Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лотов, Об асимптотике вероятности разорения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 178–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 02:35:58

6. Холево А. С. Каналы, разрушающие сцепленность, в бесконечных размерностях. — Пробл. передачи информ., 2008, т. 44, № 3, с. 3–18.
7. Shirokov M. E. Entropy reduction of quantum measurement. — J. Math. Phys., 2011, v. 52, № 5, paper № 052202, 18 p.
8. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010, 327 с.
9. Barchielli A., Lupieri G. Instruments and mutual entropies in quantum information. — Banach Center Publ., 2006, v. 73, p. 65–80.
10. Кузнецова А. А., Холево А. С. Теоремы кодирования для гибридных каналов. — Теория вероятн. и ее примен., 2013, т. 58, в. 2, с. 298–324.
11. Lindblad G. Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems. — Comm. Math. Phys., 1974, v. 39, p. 111–119.
12. Caves C. M., Drummond P. B. Quantum limits of bosonic communication rates. — Rev. Modern Phys., 1994, v. 66, p. 481–538.
13. Hall M. J. W. Quantum information and correlation bounds. — Phys. Rev. A, 1997, v. 55, № 1, p. 100–113.

Поступила в редакцию
16.VII.2013

© 2014 г.

ЛОТОВ В. И.*

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ¹⁾

Найдено асимптотическое представление вероятности разорения для случайного блуждания с отрицательным сносом при условии неограниченного роста верхней границы полосы. Результат выражается через распределения супремума траектории и величины перескока через отрицательный уровень. В последующих следствиях используются известные асимптотические формулы для распределения супремума, полученные при различных ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, вероятность разорения, асимптотический анализ.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же невырожденное распределение, и

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Везде в дальнейшем предполагается, что распределение X_1 не является арифметическим (т.е. не сосредоточено на решетке вида $\{kh, k = 0, \pm 1, \dots\}$), $\mathbf{P}(X_1 > 0) > 0$ и существует $\mathbf{E} X_1 < 0$. Для произвольных $a \geq 0$ и $b > 0$ введем случайную величину

$$N = N_{a,b} = \inf\{n \geq 1: S_n \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода случайного блуждания из интервала $(-a, b)$, и пусть

$$\alpha(a, b) = \mathbf{P}(S_N \leq -a), \quad \beta(a, b) = \mathbf{P}(S_N \geq b).$$

Обе эти величины принято называть вероятностями разорения в связи с известными приложениями, здесь, очевидно, $\alpha(a, b) + \beta(a, b) = 1$. В работе изучается асимптотическое поведение вероятности $\beta(a, b)$ при условии, что $b \rightarrow \infty$. Число a в ряде случаев

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: lotov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00046).

может оставаться ограниченным. Результаты получены как в случае медленного убывания на бесконечности функции $\mathbf{P}(X_1 \geq x)$, так и при выполнении правостороннего условия Крамера.

Первые шаги в изучении вероятности разорения были сделаны еще в XVII столетии при рассмотрении игровых ситуаций (см. обзор Л. Такача [1]) и ограничивались ситуацией, когда $\mathbf{P}(X_1 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1$. Впоследствии выяснилось, что к вычислению $\beta(a, b)$ приводят и другие, не менее важные задачи, такие как нахождение вероятностей ошибок и оперативной характеристики последовательного критерия отношения правдоподобия [2], обнаружение разладки с помощью метода кумулятивных сумм [3], исследование различных характеристик систем обслуживания и ряд других.

В связи с тем что вычисление $\beta(a, b)$ в точном виде доступно только в некоторых частных ситуациях, акцент в исследованиях переместился на построение аппроксимационных формул, в частности, на изучение асимптотики вероятности разорения в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен (например, в схеме серий или при $a + b \rightarrow \infty$). В этой связи следует отметить аппроксимацию вероятности разорения с оценкой погрешности в схеме серий с уменьшающимися скачками блуждания [4] (здесь предполагается наличие третьего момента у X_1), работы автора [5], [6] об аппроксимации вероятности разорения с экспоненциальной точностью, а также ряд работ, связанных с асимптотикой вероятностей ошибок последовательного критерия Вальда [7]–[9]. Работа [8] содержит наиболее точный результат в этом направлении — асимптотические разложения для $\beta(a, b)$ по степеням e^{-a} и e^{-b} при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$. Однако для этого потребовалось двустороннее условие Крамера и наличие абсолютно непрерывной компоненты распределения X_1 , что, впрочем, не является чрезмерным ограничением для последовательного критерия Вальда.

Отметим, что наибольший прогресс в граничных задачах для случайных блужданий вообще, и в задаче о разорении в частности, был в свое время достигнут в условиях быстрого убывания на бесконечности хвостов распределения скачков блуждания. Здесь в полной мере продемонстрирована эффективность так называемого факторизационного метода (см. [6], [10]–[12]). В то же время в последние десятилетия возрос интерес к граничным задачам для случайных блужданий, распределения скачков которых медленно убывают на бесконечности. Во многом это объясняется потребностями стремительно развивающейся теории систем обслуживания, в которой, как известно, важную роль играет такой граничный функционал, как супремум траектории случайного блуждания. В связи с этим мы включаем в рассмотрение случайные блуждания, для которых правый хвост распределения скачков медленно убывает на бесконечности. Единственным ограничением на левый хвост распределения будет существование первого момента.

Обозначим

$$S = \sup_{n \geq 0} S_n, \quad \mathbf{P}(S \geq x) = Q(x).$$

Введем также величины

$$\nu_t = \inf\{n \geq 1: S_n \leq t\}, \quad \chi_t = S_{\nu_t} - t, \quad t \leq 0,$$

и пусть

$$G(x) = \frac{1}{|\mathbf{E} \chi_0|} \int_{-\infty}^x \mathbf{P}(\chi_0 < y) dy, \quad x \leq 0,$$

— предельное распределение величины перескока через отрицательный уровень при стремлении этого уровня к минус бесконечности. Обозначим

$$g(t, a) = \int_{-\infty}^{+0} Q(t - y) \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy), \quad g(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} g(t, a) = \int_{-\infty}^0 Q(t - y) dG(y).$$

Следующее утверждение является основным результатом работы. Суть его состоит в выражении вероятности разорения через распределения хорошо известных функции

оналов от траектории случайного блуждания, возникающих в задачах с одной границей.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}X_1 < 0$ и распределение X_1 не является арифметическим. Тогда при $b \rightarrow \infty$

$$\beta(a, b) = \frac{Q(b) - g(a+b, a)}{1 - g(a+b)} (1 + o(g(a+b))). \quad (1)$$

Если $a \rightarrow \infty$ наряду с $b \rightarrow \infty$, то в формулировке теоремы $g(a+b, a)$ можно заменить на $g(a+b)$.

Доказательство. Имеем

$$\beta(a, b) = \mathbf{P}(S \geq b) - \int_{-\infty}^{-a+0} \mathbf{P}(S_N \in dx) \mathbf{P}(S \geq b-x) \quad (2)$$

(здесь вначале вычисляется вероятность $\mathbf{P}(S \geq b)$ всех траекторий, когда-либо достигших уровня b , а затем вычитается вероятность тех из них, которые раньше достигли уровня $-a$, при этом перебираются все варианты положения блуждающей частицы в момент первого прохождения уровня $-a$).

Далее, для $x \leq -a$

$$\mathbf{P}(S_N \in dx) = \mathbf{P}(-a + \chi_{-a} \in dx) - \int_b^\infty \mathbf{P}(S_N \in du) \mathbf{P}(-a + \chi_{-u-a} \in dx).$$

Подставляя это выражение в (2), получаем

$$\begin{aligned} \beta(a, b) = & Q(b) - \int_{-\infty}^{-a+0} Q(b-x) \mathbf{P}(-a + \chi_{-a} \in dx) \\ & + \int_{-\infty}^{-a+0} Q(b-x) \int_b^\infty \mathbf{P}(S_N \in du) \mathbf{P}(-a + \chi_{-u-a} \in dx). \end{aligned}$$

Положим $y = x + a$, тогда

$$\beta(a, b) = Q(b) - g(a+b, a) + \int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-y) \mathbf{P}(\chi_{-u-a} \in dy) \mathbf{P}(S_N \in du). \quad (3)$$

Лемма 1. Для каждого $u \geq b$ равномерно по $a \geq 0$ имеет соотношение место

$$\int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-y) \mathbf{P}(\chi_{-u-a} \in dy) = g(a+b)(1 + o(1)), \quad b \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-y) \mathbf{P}(\chi_{-u-a} \in dy) = g(a+b) + \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-y) d(\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y)). \quad (4)$$

Заметим, что $\mathbf{P}(S \geq x) > 0$ для любого x , поскольку найдется число $r > 0$, для которого $\mathbf{P}(X_1 \geq r) > 0$. Отсюда следует, что $g(x) > 0$ при всех x .

Покажем, что последнее слагаемое в (4) для всех $u \geq b$ есть $o(1)g(a+b)$ при $b \rightarrow \infty$. Действительно, если предположить обратное, то найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность чисел $b_k \rightarrow \infty$ такие, что при всех k и некотором $u \geq b_k$

$$\left| \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b_k-y) d(\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y)) \right| > \varepsilon \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b_k-y) dG(y). \quad (5)$$

В этом случае мы быстро приходим к противоречию. Действительно, применив к левой части неравенства (5) формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+0} Q(a+b_k-y) d(\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y))$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y))Q(a + b_k - y) \Big|_{-\infty}^{+0} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+0} (\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y)) dy Q(a + b_k - y) \\
&= - \int_{-\infty}^{+0} (\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y)) dy Q(a + b_k - y).
\end{aligned}$$

В условиях теоремы имеет место равномерная по y сходимость $\mathbf{P}(\chi_{-t} < y) \rightarrow G(y)$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно выбрать число b_k настолько большим, чтобы при всех $a \geq 0$ и $u \geq b_k$ выполнялось неравенство

$$|\mathbf{P}(\chi_{-u-a} < y) - G(y)| < \delta,$$

т.е. модуль левой части (5) будет меньше $\delta Q(a + b_k)$.

Для оценки снизу интеграла в правой части (5) воспользуемся следующим простым и, возможно, известным утверждением (мы приведем его с доказательством, поскольку не удалось найти соответствующую ссылку).

Лемма 2. Для любых $x \geq 0$, $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$Q(x + t) \geq Q(x)Q(t).$$

Доказательство. Обозначим $\mu_x = \inf\{n \geq 1: S_n \geq x\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S \geq x + t) &= \int_x^\infty \mathbf{P}(S \geq x + t, S_{\mu_x} \in dy) \\
&= \int_x^{x+t} \mathbf{P}(S \geq t - y + x) \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) \\
&\quad + \int_{x+t}^\infty \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) \\
&\geq \int_x^{x+t} \mathbf{P}(S \geq t) \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) \\
&\quad + \int_{x+t}^\infty \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) \\
&\geq \mathbf{P}(S \geq t) \left(\int_x^{x+t} \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) + \int_{x+t}^\infty \mathbf{P}(\mu_x < \infty, S_{\mu_x} \in dy) \right) \\
&= \mathbf{P}(S \geq t) \mathbf{P}(S \geq x).
\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Имеем теперь

$$\int_{-\infty}^0 Q(a + b_k - y) dG(y) \geq Q(a + b_k) \int_{-\infty}^0 Q(-y) dG(y) = CQ(a + b_k), \quad C > 0.$$

Таким образом, правая часть (5) не меньше $C\varepsilon Q(a + b_k)$. В силу произвольности выбора числа δ это противоречит соотношению (5). Лемма 1 доказана.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} Q(a + b - y) \mathbf{P}(\chi_{-u-a} \in dy) \mathbf{P}(S_N \in du) \\
&= g(a + b) \int_b^\infty \mathbf{P}(S_N \in du) (1 + o(1)) = \beta(a, b) g(a + b) (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$\beta(a, b) = \frac{Q(b) - g(a + b, a)}{1 - g(a + b)(1 + o(1))}.$$

Легко видеть, что при $b \rightarrow \infty$

$$\frac{1 - g(a+b)}{1 - g(a+b)(1 + o(1))} = 1 + o(g(a+b)),$$

поэтому

$$\beta(a, b) = \frac{Q(b) - g(a+b, a)}{1 - g(a+b)} (1 + o(g(a+b))).$$

Теорема 1 доказана.

Сложность ситуации состоит в том, что нахождение функции $Q(x)$ в явном виде сопряжено со значительными трудностями. Поэтому приходится довольствоваться асимптотическими представлениями вида

$$Q(x) = T(x)(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

которые к настоящему времени известны при различных требованиях на характер убывания на бесконечности функции $\mathbf{P}(X_1 \geq x)$. Наша дальнейшая цель — получить в качестве следствий асимптотические представления для $\beta(a, b)$, в которых вместо функции Q фигурировала бы известная функция T .

Обозначим

$$g_1(t, a) = \int_{-\infty}^{+0} T(t-y) \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy), \quad g_1(t) = \int_{-\infty}^{+0} T(t-y) dG(y).$$

Лемма 3. Пусть выполнено (6). Тогда при $b \rightarrow \infty$ равномерно по $a \geq 0$

$$g(a+b, a) = g_1(a+b, a)(1 + o(1)), \quad g(a+b) = g_1(a+b)(1 + o(1)). \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Q(b) = T(b)(1 + \psi(b))$, где $\psi(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Положим $\psi_1(b) = \sup_{t \geq b} |\psi(t)|$. Тогда для $y \leq 0$

$$|\psi(a+b-y)| \leq \psi_1(a+b-y) \leq \psi_1(b)$$

в силу того, что ψ_1 — невозрастающая функция, при этом $\psi_1(b) \rightarrow 0$, если $b \rightarrow \infty$. Таким образом, при $b \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |g(a+b, a) - g_1(a+b, a)| &\leq \int_{-\infty}^{+0} T(a+b-y) |\psi(a+b-y)| \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy) \\ &\leq \psi_1(b) \int_{-\infty}^{+0} T(a+b-y) \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy) = o(1)g_1(a+b, a). \end{aligned}$$

Второе соотношение в (7) устанавливается так же. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим сначала случайные блуждания, у которых распределение приращений медленно убывает на бесконечности.

Обозначим через $\mathcal{S}$ класс субэкспоненциальных распределений. Напомним его определение. Пусть неотрицательные независимые случайные величины Y_1 и Y_2 имеют одну и ту же функцию распределения $\mathcal{F}$. Будем говорить тогда, что $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_+$, если при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 \geq x) \sim 2\mathbf{P}(Y_1 \geq x).$$

Класс $\mathcal{S}_+$, в частности, содержит распределение Вейбулла $1 - \mathcal{F}(x) = \exp\{-x^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, а также распределения с правильным изменением на бесконечности, т.е. $1 - \mathcal{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, где $\alpha > 0$, а функция $L(x)$ медленно меняется на бесконечности.

Функция распределения произвольной случайной величины Y по определению принадлежит $\mathcal{S}$, если функция распределения случайной величины $\max\{0, Y\}$ принадлежит $\mathcal{S}_+$.

Обозначим

$$\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X_1 \geq x), \quad I(x) = \min \left(1, \int_x^\infty \bar{F}(y) dy \right), \quad -m = \mathbf{E} X_1.$$

Предположим теперь, что дополнительно к условиям теоремы 1 выполняется включение $1 - I \in \mathcal{S}$. Хорошо известно, что в этом случае при $x \rightarrow \infty$ имеет место (6), где

$$T(x) = \frac{1}{m} \int_x^\infty \bar{F}(u) du \quad (8)$$

(см., например, [13, гл. 12, §7]). Наряду с T функция Q также будет субэкспоненциальной, поэтому для нее выполнено следующее известное свойство: для любого фиксированного y

$$\frac{Q(b+y)}{Q(b)} \rightarrow 1, \quad b \rightarrow \infty.$$

Стало быть, для фиксированного a

$$\frac{g(a+b, a)}{Q(b)} = \int_{-\infty}^{+0} \frac{Q(a+b-y)}{Q(b)} \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy) \rightarrow 1 \quad (9)$$

при $b \rightarrow \infty$. Это означает, что если число a не растет, то главные члены асимптотики функций $Q(b)$ и $g(a+b, a)$ совпадают и их подстановка в (1) не приводит к содержательному результату. Соотношение (9) также имеет место, если $Q(x)$ правильно меняется на бесконечности, а число a растет вместе с b так, что $a = o(b)$.

В связи с этим мы будем здесь рассматривать ситуацию, когда $a = kb$, где k не зависит от b . В этом случае, очевидно, $g(a+b, a) \sim Q((k+1)b)$, поскольку

$$\frac{g(a+b, a)}{Q((k+1)b)} = \int_{-\infty}^{+0} \frac{Q((k+1)b-y)}{Q((k+1)b)} \mathbf{P}(\chi_{-kb} \in dy) \rightarrow 1, \quad b \rightarrow \infty,$$

и также $g(a+b) \sim Q((k+1)b)$. Если, к примеру, $Q(x) = x^{-\alpha} L(x)$ — функция с правильным изменением на бесконечности, то $Q((k+1)b) \sim (k+1)^{-\alpha} Q(b)$ и (1) превращается в

$$\beta(kb, b) = T(b)(1 - (k+1)^{-\alpha})(1 + o(1)).$$

В более общей ситуации предположим, что для любого фиксированного $k > 0$

$$\limsup_{b \rightarrow \infty} \frac{Q((k+1)b)}{Q(b)} = C(k) < 1.$$

Для этого, очевидно, достаточно потребовать, чтобы

$$\limsup_{b \rightarrow \infty} \frac{T((k+1)b)}{T(b)} < 1. \quad (10)$$

Ясно, что это требование выполняется для функций с правильным изменением на бесконечности и, тем более, для функций, убывающих еще быстрее. При выполнении (10) имеем

$$Q(b) - g(a+b, a) \geq Q(b)(1 - C(k))$$

и, следовательно, главный член асимптотики функции $Q(b)$ не уничтожается вычитанием главного члена асимптотики $g(a+b, a)$. Кроме того, заметим, что

$$g_1((k+1)b, kb) = g_1((k+1)b)(1 + o(1)).$$

Действительно,

$$g_1(a+b, a) = g_1(a+b) + \int_{-\infty}^{+0} T(a+b-y) d(\mathbf{P}(\chi_{-a} < y) - G(y)),$$

и последний интеграл есть $o(1)g_1(a+b)$, поскольку в противном случае, как и при доказательстве леммы 1, приходим к противоречию вследствие соотношений

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{T(a+b-y)}{T(a+b)} d(\mathbf{P}(\chi_{-a} < y) - G(y)) \rightarrow 0, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{T(a+b-y)}{T(a+b)} dG(y) \rightarrow 1$$

при $a + b \rightarrow \infty$, которые, в свою очередь, являются следствиями субэкспоненциальности функции T . Поэтому (1) превращается в

$$\begin{aligned}\beta(kb, b) &= \frac{T(b)(1 + o(1)) - g_1((k+1)b)(1 + o(1))}{1 - g_1((k+1)b)(1 + o(1))} \left(1 + o(g_1((k+1)b))\right) \\ &= T(b) - g_1((k+1)b) + o(T(b)).\end{aligned}\quad (11)$$

Вычислим это выражение, используя (8). Имеем

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \int_{-\infty}^{+0} T(t-v) dG(v) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+0} \int_{t-v}^{\infty} \bar{F}(u) du dG(v) \\ &= \frac{1}{m} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) \int_{t-u}^{+0} dG(v) du = \frac{1}{m} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du - \frac{1}{m} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) G(t-u) du.\end{aligned}$$

Сделав замену переменных $y = u - t$ во втором интеграле, получим

$$g_1(t) = \frac{1}{m} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du - \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \bar{F}(y+t) G(-y) dy.$$

Подставляя найденное представление для $g_1(a+b)$ в (11), получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 $a = kb$, где k не зависит от b , $1 - I \in \mathcal{S}$, и пусть выполнено условие (10). Тогда при $b \rightarrow \infty$

$$\beta(a, b) = \frac{1}{m} \int_b^{a+b} \bar{F}(u) du + \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \bar{F}(y+a+b) G(-y) dy + o(I(b)). \quad (12)$$

Далее рассмотрим ситуацию, когда скачки случайного блуждания удовлетворяют одностороннему условию Крамера. Введем следующие два условия.

(C₁) $\gamma = \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda X_1} < \infty\} > 0$.

Обозначим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda X_1}$. Условие (C₁) гарантирует существование этой функции в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \lambda < \gamma$.

(C₂) Существует число q , $0 < q \leq \gamma$, такое, что

$$\varphi(q) = \mathbf{E} e^{q X_1} = 1, \quad \mathbf{E} X_1 e^{q X_1} = \varphi'(q) < \infty.$$

Пусть

$$\nu^+ = \inf\{n \geq 1: S_n > 0\}$$

— номер первой положительной суммы; мы здесь полагаем, что $\inf \emptyset = \infty$. На множестве $\{\nu^+ < \infty\}$ определим $\chi^+ = S_{\nu^+}$. Обозначим

$$c = \frac{\mathbf{P}(S=0)}{q \mathbf{E}(\chi^+ \exp\{q\chi^+\}; \nu^+ < \infty)}, \quad d = \frac{1}{|\mathbf{E} \chi_0|} \int_{-\infty}^0 e^{qy} \mathbf{P}(\chi_0 < y) dy.$$

Здесь $c < 1$ (см. [13, гл. 12, §7]) и, очевидно, $d < 1$. Пусть также

$$d(a) = \int_{-\infty}^{+0} e^{qy} \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy).$$

Нетрудно видеть, что $d = \lim_{a \rightarrow \infty} d(a)$.

Следствие 2. Пусть $\mathbf{E} X_1 < 0$, распределение X_1 не является арифметическим и выполнены условия (C₁), (C₂). Тогда для любого $a \geq 0$ при $b \rightarrow \infty$

$$\beta(a, b) = ce^{-qb}(1 - d(a)e^{-qa}) + o(e^{-qb}).$$

Доказательство. В условиях следствия 2 вновь выполнено (6), однако здесь

$$T(x) = ce^{-qx} \quad (13)$$

(см., например, [13, гл. 12, §7]). Различные выражения для константы c приведены там же. Вычисляем

$$g_1(t, a) = c \int_{-\infty}^{+0} e^{-q(t-y)} \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy) = ce^{-qt} d(a),$$

$$g_1(t) = c \int_{-\infty}^0 e^{-q(t-y)} dG(y) = cde^{-qt}$$

и подставляем в (1) полученные выражения при $t = a + b$:

$$\begin{aligned} \beta(a, b) &= \frac{ce^{-qb}(1 + o(1)) - cd(a)e^{-q(a+b)}(1 + o(1))}{1 - cde^{-q(a+b)}(1 + o(1))} (1 + o(e^{-q(a+b)})) \\ &= ce^{-qb}(1 - d(a)e^{-qa}) + o(e^{-qb}). \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

Близкий результат об асимптотике вероятности разорения при выполнении одно-стороннего условия Крамера содержится также в [8]; он получен с помощью факторизационного метода при дополнительном предположении о наличии абсолютно непрерывной компоненты у распределения X_1 .

Известно, что при выполнении условия (C_1) главный член асимптотики распределения случайной величины S будет отличаться от (13), если не выполнено (C_2) . Рассмотрим одну из таких ситуаций. Следуя [14], предварительно введем класс распределений $S(\gamma)$, $\gamma > 0$. По определению, функция распределения $F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$ принадлежит $S(\gamma)$, если выполнены следующие три условия:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x+y)/\bar{F}(x) = e^{-\gamma y}$ для любого y ;
- 2) $\delta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} dF(x) < \infty$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_1 + X_2 \geq x)/\mathbf{P}(X_1 \geq x) = 2\delta$.

В [14] установлен следующий результат. Если в условиях теоремы 1 выполнено условие (C_1) , в котором $\gamma < \infty$, $\varphi(\gamma) < 1$, и $F \in S(\gamma)$, то имеет место соотношение (6), в котором $T(x) = c_1 \bar{F}(x)$ при некоторой постоянной $c_1 \in (0, \infty)$. Известно также [15], что

$$c_1 = \frac{\mathbf{E} \exp\{\gamma S\}}{1 - \varphi(\gamma)}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено условие (C_1) , в котором $\gamma < \infty$, $\varphi(\gamma) < 1$, и $F \in S(\gamma)$. Тогда для любого $a \geq 0$ при $b \rightarrow \infty$

$$\beta(a, b) = T(b) - g_1(a + b, a) + o(T(b)), \quad (14)$$

где $T(b) = c_1 \bar{F}(b)$.

Здесь нетрудно уточнить, как соотносятся между собой главные члены асимптотики величин $T(b)$ и $g_1(a + b, a)$. Если число a постоянно, то

$$\frac{g_1(a + b, a)}{T(a + b)} = \frac{\int_{-\infty}^{+0} \frac{\bar{F}(a + b - y)}{\bar{F}(a + b)} \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy)}{\int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma y} \mathbf{P}(\chi_{-a} \in dy)} < 1,$$

а если одновременно $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$, то

$$\frac{g_1(a + b, a)}{T(a + b)} \rightarrow \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma y} dG(y) < 1.$$

Можно отметить еще один случай, когда выполнено условие (C_1) , а условие (C_2) не выполнено по следующей причине. Пусть существует число $q > 0$ такое, что $\varphi(q) = 1$, однако $\varphi'(q) = \infty$. В этом случае, очевидно, $\gamma = q$. Обозначим

$$H(x) = \int_x^{\infty} e^{\gamma y} dF(y), \quad m(x) = \int_0^x H(y) dy.$$

В [16] установлено, что в этих условиях имеет место асимптотическое представление (6) с функцией $T(x) = c_2 e^{-\gamma x} / m(x)$, если $H(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, где $\alpha \in (1/2, 1]$. Здесь c_2 — константа, которая определена в [16]. Тем самым, получаем еще одно следствие.

Следствие 4. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено условие (C_1) , при этом $\varphi(\gamma) = 1$ и $\varphi'(\gamma) = \infty$. Предположим дополнительно, что функция $H(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (1/2, 1]$. Тогда для любого $a \geq 0$ при $b \rightarrow \infty$ справедливо представление (14), в котором $T(b) = c_2 e^{-\gamma b} / m(b)$.

З а м е ч а н и е. В приведенных выше утверждениях используется функция распределения $\mathbf{P}(\chi_{-a} < y)$. Для ее нахождения можно воспользоваться следующими известными соотношениями для преобразований Лапласа–Стилтьеса этого распределения (см. [13], [17], [18]):

$$1 - \mathbf{E} \exp\{\lambda \chi_0\} = R_-(1, \lambda), \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$\mathbf{E} \left(z^{\nu-a} \exp\{\lambda \chi_{-a}\} \right) = R_-(z, \lambda) \left[R_-^{-1}(z, \lambda) \right]^{(-\infty, -a]}, \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad a > 0. \quad (15)$$

Здесь $R_-(z, \lambda)$ — отрицательная компонента факторизации

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_-(z, \lambda)R_+(z, \lambda),$$

подробные сведения о которой содержатся, например, в [13, гл. 12]. В (15) использовано также обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dV(x) \right]^A = \int_A e^{\lambda x} dV(x), \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dV(x)| < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Если $|z| < 1$, то $R_-^{-1}(z, \lambda)$, как функция переменной λ , является преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции ограниченной вариации, поэтому применение к ней оператора $[\cdot]^A$ оправдано. Левая часть равенства (15) существует при $z = 1$ и непрерывна в этой точке, поэтому

$$\mathbf{E} \exp\{\lambda \chi_{-a}\} = \lim_{z \rightarrow 1} R_-(z, \lambda) \left[R_-^{-1}(z, \lambda) \right]^{(-\infty, -a]}.$$

При $\lambda = q$ это соотношение задает величину $d(a)$, используемую в следствии 2.

Нахождение компоненты факторизации $R_-(z, \lambda)$ в явном виде доступно для широкого класса случайных блужданий. Он включает, в частности, ситуации, когда $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_1\}; X_1 < 0)$ является рациональной функцией. При этом $R_-(z, \lambda)$ также будет рациональной функцией переменной λ и, следовательно, легко обращается после разложения на простые дроби. Подробные сведения об этом также можно найти в [13, гл. 12].

В заключение отметим, что вычисления в теореме 1 и ее следствиях существенно упростятся, если

$$\mathbf{P}(X_1 < y) = \alpha \exp\{\beta y\}, \quad y \leq 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{P}(\chi_{-a} < y) = G(y) = \exp\{\beta y\}, \quad y \leq 0, \quad d = \frac{\beta}{\beta + q}.$$

Аналоги приведенных выше утверждений для случайных блужданий с арифметическим распределением скачков получаются тем же способом с очевидными изменениями.

Автор благодарен А. А. Боровкову, а также анонимному рецензенту за ряд полезных замечаний по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takács L.* On the classical ruin problems. — J. Amer. Statist. Assoc., 1969, v. 64, № 327, p. 889–906.
2. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960, 328 с.
3. *Page E. S.* Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, № 1, p. 100–115.
4. *Нагаев С. В.* Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 1, с. 140–148.
5. *Лотов В. И.* Об аппроксимации вероятности разорения с экспоненциальной точностью. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 61–65.
6. *Лотов В. И.* О случайных блужданиях в полосе. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 160–165.
7. *Siegmund D.* Sequential Analysis. New York: Springer, 1985, 272 p.
8. *Лотов В. И.* Асимптотические разложения в последовательном критерии отношения правдоподобия. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 62–72.
9. *Лотов В. И.* О точности аппроксимации в последовательном критерии Вальда. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 295–304.
10. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. — Сиб. матем. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.
11. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 475–485.
12. *Лотов В. И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. — Сиб. матем. журн., 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.
13. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 656 с.
14. *Bertoin J., Doney R. A.* Some asymptotic results for transient random walks. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, № 1, p. 201–226.
15. *Korshunov D.* On distribution tail of the maximum of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 72, № 1, p. 97–103.
16. *Коршунов Д. А.* Критический случай теоремы Крамера–Лундберга об асимптотике распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом. — Сиб. матем. журн., 2005, т. 46, № 6, с. 1335–1340.
17. *Kemperman J. H. B.* A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary. — Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, № 4, p. 1168–1193.
18. *Лотов В. И.* Об одном подходе в двуграничных задачах. — Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989, с. 117–121.

Поступила в редакцию
18.IV.2013

© 2014 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

**ВЕРОЯТНОСТИ СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
УБЫВАЮЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ. II¹⁾**

В заметке изучаются вероятности больших уклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, функция распределения которых на бесконечности имеет экспоненциально убывающий хвост.

* Санкт-Петербургская химико-фармацевтическая академия, С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ 638.2008.1) и РФФИ (грант № 10-01-00242-а).