не справедлива. Наш подход основывается на асимптотическом анализе совместной производящей функции чисел $|V_n|/n!$ и вероятностей $\mathbf{P}\{\nu_n = k\}$ и последующем использовании тауберовой леммы (здесь и далее $|X|$ обозначает число элементов конечного множества X). А именно, мы будем предполагать, что существует следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k: k \leq n, k \in A|}{n} = \varrho > 0, \quad (1)$$

называемый в теории чисел асимптотической плотностью множества A (см. [21, раздел 3.1]). Предельная теорема для ξ_n пока известна лишь в случае, когда (см. [37])

$$\frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\varrho-1} L(n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varrho > 0, \quad (2)$$

где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности по Карамата [28], т.е. для произвольного фиксированного $\lambda > 0$

$$\frac{L([\lambda n])}{L(n)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$. При этом из (2) следует (1), но не наоборот, так что мы находимся в более общей ситуации.

2. Основной результат. Положим при $t \geq \min A$

$$l(t) = \sum_{k \in A, k \leq t} \frac{1}{k}. \quad (3)$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1. Пусть выполнено (1) для некоторого $\varrho > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\nu'_n = \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть для всех $u, v \in (0, 1)$ функция

$$A(u, v) = \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n$$

($\alpha > 0$, $a(m, n) \geq 0$) конечна, причем для произвольных $\lambda, \mu > 0$

$$\frac{A(e^{-\lambda/t}, e^{-\mu/t})}{r(t)} \rightarrow \lambda^{-\alpha} \mu^{-\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \quad (4)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\beta > 0$, $r(t)$ — некоторая положительная функция переменной t , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Если $a(m, n)$ монотонна по m и при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $l > n$, $l - n = o(n)$

$$\liminf \frac{n(a(m, l) - a(m, n))}{\sum_{i=0}^l a(m, i)} \geq 0, \quad (5)$$

то для произвольных $x, y > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$a(tx, ty) \sim r(t) t^{-1-\alpha} y^{\beta-1} \quad (6)$$

(при нецелых u, v полагаем $a(u, v) = a([u], [v])$).

З а м е ч а н и е 1. Если в лемме 1 вместо соотношения (5) при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $l > n$, $l - n = o(n)$ будет выполнено соотношение

$$\limsup \frac{n(a(m, l) - a(m, n))}{\sum_{i=0}^l a(m, i)} \leq 0, \quad (7)$$

то утверждение леммы останется в силе.

Пусть $(U_k, k \in \mathbf{N})$ — последовательность σ -конечных мер на $\mathbf{R}^1$. Следуя [34, раздел VIII.6], мы будем говорить, что последовательность $(U_k, k \in \mathbf{N})$ слабо сходится к σ -конечной мере U на $\mathbf{R}^1$, и писать

$$U_k \Rightarrow U \quad (k \rightarrow \infty),$$

если для каждого ограниченного борелевского множества $A \subseteq \mathbf{R}^1$ такого, что $U(\partial A) = 0$, последовательность $U_k(A)$ сходится к $U(A)$.

Справедлива следующая модификация известной теоремы Куртиса [11].

Лемма 2. Пусть для последовательности $(U_k, k \in \mathbf{N})$ при некоторых $a, b, -\infty < a < b < \infty$, существуют производящие функции моментов:

$$\tilde{U}_k(z) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} U_k(dx) < \infty \quad \forall z \in (a, b).$$

1) Если при $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_k(z) \rightarrow \omega(z) < \infty \quad \forall z \in (a, b), \quad (8)$$

то $\omega(z)$ является производящей функцией моментов некоторой меры U на $\mathbf{R}^1$ и $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Обратно, если $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$ и $\tilde{U}_k(a)$ и $\tilde{U}_k(b)$ ограничены, то выполнено соотношение (8) и для меры U существует при $z \in (a, b)$ производящая функция моментов $\tilde{U}(z)$ и $\tilde{U}(z) = \omega(z)$ при $z \in (a, b)$.

В отличие от теоремы Куртисса, в лемме 2 интервал (a, b) не обязательно содержит точку нуля, что окажется существенным далее. Если меры U_k являются вероятностными, то для того, чтобы предельная мера U тоже была вероятностной, достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ имела аналитическое продолжение в некоторую окрестность нуля комплексной плоскости и было выполнено неравенство $\omega(0) = 1$. Отметим также, что для существования производящей функции моментов меры U в форме, определенной в лемме 2 на некотором интервале (a, b) , не содержащем нуля, вовсе не нужно существования каких-либо моментов этой меры. Однако в названии этого преобразования мы отдаем должное традициям (см., например, [25], [26], [34]).

3. Доказательства. Доказательство леммы 1. Повторяя дословно рассуждения при доказательстве теоремы 1.5.7 из [36], убеждаемся в том, что для произвольных фиксированных $x, y > 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $m = [tx]$

$$\sum_{j=0}^{[ty]} \frac{a(m, j)t^\alpha}{r(t)} \rightarrow \frac{y^\beta}{\beta}, \quad (9)$$

откуда следует, что при фиксированном $\delta > 0$ и $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} \frac{a(m, j)t^\alpha}{r(t)} \rightarrow \frac{y^\beta}{\beta} ((1+\delta)^\beta - 1). \quad (10)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно (5), можно выбрать такие $t_0 > 0$ и $\delta \in (0, 1)$, что при $t \geq t_0$, $j \in [[ty] + 1, [ty(1+\delta)]]$ и $n = [ty]$

$$a(m, j) - a(m, n) \geq -\varepsilon \sum_{k=0}^j \frac{a(m, k)}{n} \geq -\varepsilon \sum_{k=0}^{[ty(1+\delta)]} \frac{a(m, k)}{n},$$

откуда

$$a(m, n) \leq a(m, j) + \varepsilon \sum_{k=0}^{[ty(1+\delta)]} \frac{a(m, k)}{n}.$$

Суммируя последнее неравенство по j от $[ty] + 1$ до $[ty(1 + \delta)]$, получим при $M = [ty(1 + \delta)] - [ty]$, что

$$a(m, n)M \leq \sum_{j=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, j) + \frac{\varepsilon M}{n} \sum_{k=0}^{[ty(1+\delta)]} a(m, k),$$

или

$$a(m, n) \leq \frac{1}{M} \sum_{j=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, j) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{[ty(1+\delta)]} a(m, k).$$

Отсюда с использованием (9) и (10) выводим, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n)t^{1+\alpha}}{r(t)} \leq \frac{1}{y\delta} \frac{y^\beta}{\beta} ((1+\delta)^\beta - 1) + \frac{\varepsilon}{y} \frac{y^\beta(1+\delta)^\beta}{\beta}.$$

В силу произвольности ε и δ мы можем в правой части этого неравенства устремить ε и δ к нулю, откуда получаем

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n)t^{1+\alpha}}{r(t)} \leq y^{\beta-1}. \quad (11)$$

Из (9) следует, что при фиксированном $\delta \in (0, 1)$ и $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=[ty(1-\delta)]+1}^{[ty]} \frac{a(m, j)t^\alpha}{r(t)} \rightarrow \frac{y^\beta}{\beta} (1 - (1-\delta)^\beta). \quad (12)$$

Из (5) при помощи переобозначений получаем, что при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $l < n$, $n - l = o(n)$

$$\liminf \frac{n(a(m, n) - a(m, l))}{\sum_{i=0}^n a(m, i)} \geq 0. \quad (13)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно (13), можно выбрать такие $t_1 > 0$ и $\delta \in (0, 1)$, что при $t \geq t_1$ и $j \in [[ty(1 - \delta)] + 1, [ty]]$ и $n = [ty]$

$$a(m, n) - a(m, j) \geq -\frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=0}^n a(m, i).$$

Отсюда

$$a(m, n) \geq a(m, j) - \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=0}^n a(m, i).$$

Просуммируем последнее неравенство по j от $[ty(1 - \delta)] + 1$ до $[ty]$ при $T = [ty] - [ty(1 - \delta)]$:

$$a(m, n)T \geq \sum_{j=[ty(1-\delta)]+1}^{[ty]} a(m, j) - \frac{\varepsilon T}{n} \sum_{i=0}^n a(m, i),$$

откуда

$$a(m, n) \geq \frac{1}{T} \sum_{j=[ty(1-\delta)]+1}^{[ty]} a(m, j) - \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=0}^n a(m, i).$$

Из последнего неравенства с использованием (9) и (12) выводим, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n)t^{1+\alpha}}{r(t)} \geq \frac{1}{y\delta} \frac{y^\beta}{\beta} (1 - (1 - \delta)^\beta) - \frac{\varepsilon}{y} \frac{y^\beta}{\beta}.$$

Поэтому в силу произвольности ε и δ

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n)t^{1+\alpha}}{r(t)} \geq y^{\beta-1}. \quad (14)$$

Из (11) и (14) следует (6). Лемма 1 доказана.

Замечание после леммы 1 доказывалось точно так же, только знаки неравенств изменятся на противоположные, а $\liminf$ поменяется на $\limsup$ и наоборот, $\limsup$ поменяется на $\liminf$. Лемма 2 доказана в [39].

Доказательство теоремы 1. Положим

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n. \quad (15)$$

Это есть производящая функция числа корневых деревьев $r_n = n^{n-1}$ (см. [26, раздел 4.2.4, соотношение (2.14)]). Она сходится при $|t| \leq 1/e$. Введем также производящую функцию

$$g(t) = R\left(\frac{t}{e}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n! e^n} t^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n. \quad (16)$$

Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n! e^n} = 1. \quad (17)$$

В самом деле, $R(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению (см. [26, раздел 4.2.4, соотношение (2.16)])

$$R(t) = te^{R(t)},$$

откуда

$$x = g(1) = R\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} e^{R(1/e)},$$

или

$$ex = e^x,$$

откуда

$$x = g(1) = 1.$$

Равенство (17) доказано.

Пусть $U_{nj} = U_{nj}(A)$ — число A -отображений множества X с n элементами, имеющих j компонент связности. Согласно [26, раздел 4.4.3, формула (4.25)],

$$Q(t, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n U_{nj} \frac{t^n}{n!} z^j = \exp(zf(R(t))), \quad (18)$$

где

$$f(t) = \sum_{n \in A} \frac{t^n}{n}. \quad (19)$$

Мы имеем согласно (16) и (18):

$$q(t, z) \equiv Q\left(\frac{t}{e}, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n U_{nj} \frac{t^n}{n! e^n} z^j = \exp(zf(g(t))). \quad (20)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n U_{nj} \frac{t^n}{n! e^n} z^j &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{U_{nj}}{|V(n)|} \frac{|V(n)| t^n}{n! e^n} z^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \mathbf{P}\{\nu_n = j\} \frac{|V(n)|}{n! e^n} t^n z^j \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \mathbf{P}\{\nu_n = j\} H(n) t^n z^j \end{aligned} \quad (21)$$

($V(n)$ и ν_n введены в п. 1). Из (20) и (21) следует, что

$$q(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} H(n) t^n \mathbf{E} z^{\nu_n} = \exp(zf(g(t))). \quad (22)$$

Положим

$$b_n = \sum_{k \geq n} p_k, \quad (23)$$

где числа p_k определены в (16). Согласно (16), (17) и (23), мы имеем

$$\begin{aligned} h(s) &\equiv \sum_{n \geq 0} b_n s^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq n} p_k s^n = \sum_{k \geq 1} \sum_{n < k} p_k s^n \\ &= \sum_{k \geq 1} p_k \frac{1 - s^k}{1 - s} = \frac{\sum_{k \geq 1} p_k - \sum_{k \geq 1} p_k s^k}{1 - s} = \frac{1 - g(s)}{1 - s}, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда $1 - g(s) = (1 - s)h(s)$, или

$$g(s) = 1 - (1 - s)h(s). \quad (25)$$

Далее, используя формулу Стирлинга для $k!$, в силу (16) и (23) мы имеем

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k>n} p_k = \sum_{k>n} \frac{k^{k-1}}{k! e^k} = \sum_{k>n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k^{3/2}} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k>n} k^{-3/2} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int_n^\infty x^{-3/2} dx \\ &= (1 + o(1)) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} n^{-1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24) и (26) по абелевой теореме Карамата [34, раздел XIII.5, теорема 5] следует, что при $s \uparrow 1$

$$\begin{aligned} h(s) &= \sum_{n \geq 0} b_n s^n = (1 + o(1)) \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi/2}} (1 - s)^{-1/2} \\ &= (1 + o(1)) \sqrt{2} (1 - s)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (см. [3, статья «Гамма-функция»]). Из (25) и (27) следует, что при $s \uparrow 1$

$$g(s) = 1 - (1 - s)h(s) = 1 - (1 - s)^{1/2} \sqrt{2} (1 + o(1)). \quad (28)$$

Положим в (22) при фиксированном $x \geq 0$ и $m \geq (\min A)^2$

$$z = \exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) \quad (29)$$

и $z = 0$ для остальных $m \in \mathbf{Z}_+$ и положим

$$a(m, n) = H(n) \mathbf{E} z^{\nu_n}. \quad (30)$$

Согласно (22), двойная производящая функция $A(u, v)$ для чисел $m^{\alpha-1} a(m, n)$ равна

$$A(u, v) \equiv \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n = \sum_{m \geq 0} m^{\alpha-1} u^m \exp(z f(g(v))) \quad (31)$$

($\alpha > 1$ фиксировано и будет выбрано далее). В (31) будем полагать $u = \exp(-\lambda t)$ и $v = \exp(-\mu/t)$, где $t, \lambda, \mu > 0$. Найдем асимптотику $A(u, v)$ при $t \rightarrow \infty$ и фиксированных λ и μ . Согласно [36, лемма 3.3.1],

$$f(e^{-\mu/t}) = l(t) - \varrho \ln \mu - \varrho \gamma + o(1) \quad (32)$$

при $t \rightarrow \infty$, где γ — постоянная Эйлера. Из (28) следует, что

$$\begin{aligned} \ln g(v) &= \ln \left(1 - (1-v)^{1/2} \sqrt{2}(1+o(1)) \right) = -(1-v)^{1/2} \sqrt{2}(1+o(1)) \\ &= -\left(\frac{\mu}{t}\right)^{1/2} \sqrt{2}(1+o(1)) = -\frac{\sqrt{2\mu+o(1)}}{\sqrt{t}} \end{aligned} \quad (33)$$

при $t \rightarrow \infty$. Из (32) и (33) получаем

$$f(g(v)) = l(\sqrt{t}) - \frac{\varrho}{2} \ln \mu - \frac{\varrho \ln 2}{2} - \varrho \gamma + o(1) \quad (34)$$

при $t \rightarrow \infty$. Из (29), (31) и (34) следует, что

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \sum_{m \geq 0} m^{\alpha-1} u^m \exp \left(f(g(v)) + (z-1)f(g(v)) \right) \\ &= (1+o(1)) \exp(l(\sqrt{t})) \mu^{-\varrho/2} \cdot 2^{-\varrho/2} e^{-\varrho \gamma} \\ &\quad \times \sum_{m \geq m_0} m^{\alpha-1} u^m \exp((z-1)l(\sqrt{t})), \end{aligned} \quad (35)$$

где $m_0 = (\min A)^2$. Покажем, что существует $\alpha > 1$ такое, что при $t \rightarrow \infty$ и $u = \exp(-\lambda/t)$

$$\begin{aligned} &\sum_{m \geq m_0} m^{\alpha-1} u^m \exp((z-1)l(\sqrt{t})) \\ &= \sum_{m \geq m_0} m^{\alpha-1} u^m \exp \left(\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \right) \\ &= (1+o(1)) \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\alpha \Gamma(\alpha) \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Разобьем сумму, стоящую во второй строке (36), на суммы Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 по $m \in [m_0, t/\ln t]$, $m \in [t/\ln t, t \ln t]$ и $m \in (t \ln t, \infty)$ соответственно. Заметим, что при $m \leq t$ для некоторой постоянной C , зависящей от x , справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) - x \sqrt{l(\sqrt{m})} \\ &\leq \frac{x l(\sqrt{t})}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} - x \sqrt{l(\sqrt{m})} + C \frac{l(\sqrt{t})}{l(\sqrt{m})} \\ &= \frac{x(l(\sqrt{t}) - l(\sqrt{m}))}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} + C \frac{l(\sqrt{t})}{l(\sqrt{m})} \\ &\leq x \ln \left(\frac{\sqrt{t}}{[\sqrt{m}]} \right) + C \ln \left(\frac{\sqrt{t}}{[\sqrt{m}]} \right) + C, \end{aligned}$$

последнее в силу неравенства

$$l(a) \leq l(b) + \ln \frac{a}{[b]}, \quad b \leq a. \quad (37)$$

Стало быть, полагая $\alpha = (x + C)/2 + 1$, мы получим, что

$$\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \leq x \sqrt{l(\sqrt{m})} + C(\alpha - 1) (\ln t - \ln [\sqrt{m}]^2).$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= O \left(t^{\alpha-1} \sum_{m=m_0}^{[t \ln t]} \left(\frac{m}{[\sqrt{m}]^2} \right)^{\alpha-1} \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{m})} \right) \right) \\ &= o \left(t^{\alpha-1} \sum_{m=m_0}^{[t \ln t]} \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{m})} \right) \right) \\ &= o \left(t^\alpha \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{t})} \right) \right), \end{aligned} \quad (38)$$

так как $[\sqrt{m}] = (1 + o(1))\sqrt{m}$ при $m \rightarrow \infty$. Заметим, что при $m \geq t$

$$\begin{aligned} &\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \\ &\leq \left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{m}) = x \sqrt{l(\sqrt{m})} + O(1) \end{aligned} \quad (39)$$

при $m \rightarrow \infty$. Положим $s = \exp(-\lambda/(2t))$. Согласно (39), для некоторой постоянной $c_1 < \infty$ при достаточно больших t

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sum_{m > t \ln t} m^{\alpha-1} u^m \exp \left(\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \right) \\ &= \sum_{m > t \ln t} m^{\alpha-1} s^m s^m \exp \left(\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \right) \\ &\leq \exp \left(-\frac{\lambda \ln t}{2} \right) \sum_{m > t \ln t} m^{\alpha-1} s^m \exp \left(\left(\exp \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} \right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \right) \\ &\leq c_1 t^{-\lambda/2} \sum_{m > t \ln t} m^{\alpha-1} s^m \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{m})} \right) \\ &\leq c_1 t^{-\lambda/2} \sum_{m \geq m_0} m^{\alpha-1} s^m \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{m})} \right) \\ &= o \left(t^\alpha \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{t})} \right) \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Как известно, из существования асимптотической плотности множества A следует существование логарифмической плотности A — см. [21, раздел 3.1]. Поэтому из (1) следует, что (см. (3))

$$l(t) = (1 + o(1))\varrho \ln t \quad (t \rightarrow \infty). \quad (41)$$

Пусть $m \in [t/\ln t, t \ln t]$. Для некоторого θ из того же отрезка и фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$ в силу (37) и (41) при достаточно больших t

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{l(\sqrt{t})} - \sqrt{l(\sqrt{m})} \right| &\leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{|l(\sqrt{t}) - l(\sqrt{m})|}{\sqrt{l(\sqrt{\theta})}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{\max\{|\ln(\sqrt{t}/[\sqrt{m}])|, |\ln(\sqrt{m}/[\sqrt{t}])|\}}{\sqrt{l(\sqrt{\theta})}} \\ &= O\left(\frac{\ln \ln t}{\sqrt{\ln t}}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}}\right) - 1 \right) l(\sqrt{t}) \\ &= l(\sqrt{t}) \left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}} + \frac{x^2}{2l(\sqrt{m})} + O(l^{-3/2}(\sqrt{m})) \right) \\ &= x\sqrt{l(\sqrt{m})} + \frac{x^2}{2} + \delta(t, m), \end{aligned}$$

где $\delta(t, m) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $m \in [t/\ln t, t \ln t]$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{m \in [t/\ln t, t \ln t]} m^{\alpha-1} u^m \exp\left(\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{l(\sqrt{m})}}\right) - 1\right) l(\sqrt{t})\right) \\ &\sim \exp\left(x\sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2}\right) \sum_{m \in [t/\ln t, t \ln t]} m^{\alpha-1} \exp\left(\frac{\lambda m}{t}\right) \\ &\sim \exp\left(x\sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-1} \exp\left(\frac{\lambda m}{t}\right) \\ &\sim \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha} \Gamma(\alpha) \exp\left(x\sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

при $t \rightarrow \infty$. Из (38), (40) и (42) следует (36). Из (35) и (36) получаем, что

$$\begin{aligned} A(u, v) &\sim \mu^{-\varrho/2} \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) t^{\alpha} \exp\left(l(\sqrt{t}) + x\sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2}\right) \cdot 2^{-\varrho/2} e^{-\varrho\gamma} \\ &= \mu^{-\varrho/2} \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{\varrho}{2}\right) r(t), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$r(t) = t^\alpha \exp \left(l(\sqrt{t}) + x\sqrt{l(\sqrt{t})} + \frac{x^2}{2} \right) 2^{-\varrho/2} e^{-\varrho\gamma} \Gamma^{-1} \left(\frac{\varrho}{2} \right). \quad (44)$$

Таким образом, условие (4) леммы 1 с $\beta = \varrho/2$ проверено. Проверим теперь условие (5) этой леммы. Положим для простоты $a_n = a(m, n)$. Согласно (22) и (30),

$$q(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \exp \left(z f(g(t)) \right), \quad (45)$$

где z имеет вид (29), $f(t)$ и $g(t)$ определены соответственно равенствами (19) и (16). Положим $\Delta_n = a_n - a_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $a_{-1} = 0$, $\Delta_0 = 0$. Из (45) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n t^n = (1 - t) \exp \left(z f(g(t)) \right). \quad (46)$$

Продифференцируем (46) по t :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \Delta_n t^{n-1} &= -q(t, z) + (1 - t) q(t, z) z f'(g(t)) g'(t) \\ &= -q(t, z) + (1 - t) q(t, z) z \sum_{n \in A} g^{n-1}(t) \sum_{n=0}^{\infty} n p_n t^{n-1} \end{aligned}$$

согласно (16) и (19). Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \Delta_n t^n = -t q(t, z) + q(t, z) z \sum_{n \in A-1} g^n(t) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n t^n (1 - t). \quad (47)$$

Мы имеем согласно (16):

$$\text{coef}_{t^k} \sum_{n \in A-1} g^n(t) = \sum_{n \in A-1} p_k^{*n} \equiv d_k. \quad (48)$$

Из (47) и (48) следует, что

$$n \Delta_n = -a_{n-1} + z \sum_{i+j+r=n, i \geq 0, j \in A-1, r \geq 1} a_i d_j (r p_r - (r+1) p_{r+1}). \quad (49)$$

Положим

$$s_n = \frac{z}{n} \sum_{i+j+r=n, i \geq 0, j \in A-1, r \geq 1} a_i d_j (r p_r - (r+1) p_{r+1}). \quad (50)$$

Из (49) и (50) следует, что $a_n - a_{n-1} = \Delta_n = -a_{n-1}/n + s_n$, или

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{n+1} + s_{n+1}. \quad (51)$$

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$h_n = np_n. \quad (52)$$

Согласно (16),

$$h_n = \frac{n^n}{n! e^n}. \quad (53)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+1}}{h_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} e^n n!}{e^{n+1} (n+1)! n^n} = \frac{(n+1)^n}{e n^n} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right) < 1, \end{aligned} \quad (54)$$

так как $\ln(1 + 1/n) < 1/n$. Из (53) и (54) следует, что $h_n > h_{n+1}$. Отсюда с учетом (48), (50) и (52) получаем, что при $n \in \mathbf{N}$

$$s_n \geq 0. \quad (55)$$

Из (51) следует, что при $l > n$

$$a_l - a_n = - \sum_{k=n}^{l-1} \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=n+1}^l s_k. \quad (56)$$

Мы имеем

$$0 \leq \sum_{k=n}^{l-1} \frac{a_k}{k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{l-1} a_k. \quad (57)$$

Поскольку условие (4) леммы 1 проверено и функция $r(n)$ правильно меняется на бесконечности, то, согласно (9), при $n \rightarrow \infty$ и $l - n = o(n)$

$$\sum_{k=0}^l a_k \sim \frac{r(l)}{\beta l^\alpha} \sim \frac{r(n)}{\beta n^\alpha} \sim \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad (58)$$

(везде далее считаем автоматически выполненным соотношение $m \asymp n$).

Из (58) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $l - n = o(n)$

$$\sum_{k=n}^l a_k = \sum_{k=0}^l a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = o\left(\sum_{k=0}^l a_k\right). \quad (59)$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ и $l - n = o(n)$ существует предел

$$\lim \frac{\sum_{k=n}^{l-1} a_k}{\sum_{k=0}^l a_k} = 0.$$

Из последнего равенства и неравенств (57) делаем вывод о существовании предела

$$\lim \frac{n \sum_{k=n}^{l-1} a_k / (k+1)}{\sum_{k=0}^l a_k} = 0 \quad (60)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $l - n = o(n)$. Из (60) в силу (56) и неравенства (55) следует (5). Соотношения (5) и (4) леммы 1 проверены. Согласно лемме 1 и соотношениям (29), (30), (43) и (44), мы имеем

$$\begin{aligned} a(n, n) &= H(n) \mathbf{E} \exp \left(\frac{x \nu_n}{\sqrt{l(\sqrt{n})}} \right) \sim r(n) n^{-1-\alpha} \\ &= n^{-1} \exp \left(l(\sqrt{n}) + x \sqrt{l(\sqrt{n})} + \frac{x^2}{2} \right) \cdot 2^{-\varrho/2} e^{-\varrho \gamma} \Gamma^{-1} \left(\frac{\varrho}{2} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (61) при $x = 0$ получаем

$$H(n) \sim n^{-1} \exp \left(l(\sqrt{n}) \right) \cdot 2^{-\varrho/2} e^{-\varrho \gamma} \Gamma^{-1} \left(\frac{\varrho}{2} \right). \quad (62)$$

Из (61) с учетом (62) выводим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{x \nu_n}{\sqrt{l(\sqrt{n})}} \right) \sim \exp \left(x \sqrt{l(\sqrt{n})} + \frac{x^2}{2} \right). \quad (63)$$

Из (63) следует, что

$$\mathbf{E} \exp \left(x \left(\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{l(\sqrt{n})}} \right) \right) \rightarrow \exp \left(\frac{x^2}{2} \right) \quad (64)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку нами доказано, что (64) выполнено для всех $x \geq 0$, то из (64) и леммы 2 следует, что распределения случайных величин

$$\nu_n'' = \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{l(\sqrt{n})}}$$

слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному распределению. С учетом формулы (41) то же самое мы можем сказать и относительно последовательности случайных величин ν_n' , которые фигурируют в формулировке теоремы 1. Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bender E. A. Asymptotic methods in enumeration. — SIAM Rev., 1974, v. 16, № 4, p. 485–515.
2. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. — Матем. сб., 1976, т. 99, № 1, с. 121–133.

3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: специальные функции. М.: Наука, 1983, 750 с.
4. Владимиров В. С., Завьялов Б. И. Тауберовы теоремы в квантовой теории поля. — Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. матем. М.: ВИНТИ, 1980, т. 15, с. 95–130.
5. Вольнец Л. М. Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 85–90.
6. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, 1944, № 1, т. 8, с. 3–48.
7. Grusho A. A. Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length. — Proceedings of the 3-rd International Petrozavodsk Conference on Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1993, p. 60–63.
8. Зубков А. М. Вычисление распределений характеристик чисел компонент и циклических точек случайного отображения. — Матем. вopr. криптогр., 2010, т. 1, № 2, с. 5–18.
9. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О случайных подстановках. — Труды по дискретной математике, т. 5. М.: Физматлит, 2002, с. 73–92.
10. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983, 239 с.
11. Curtiss J. H. A note on the theory of moment generating functions. — Ann. Math. Statist., 1942, v. 13, p. 430–433.
12. Колчин А. В. Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. — Дискрет. матем., 1994, т. 6, № 1, с. 100–115.
13. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
14. Kolchin V. F. The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. — Random Graphs, v. 2. Chichester: Wiley, 1992, p. 139–149.
15. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 255 с.
16. Manstavičius E. On random permutations without cycles of some lengths. — Period. Math. Hung., 2001, v. 42, № 1–2, p. 37–44.
17. Минеев М. П., Павлов А. И. Об одном уравнении в подстановках. — Тр. МИАН СССР, 1976, т. 142, с. 182–194.
18. Павлов А. И. О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. заметки, 1997, т. 62, № 6, с. 881–891.
19. Павлов Ю. Л. Случайные леса. Петрозаводск: Карельский научный центр РАН, 1996.
20. Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения. — Дискрет. матем., 2004, т. 16, № 3, с. 63–75.
21. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
22. Сачков В. Н. Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 679–694.
23. Сачков В. Н. Случайные отображения ограниченной высоты. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 1, с. 122–132.
24. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, 319 с.
25. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 287 с.
26. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004, 421 с.
27. Севастьянов Б. А. Сходимость по распределению случайных отображений конечных множеств к ветвящимся процессам. — Дискрет. матем., 2005, т. 17, № 1, с. 18–21.
28. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
29. Тимашёв А. Н. Случайные отображения конечных множеств с известным числом компонент. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 818–828.
30. Тимашёв А. Н. Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 4, с. 712–725.

31. Тимашёв А. Н. Обобщенная схема размещения в задачах вероятностной комбинаторики. М.: Издательский дом «Академия», 2011, 268 с.
32. Тимашёв А. Н. Большие отклонения в вероятностной комбинаторике. М.: Издательский дом «Академия», 2011, 248 с.
33. Тимашёв А. Н. Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике. М.: ТВП, 2011, 312 с.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
35. Чеплюкова И. А. Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении. — Дискрет. матем., 2004, т. 16, № 3, с. 76–84.
36. Якимив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М: Физматлит, 2005, 256 с.
37. Якимив А. Л. Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 1, с. 69–83.
38. Якимив А. Л. О числе A -отображений. — Матем. заметки, 2009, т. 86, № 1, с. 139–147.
39. Якимив А. Л. Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки. — Дискрет. матем., 2010, т. 22, № 1, с. 126–149.

Поступила в редакцию
28.III.2011

Исправленный вариант
10.XI.2013