Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Быстров, Экспоненциальные неравенства для вероятностей уклонений кратных стохастических интегралов по гауссовским интегрирующим процессам, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 150–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:25:36

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2014 г.

БЫСТРОВ А. А.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
УКЛОНЕНИЙ КРАТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПО
ГАУССОВСКИМ ИНТЕГРИРУЮЩИМ ПРОЦЕССАМ

В работе получены показательные оценки для хвостов распределений кратных стохастических интегралов произвольной размерности от ограниченных неслучайных функций. В качестве интегрирующих рассматриваются гауссовские процессы из некоторых достаточно широких классов. Приводятся важные примеры интегрирующих процессов; кратные интегралы по приращениям таких процессов возникают в статистических приложениях.

Ключевые слова и фразы: показательные оценки для вероятностей уклонений, предельные теоремы, стохастический интеграл, кратный стохастический интеграл, элементарная стохастическая мера, гауссовские процессы, стационарные последовательности случайных величин, перемешивание, V -статистики.

1. Введение. В работе рассматриваются кратные стохастические интегралы вида

$$\int_{\mathcal{X}^k} f(t_1, \dots, t_k) dY(t_1) \cdots dY(t_k), \quad (1)$$

где $f(t_1, \dots, t_k)$ — заданная неслучайная функция, $\mathcal{X} = [0, 1]$, а $Y(t)$ — некоторый гильбертов процесс. Конструкция абстрактного стохастического интеграла (частным случаем которой и является кратный стохастический интеграл в (1), построенный по приращениям случайного процесса на отрезке) для не обязательно ортогональных элементарных стохастических мер была предложена в работе [10], где показано, что если так называемая *ковариационная* мера, порожденная интегрирующей стохастической мерой, является конечной и сигма-аддитивной, то для всех функций из соответствующего ядерного пространства существует предел в среднеквадратичном последовательности лебеговских интегральных сумм, который и называется стохастическим интегралом от функции f . Цель настоящей статьи — получение показательных оценок для хвостов распределений кратного стохастического интеграла (1) в случае, когда интегрирующий процесс $Y(t)$ принадлежит некоторому достаточно широкому классу. Важные примеры интегрирующих процессов обсуждаются в части 3 работы.

Показательные оценки для хвостов распределений кратного интеграла Винера–Ито (в этом случае $Y(t)$ — стандартный винеровский процесс) были впервые получены П. Майором в [4]. В дальнейшем П. Майор неоднократно возвращался к этой

* НИУ Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: bystrov@ngs.ru

теме. Приведем соответствующее утверждение из [6] в удобной для нас редакции (следует отметить, что в [6] рассматривалось абстрактное пространство $\mathfrak{X}$). Пусть μ — мера Лебега на $[0, 1]$, интегралы $\sigma^2(f)$ и $I_k(f)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma^2(f) &= \int f^2(x_1, \dots, x_k) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_k), \\ I_k(f) &= \int f(x_1, \dots, x_k) W(dx_1) \cdots W(dx_k),\end{aligned}$$

где W есть белый шум с базовой мерой μ , т.е. гауссовский случайный процесс, индексированный элементами $B \in \mathfrak{B}([0, 1])$, такой, что $\mathbf{E} W(B) = 0$, $\mathbf{E} W(A)W(B) = \mu(A \cap B)$ для всех множеств $A, B \in \mathfrak{B}([0, 1])$.

Теорема А. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_k)$ задана на измеримом пространстве $([0, 1]^k, \mathfrak{B}([0, 1]^k))$ и удовлетворяет условию $\sigma^2(f) < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(|I_k(f)| > t) \leq C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sigma} \right)^{2/k} \right\} \quad (2)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ зависит только от k .

В [6] обсуждается и оптимальность приведенных неравенств в следующем смысле: для некоторых ядер (скажем, $f(x_1, \dots, x_k) = g(x_1) \cdots g(x_k)$, $\int g^2(x) dx < \infty$) константа в показателе экспоненты в (2) не может быть взята больше $1/2$ (неравенство становится неверным).

Кратные интегралы Винера–Ито возникают как слабые пределы последовательностей нормированных канонических статистик Мизеса в случае независимых наблюдений. Пусть $\{X_i; i \in \mathbf{Z}\}$ — стационарная (в узком смысле) последовательность случайных величин со значениями в $[0, 1]$ и (без ограничения общности) равномерным маргинальным распределением на этом отрезке. Определим статистику Мизеса (или V -статистику) по формуле

$$V_n := n^{-k/2} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $k \geq 2$, индексы суммирования i_j пробегает независимо друг от друга все значения от 1 до n , а функция f удовлетворяет условию вырожденности

$$\mathbf{E} f(t_1, \dots, t_{j-1}, X_j, t_{j+1}, \dots, t_k) = 0$$

при всех $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ и $j = 1, \dots, k$. Экспоненциальные неравенства для хвостов распределений V -статистик были получены в [5], [11].

Известно (см. [13], [3]), что если случайные величины $\{X_i\}$ независимы и

$$\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq k} \mathbf{E} f^2(X_{j_1}, \dots, X_{j_k}) < \infty, \quad (3)$$

то предел по распределению последовательности V_n описывается в виде кратного стохастического интеграла, совпадающего (так как распределение имеет ограниченную плотность) с соответствующим интегралом Винера–Ито:

$$V_n \xrightarrow{d} \int_{\mathfrak{X}^k} f(t_1, \dots, t_k) W(dt_1) \cdots W(dt_k)$$

при $n \rightarrow \infty$, где символ « $\xrightarrow{d}$ » здесь и далее обозначает слабую сходимость соответствующих распределений.

По сути, кратный интеграл Винера–Ито можно понимать как построенный по приращениям винеровского процесса на отрезке. Аналогичные интегралы, но построенные по приращениям более сложных гауссовских процессов, возникают как

пределы по распределению последовательностей нормированных канонических статистик Мизеса в случае слабо зависимых наблюдений. В [2] доказано, что если последовательность $\{X_i; i \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию ψ -перемешивания (с определенной скоростью убывания коэффициентов перемешивания), то при выполнении (3) в качестве предела по распределению последовательности V_n выступает кратный стохастический интеграл вида (1), причем интегрирующий центрированный гауссовский процесс $Y(t)$ имеет ковариационную функцию

$$\mathbf{E} Y(t)Y(s) = \min(t, s) - ts + \sum_{k \geq 1} (F_k(t, s) + F_k(s, t) - 2ts), \quad (4)$$

где $t, s \in [0, 1]$, а $F_k(t, s)$ обозначают функции совместного распределения пар (X_0, X_k) . Отметим, что условие суммируемости коэффициентов перемешивания обеспечивают абсолютную сходимость функционального ряда в правой части (4) и его равномерную ограниченность на $[0, 1]^2$ (подробнее см. пример 4 части 3 настоящей работы).

В связи с этим и возникает интерес к изучению свойств распределений кратных стохастических интегралов от неслучайного ядра, построенных по приращениям гауссовских процессов, отличных от винеровского, в частности, с ковариационными функциями вида (4).

2. Основные результаты. Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $Y(t)$ с ковариационной функцией

$$\Phi(t, s) = \mathbf{E} Y(t)Y(s).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(t, s) &:= \mathbf{E} (Y(t + \delta) - Y(t)) (Y(s + \delta) - Y(s)), \\ t, s, t + \delta, s + \delta &\in [0, 1], \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Мы будем рассматривать два вида условий на интегрирующий процесс $Y(t)$.

(А) Пусть $Y(t)$ представим в виде суммы двух независимых центрированных гауссовских процессов, заданных на одном вероятностном пространстве: $Y(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Обозначим $\Phi_1(t, s) = \mathbf{E} \xi(t)\xi(s)$, $\Phi_2(t, s) = \mathbf{E} \eta(t)\eta(s)$. Потребуем, чтобы при $\delta \rightarrow 0$

$$\Delta \Phi_1(t, s) = \begin{cases} \delta g_1(t) + o(\delta), & t = s, \\ 0, & t \neq s, \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta \Phi_2(t, s) = \delta^2 g_2(t, s) + o(\delta^2) \quad (6)$$

для некоторых функций $g_1(t), g_2(t, s)$, условия на которые будут приведены позже. Здесь, как и в нижеследующем условии (В), мы предполагаем длину стороны квадрата δ *инфинитезимальной* (т.е. достаточно малой), так что для любых $u < v$ имеет место неравенство $u + \delta < v - \delta$.

(В) Потребуем, чтобы

$$\Delta \Phi(t, s) = \begin{cases} \delta g_1(t) + o(\delta), & t = s, \\ \delta^2 g_2(t, s) + o(\delta^2), & t \neq s, \end{cases} \quad (7)$$

при $\delta \rightarrow 0$.

Легко видеть, что выполнение условия (А) гарантирует выполнение условия (В), так как при выполнении (А) $\Delta \Phi(t, s) = \Delta \Phi_1(t, s) + \Delta \Phi_2(t, s)$.

Теорема 1. Пусть f — ограниченная измеримая функция, и пусть центрированный гауссовский интегрирующий процесс $Y(t)$ удовлетворяет условию (А). Пусть соответствующие функции $g_1(t), g_2(t, s)$ из (А) также ограничены (заметим, что тогда ковариационная функция процесса имеет ограниченную вариацию, а значит, интеграл определен корректно). Пусть также функции g_1, g_2 непрерывны почти всюду на своей области определения, а функция f помимо этого почти

всюду непрерывна на всех диагональных подпространствах куба $[0, 1]^k$ (относительно меры Лебега соответствующей размерности).

Тогда существует положительное число x_0 такое, что для $x > x_0$

$$\mathbf{P}(|I(f)| > x) \leq 2^k \exp\{-\beta x^{2/k}\}. \quad (8)$$

Здесь константа β зависит лишь от размерности интеграла и $\mathbf{C}$ -норм функций f, g_1, g_2 . Ее явный вид приведен в доказательстве теоремы.

Доказательство. Так как $Y(t) = \xi(t) + \eta(t)$, то интеграл вида (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I(f) &= \int f(x_1, \dots, x_k) d(\xi(x_1) + \eta(x_1)) \cdots d(\xi(x_k) + \eta(x_k)) \\ &= \sum \int f(x_1, \dots, x_k) dZ(x_1) \cdots dZ(x_k), \end{aligned} \quad (9)$$

где $Z(x)$ обозначает процесс $\xi(x)$ или $\eta(x)$, сумма берется по всем различным вхождениям $d\xi$ и $d\eta$ в набор $dZ(x_1) \cdots dZ(x_k)$ (всего 2^k слагаемых).

Обозначим

$$I_j(f) := \int f(x_1, \dots, x_k) d\xi(x_1) \cdots d\xi(x_{k-j}) d\eta(x_{k-j+1}) \cdots d\eta(x_k),$$

где $j = 0, \dots, k$. Здесь индекс j указывает на число вхождений дифференциала $d\xi$ в $dZ(x_1) \cdots dZ(x_k)$. Тогда, в силу полуаддитивности вероятности

$$\mathbf{P}(|I(f)| > x) \leq \sum_{j=0}^k C_k^j \mathbf{P}\left(|I_j(f)| > \frac{x}{2^k}\right) \leq 2^k \max_j \mathbf{P}\left(|I_j(f)| > \frac{x}{2^k}\right). \quad (10)$$

На первый взгляд, для справедливости этой оценки нужно предположить симметричность функции f относительно всех возможных перестановок аргументов, однако это излишне. Как мы увидим в дальнейшем, верхняя оценка каждого слагаемого в (10) не чувствительна к порядку дифференциалов, т.е. все интегралы вида $\int f(x_1, \dots, x_k) dZ(x_1) \cdots dZ(x_k)$ с j вхождениями $d\xi$ в дифференциал допускают такие же оценки хвостов распределений, как $I_j(f)$.

Наша цель — получить равномерные по j верхние показательные оценки для $\mathbf{P}(|I_j(f)| > t)$, что в силу (10) немедленно позволит выписать аналогичную оценку для исходной вероятности уклонения. Для получения таких оценок мы используем степенное неравенство Чебышёва с последующей оптимизацией правой части. Такой метод получения показательных неравенств для хвостов распределений кратных стохастических интегралов, использовался, например, в [4].

Мы будем использовать римановские интегральные суммы. Пусть $A_i := [y_{i-1}, y_i]$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы длины $\delta := \delta(N)$, причем $\delta \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Обозначим $f_{j_1, \dots, j_k}^N = f(y_{j_1}, \dots, y_{j_k})$ и определим последовательность ступенчатых функций

$$f^N(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^N f_{j_1, \dots, j_k}^N \prod_{i=1}^k I(t_{i_i} \in A_{j_i}).$$

Введем обозначение для последовательности интегральных сумм, соответствующих интегралу $I_j(f)$:

$$I_j(f^N) = \sum f_{j_1, \dots, j_k}^N \mu_Z(A_{j_1}) \cdots \mu_Z(A_{j_k}),$$

где через $\mu_Z(A)$ обозначена элементарная стохастическая мера на $[0, 1]$, порожденная приращениями процесса $Z(t)$: $\mu_Z(A_i) := Z(y_i) - Z(y_{i-1})$ (такое же соглашение относительно обозначений примем и для остальных элементарных стохастических мер,

порожденных приращениями участвующих в рассуждениях случайных процессов). Для ядер из пространства S (см. [10]), в частности, для ограниченных ядер, такие интегральные суммы сходятся в среднеквадратическом, а их предел и есть $I_j(f)$.

Для любого натурального m

$$\mathbf{P}(|I_j(f^N)| > t) \leq \frac{\mathbf{E}(I_j(f^N))^{2m}}{t^{2m}}. \quad (11)$$

Предельный переход в этом неравенстве при $N \rightarrow \infty$ позволит оценить $\mathbf{P}(|I_j(f)| > t)$ (в силу сходимости последовательности $I_j(f^N)$ к $I_j(f)$ в среднеквадратическом, а значит, и по распределению).

Момент четного порядка случайной величины $I(f^N)$ имеет вид

$$\mathbf{E}(I(f^N))^{2m} = \sum_{i_1, \dots, i_{2mk}} f_{i_1, \dots, i_k}^N \cdots f_{i_{2k(m-1)+1}, \dots, i_{2mk}}^N \mathbf{E} \mu_Z(A_{i_1}) \cdots \mu_Z(A_{i_{2mk}}). \quad (12)$$

Разобьем сумму в (12) на подсуммы по всем диагональным подпространствам (по всевозможным множествам индексов суммирования, среди которых есть совпадающие, и «главному» подпространству, где все индексы различны). Важно отметить, что в силу предложения 5 из [10], на диагональных подпространствах $[0, 1]^{2mk}$, определяемых переменными кратности больше 2, мера $\mathbf{E} \mu_Z(A_{i_1}) \cdots \mu_Z(A_{i_{2mk}})$ имеет нулевую массу для любого m . Таким образом, нам достаточно рассматривать подсуммы, определяемые индексами суммирования кратностей 1 и 2. Исследуем асимптотику $\mathbf{E} \mu_Z(A_{i_1}) \cdots \mu_Z(A_{i_{2mk}})$ при $\delta \rightarrow 0$. Пусть в этом математическом ожидании присутствует ровно $2l$ ($l = 0, m, 2m, \dots, km$) множителей вида $\mu_\xi(A_i)$ (и $2mk - 2l$ множителей вида $\mu_\eta(A_i)$). В силу независимости процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно, перенумеровав индексы, представить $\mathbf{E} \mu_Z(A_{i_1}) \cdots \mu_Z(A_{i_{2mk}})$ в виде

$$\mathbf{E} \mu_\xi(A_{i_1}) \cdots \mu_\xi(A_{i_{2l}}) \mathbf{E} \mu_\eta(A_{i_{2l+1}}) \cdots \mu_\eta(A_{i_{2mk}}).$$

Для нахождения каждого из этих математических ожиданий можно использовать известную формулу вычисления смешанных четных моментов гауссовских случайных векторов (см., например, [12, гл. III, §1, (6)]). Начнем с первого множителя:

$$\mathbf{E} \mu_\xi(A_{i_1}) \cdots \mu_\xi(A_{i_{2l}}) = \sum \prod \Delta \Phi_1(y_i, y_j). \quad (13)$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, сумма берется по всевозможным разбиениям множества индексов (в данном случае — $\{i_1, \dots, i_{2l}\}$) на пары, а произведение — по всем таким парам в фиксированном разбиении.

Порядок убывания по δ множителей вида (13) при $\delta \rightarrow 0$ зависит от количества совпадающих индексов в множестве $\{i_1, \dots, i_{2l}\}$ или, другими словами, от числа совпадающих множеств в наборе $A_{i_1}, \dots, A_{i_{2l}}$ (очевидно, что два множества из этого набора либо совпадают, либо не пересекаются). В силу условия (5) множитель $\Delta \Phi_1(y_i, y_j)$ имеет порядок δ при $i = j$, иначе он обнуляется! Таким образом, при фиксации диагональной подсуммы, в разложении (13) присутствует ровно одно ненулевое слагаемое, а именно то, в котором ровно $2l$ пар совпадающих индексов, и в каждом множителе $\Delta \Phi_1(y_i, y_j)$, $i = j$. Еще раз подчеркнем, что ненулевое слагаемое найдется только тогда, когда в диагональной подсумме среди $\{i_1, \dots, i_{2l}\}$ имеем ровно l индексов кратности 2. Асимптотически это слагаемое ведет себя как $\delta^l \prod g_1(y_i) + o(\delta^l)$, где в произведении присутствуют только различные y_i (по одному представителю от каждой пары $y_i = y_j$, всего l множителей).

Аналогично исследуем второй множитель:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mu_\eta(A_{i_{2l+1}}) \cdots \mu_\eta(A_{i_{2mk}}) &= \sum \prod \Delta \Phi_2(y_i, y_j) = \sum \prod (\delta^2 g_2(y_i, y_j) + o(\delta^2)) \\ &= \delta^{2mk-2l} \sum \prod g_2(y_i, y_j) + o(\delta^{2mk-2l}). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что в $\sum \prod g_2(y_i, y_j)$ число слагаемых равно числу способов разбить $2mk - 2l$ индексов на пары. Это число, очевидно, оценивается сверху величиной $(mk - l)^{mk-l}$.

Таким образом, асимптотика $\mathbf{E} \mu_Z(A_{i_1}) \cdots \mu_Z(A_{i_{2mk}})$ имеет вид

$$\delta^{2mk-l} \prod g_1(y_i) \sum \prod g_2(y_i, y_j).$$

Но размерность (т.е. число несвязанных индексов суммирования) зафиксированной диагональной подсуммы не может быть больше, чем $2mk - l$ (потому что среди $\{i_1, \dots, i_{2l}\}$ имеется ровно l индексов кратности 2). Значит, размерность подсуммы с необходимостью равна $2mk - l$ (это означает, что все оставшиеся индексы $\{i_{2l+1}, \dots, i_{2mk}\}$ различны), иначе при переходе к пределу при $\delta \rightarrow 0$ интегральная сумма обнулится (порядок малости по δ будет строго больше размерности подсуммы). Значит, остаются в рассмотрении лишь диагональные подпространства, определяемые l переменными кратности 2 и $2mk - 2l$ переменными кратности 1, $l = 0, \dots, (mk)$.

Таким образом, соответствующая диагональная подсумма (с фиксированным набором переменных кратностей 1 и 2) имеет при $\delta \rightarrow 0$ предел, равный

$$\begin{aligned} I_{l,m} &:= \int_D \phi_f(s_1, s_1, \dots, s_l, s_l, t_1, \dots, t_{2mk-2l}) \prod_{i=1}^l g_1(s_i) \\ &\times \sum \prod g_2(t_i, t_j) ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_{2mk-2l}, \end{aligned} \quad (15)$$

где D — соответствующее диагональное подпространство,

$$\phi_f(y_1, \dots, y_{2mk}) := f(y_1, \dots, y_k) \cdots f(y_{k(m-1)}, \dots, y_{2mk})$$

(порядок аргументов у функции ϕ_f может быть любым). Предельный переход корректен, так как все подынтегральные функции (т.е. на каждом диагональном подпространстве) интегрируемы по Риману в силу условий теоремы 1 и критерия Лебега интегрируемости функции.

Теперь мы можем найти оценку сверху для предела произвольного четного момента от $I_j(f^N)$ при $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim \mathbf{E} (I_j(f^N))^{2m} &\leq \sum_{l=0}^{mk} \sum |I_{l,m}| \\ &\leq (mk+1) l^l \|f\|^{2m} \|g_1\|^l (mk-l)^{mk-l} \|g_2\|^{mk-l} \\ &\leq (Cm)^{km}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает суп-норму функции на ее области определения, $C := k\|g_1\|\|g_2\|\|f\|^{2/k}$, внутренняя сумма берется по всем диагональным подпространствам, определяемым l переменными кратности 2 и $2mk - 2l$ переменными кратности 1, l^l — оценка сверху для числа слагаемых во внутренней сумме, $(mk-l)^{mk-l}$ — оценка сверху для числа слагаемых в сумме, входящей в (15). Последнее неравенство верно, так как

$$(mk+1)l^l(mk-l)^{mk-l} \leq (mk+1)(l(mk-l))^{mk} \leq (mk+1)\left(\frac{mk}{2}\right)^{mk} \leq (mk)^{mk}.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в неравенстве (11), при всех натуральных m имеем

$$\mathbf{P}(|I_j(f)| > t) \leq \frac{(Cm)^{km}}{t^{2m}}. \quad (17)$$

Положим в числителе правой части $m = [\alpha t^{2/k}]$, где $\alpha > 0$ выберем позже ($[a]$ обозначает целую часть числа a). Тогда

$$\mathbf{P}(|I_j(f)| > t) \leq (C[\alpha t^{2/k}])^{km} t^{-2m} \leq (C\alpha)^{km} \leq \exp(-km) \leq \exp\left(-\frac{k\alpha t^{2/k}}{2}\right).$$

В этой цепочке неравенств мы положили $\alpha = (Ce)^{-1}$. Она выполнена для t таких, что $[\alpha t^{2/k}] \geq 1$.

Возвращаясь к неравенству (10), получаем

$$\mathbf{P}(|I(f)| > x) \leq 2^k \exp\left(-\frac{k\alpha(x/2^k)^{2/k}}{2}\right) = 2^k \exp(-\beta x^{2/k}),$$

где $\beta := k\alpha/8 = (8e\|g_1\|\|g_2\|\|f\|^{2/k})^{-1}$. Эта оценка имеет место при $x \geq x_0 := (4Ce)^{k/2}$. Теорема 1 доказана.

Для интегрирующих процессов из более широкого класса (В) аналогичным способом можно получить верхние показательные оценки для вероятностей отклонений соответствующих интегралов, но порядок убывания правой части уже не будет оптимальным (в смысле, обсуждавшемся выше).

Теорема 2. Пусть центрированный гауссовский интегрирующий процесс $Y(t)$ удовлетворяет условию (В), а функции f , $g_1(t)$, $g_2(t, s)$ удовлетворяют всем ограничениям теоремы 1.

Тогда существует положительное число t_0 такое, что для $t > t_0$

$$\mathbf{P}(|I(f)| > t) \leq \exp\{-\gamma t^{1/k}\}. \quad (18)$$

Здесь константа γ зависит лишь от размерности интеграла и $\mathbf{C}$ -норм функций f , g_1 , g_2 .

Доказательство. Пусть последовательность простых функций f^N определена так же как в теореме 1. В силу неравенства Чебышёва для любых натуральных m имеем

$$\mathbf{P}(|I(f^N)| > t) \leq \frac{\mathbf{E}(I(f^N))^{2m}}{t^{2m}}, \quad (19)$$

$$\mathbf{E}(I(f^N))^{2m} = \sum_{i_1, \dots, i_{2mk}} f_{i_1, \dots, i_k}^N \cdots f_{i_{2k(m-1)+1}, \dots, i_{2mk}}^N \mathbf{E} \mu_Y(A_{i_1}) \cdots \mu_Y(A_{i_{2mk}}). \quad (20)$$

В силу условия (В) и вышеприведенной формулы вычисления смешанных четных моментов гауссовских случайных векторов смешанный момент в правой части при $\delta \rightarrow 0$ ведет себя как

$$\sum \prod \delta^l g_1(s_i) \delta^{2mk-2l} g_2(t_i, t_j) + o(\delta^{2mk-l}),$$

где l — число парных множеств в наборе A_{i_j} , s_i обозначает точки y_i , которые имеют кратность 2, а t_i — точки y_i с кратностью 1 (напомним, что в силу вышеупомянутой леммы из [10] можно не учитывать диагональные подпространства, определяемые переменными, имеющими кратность более 2). Аналогично доказательству теоремы 1, разобьем сумму в (20) на диагональные подсуммы и перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim \mathbf{E}(I(f))^{2m} &\leq \sum_{l=0}^{mk} \sum |I_{l,m}| \leq \sum_{l=0}^{mk} \sum \|f\|^{2m} \|g_1\|^l (mk)^{mk} \|g_2\|^{mk-l} \\ &\leq (mk)^{2mk} (\|f\|^2 \|g_1\|^k \|g_2\|^k)^m = (Cm)^{2mk}. \end{aligned}$$

В этой цепочке соотношений внутренняя сумма снова берется по всем диагональным подпространствам куба $[0, 1]^{2mk}$, определяемым l переменными кратности 2, остальные — кратности 1. Здесь мы использовали величину $(mk)^{mk}$ и как верхнюю оценку для числа «диагональных» подсумм, и как верхнюю оценку для числа слагаемых в сумме, входящей в определение $I_{l,m}$.

Переходя к пределу в неравенстве (19), имеем для всех натуральных m

$$\mathbf{P}(|I(f)| > t) \leq t^{-2m} (Cm)^{2mk}.$$

Положим в основании этой оценки $m = [\alpha t^{1/k}]$, где $\alpha > 0$ выберем позже. Тогда

$$\mathbf{P}(|I(f)| > t) \leq (C[\alpha t^{1/k}])^{2km} t^{-2m} \leq (C\alpha)^{2km} \leq \exp(-2km) \leq \exp(-k\alpha t^{1/k}).$$

В этой цепочке неравенств мы положили $\alpha = (Ce)^{-1}$. Она выполнена для $t > t_0 := (Ce)^k$ (т.е. $\alpha t^{1/k} \geq 1$). Выберем теперь $\gamma = k\alpha$. Теорема 2 доказана.

3. Примеры интегрирующих процессов. Рассмотрим несколько важных гауссовских процессов, удовлетворяющих условиям (А) и (В).

1) Стандартный винеровский процесс $W(t)$, заданный на отрезке $[0, 1]$, имеет ковариационную функцию $\Phi(t, s) = \min(t, s)$. Этот процесс удовлетворяет условию (А) с ограниченными функциями $g_1(t) \equiv 1$, $g_2(t, s) \equiv 0$, т.е. в разложении на сумму независимых процессов присутствует только $\xi(t) = W(t)$. Как уже было отмечено, в этом случае П. Майор получил для соответствующих кратных стохастических интегралов (так называемых интегралов Винера–Ито) показательные оценки вида

$$\mathbf{P}(|I(f)| > x) \leq \exp\{-\alpha x^{2/k}\}$$

для любых ядер из $L_2([0, 1]^m)$, обнуляющихся на всех диагональных подпространствах.

2) Броуновский мост $W_0(t)$ с ковариационной функцией $\Phi(t, s) = \min(t, s) - ts$ удовлетворяет условию (А) с ограниченными функциями $g_1(t) \equiv 1$, $g_2(t, s) \equiv -1$. Этот процесс является процессом с неортогональными приращениями. Впервые кратный стохастический интеграл от неслучайной функции по приращениям этого гауссовского процесса рассматривался в работе А. А. Филипповой [13] при исследовании предельного поведения функционалов (статистик) Мизеса, построенных по независимым наблюдениям. Следует заметить, что в конструкции Филипповой (так же, как и в конструкции, предложенной в работе [10]) в отличие от конструкции Майора стохастический интеграл зависит от значений ядра на диагональных подпространствах области интегрирования.

3) Невырожденные гауссовские марковские процессы имеют факторизующую ковариационную функцию $\Phi(t, s) = G(\min(t, s))H(\max(t, s))$, где факторизационные компоненты неотрицательны, отношение G/H не убывает и не обращается в нуль на $(0, 1)$ (см. [9]). Предположим, что меры, порожденные приращениями компонент G , H , абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на $[0, 1]$. Тогда такие процессы удовлетворяют условию (В) с $g_1(t) = H(t)G'(t) - H'(t)G(t)$, $g_2(t, s) = G'(\min(t, s))H'(\max(t, s))$ (здесь $G'(\cdot)$, $H'(\cdot)$ обозначают соответствующие производные Радона–Никодима). В частности, такое представление допускают стандартный винеровский процесс и броуновский мост. Вообще говоря, условие (А) для таких процессов может и не выполняться. Скажем, для произвольного стационарного гауссовского марковского процесса на $[0, \infty)$ компоненты факторизации вычисляются по формулам $G(z) = \exp(\alpha z)$ и $H(z) = \exp(-\alpha z)$, где $\alpha > 0$. Мы можем рассмотреть сужение такого процесса на отрезок, однако аддитивное представление ковариационной функции для него не будет иметь места.

4) Пусть $\{X_i; i \in \mathbf{Z}\}$ — стационарная последовательность случайных величин с равномерным маргинальным распределением на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $Y(t)$ с ковариационной функцией вида (4). Такие процессы возникают как слабые пределы последовательности стандартных эмпирических процессов, построенных по $\{X_i\}$.

Обозначим $\mathcal{F}_j^k$ сигма-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, \dots, X_k$, $j \leq k$. Для $m \geq 1$ определим функцию

$$\psi(m) := \sup_k \sup \left\{ \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \right|; A \in \mathcal{F}_{-\infty}^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^\infty, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0 \right\}. \quad (21)$$

Очевидно, функция $\psi(m)$ монотонно невозрастает. Стационарная в узком смысле последовательность случайных величин называется последовательностью с ψ -перемешиванием, если $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(m) = 0$. Такие условия зависимости были исследованы в [1], [7], [13] и др.

Заметим, что если последовательность случайных величин удовлетворяет условиям ψ -перемешивания, то она является последовательностью с равномерно сильным (т.е. φ -) перемешиванием.

Как уже было сказано выше, в работе [2] было доказано, что кратный стохастический интеграл, построенный по приращениям случайного процесса $Y(t)$, выступает как слабый предел последовательности нормированных вырожденных статистик Мизеса, построенных по стационарной последовательности с условием ψ -перемешивания. При этом ядро интеграла должно лежать в некотором функциональном пространстве, которое определяется совместным распределением $\{X_i\}$. Строгое определение этого пространства мы приводить не будем, заметив, что ограниченные функции ему заведомо принадлежат. Заметим, что при условии существования совместных плотностей $p_k(t, s)$ процесс $Y(t)$ удовлетворяет условию (A) с $g_1(t) = 1$, $t \in [0, 1]$, и

$$g_2(t, s) = \left| \sum_{j \geq 1} (p_j(t, s) + p_j(s, t) - 2) - 1 \right|,$$

причем условие ψ -перемешивания гарантирует ограниченность $g_2(t, s)$ (см. [2]), требующуюся в условиях теоремы 1.

5) Напомним, что регулярным фрактальным броуновским движением (RFBM) называется центрированный гауссовский процесс $B(t)$ с ковариационной функцией

$$\Phi_h(t, s) := \mathbf{E} B(t)B(s) = \frac{1}{2} (s^{2h} + t^{2h} - |t - s|^{2h}), \quad h > \frac{1}{2}.$$

Для этого популярного в приложениях процесса выполняется условие (A) с $g_1(t) = 0$ и $g_2(t, s) = h(2h - 1)|t - s|^{2h-2}$, т.е. в разложении на сумму независимых процессов присутствует только $\eta(t) = B(t)$. Однако условия теоремы 1 для такого интегрирующего процесса не выполняются, так как функция $g_2(t, s)$ не является ограниченной на $[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blum J. R., Hanson D. L., Koopmans L. H. On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1963, v. 2, p. 1–11.
2. Borisov I. S., Bystrov A. A. Stochastic integrals and asymptotic analysis of canonical von Mises statistics based on dependent observations. — High Dimensional Probability. Beachwood: Inst. Math. Statist., 2006, p. 1–17. (IMS Lecture Notes Monograph Ser., v. 51.)
3. Dynkin E. B., Mandelbaum A. Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals. — Ann. Statist., 1983, v. 11, № 3, p. 739–745.
4. Major P. Multiple Wiener–Itô integrals. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 849, p. 1–127.
5. Major P. On a multivariate version of Bernstein’s inequality. — Electron. J. Probab., 2007, v. 12, p. 966–988 (electronic).
6. Major P. Estimation of Wiener–Itô integrals and polynomials of independent gaussian random variables. arXiv:0803.1453[math.PR].
7. Sen P. K. Limiting behavior of regular functionals of empirical distributions for stationary $\ast$ -mixing processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1972, v. 25, p. 71–82.
8. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

9. Борисов И. С. Об одном критерии марковости гауссовских случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 802–805.
10. Борисов И. С., Быстров А. А. Построение стохастического интеграла от неслучайной функции без условия ортогональности интегрирующей меры. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 52–80.
11. Борисов И. С., Володько Н. В. Экспоненциальные неравенства для распределений U - и V -статистик от зависимых наблюдений. — Матем. труды, 2008, т. 11, в. 2, с. 3–19.
12. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
13. Филиппова А. А. Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1962, т. 7, в. 1, с. 26–60.

Поступила в редакцию

1.IX.2012

Исправленный вариант

13.IV.2013

© 2014 г.

ГУСЕВ С. А.*, ДОКУЧАЕВ Н. Г.**

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ВРЕМЯ ПЕРВОГО ВЫХОДА ДИФFUЗИОННОГО ПРОЦЕССА ИЗ ОБЛАСТИ¹⁾

Одной из проблем при дифференцировании функционалов диффузионных процессов в областях с поглощающими границами является вычисление производных по параметрам для времени первого выхода случайного процесса из области τ . Ранее в работе [5] был предложен метод решения этой проблемы, но при этом накладывалось ограничительное и трудно проверяемое условие существования среднеквадратических производных τ по параметрам. В данной работе показано, что при некоторых дополнительных предположениях это условие может быть снято.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, время первого выхода, поглощающая граница, производные по параметрам.

1. Введение. Необходимость дифференцирования по параметрам функционалов случайных процессов возникает в задачах стохастической оптимизации. Решение таких задач осложняется в случаях, когда функционалы содержат время первого выхода τ случайного процесса из области. Известно, например, что время первого выхода для гладких процессов не является непрерывным относительно малых изменений параметров. С другой стороны, для случайных диффузионных процессов имеется некоторая регулярность математических ожиданий, содержащих время первого выхода случайного процесса [1], [2]. Однако эта регулярность не гарантирует существование производных τ . Дифференцирование математических ожиданий функционалов, содержащих τ , в принципе возможно (например, через дифференцирование по параметру соответствующих решений краевых задач для уравнений Колмогорова в случае

* Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; sag@osmf.sccc.ru

** Department of Mathematics and Statistics, Curtin University, Perth, Australia; e-mail: n.dokuchaev@curtin.edu.au

¹⁾ Работа поддержана Австралийским исследовательским советом (ARC) (грант DP120100928), научной программой «Ведущие научные школы» (грант НШ-5111.2014.1) и РФФИ (грант № 14-01-00340-а).