Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Вероятности сверхбольших отклонений сумм независимых случайных величин с экспоненциально убывающим распределением. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 1, 187–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:36:18

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takács L.* On the classical ruin problems. — J. Amer. Statist. Assoc., 1969, v. 64, № 327, p. 889–906.
2. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960, 328 с.
3. *Page E. S.* Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, № 1, p. 100–115.
4. *Нагаев С. В.* Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 1, с. 140–148.
5. *Лотов В. И.* Об аппроксимации вероятности разорения с экспоненциальной точностью. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 61–65.
6. *Лотов В. И.* О случайных блужданиях в полосе. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 160–165.
7. *Siegmund D.* Sequential Analysis. New York: Springer, 1985, 272 p.
8. *Лотов В. И.* Асимптотические разложения в последовательном критерии отношения правдоподобия. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 62–72.
9. *Лотов В. И.* О точности аппроксимации в последовательном критерии Вальда. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 295–304.
10. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. — Сиб. матем. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.
11. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 475–485.
12. *Лотов В. И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. — Сиб. матем. журн., 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.
13. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 656 с.
14. *Bertoin J., Doney R. A.* Some asymptotic results for transient random walks. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, № 1, p. 201–226.
15. *Korshunov D.* On distribution tail of the maximum of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 72, № 1, p. 97–103.
16. *Коршунов Д. А.* Критический случай теоремы Крамера–Лундберга об асимптотике распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом. — Сиб. матем. журн., 2005, т. 46, № 6, с. 1335–1340.
17. *Kemperman J. H. B.* A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary. — Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, № 4, p. 1168–1193.
18. *Лотов В. И.* Об одном подходе в двуграничных задачах. — Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989, с. 117–121.

Поступила в редакцию
18.IV.2013

© 2014 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

**ВЕРОЯТНОСТИ СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
УБЫВАЮЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ. II¹⁾**

В заметке изучаются вероятности больших уклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, функция распределения которых на бесконечности имеет экспоненциально убывающий хвост.

* Санкт-Петербургская химико-фармацевтическая академия, С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ 638.2008.1) и РФФИ (грант № 10-01-00242-а).

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, преобразование Крамера, большие отклонения, сверхбольшие отклонения.

1. Введение. Рассмотрим последовательность $\{X_i\}_{i \geq 1}$ независимых копий случайной величины X с общим распределением F таким, что при некоторых $\lambda_- \leq 0 < \lambda < \infty$

$$L(h) = \mathbf{E} e^{hX} < \infty, \quad \lambda_- < h < \lambda; \quad \lim_{h \uparrow \lambda} L(h) = \infty. \quad (1.1)$$

Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Нас интересует асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(S_n \geq x)$ при $x = x(n)$ и $n \rightarrow \infty$. Случай $x/n = O(1)$ изучен достаточно хорошо (см., например, [1]–[5]), и полученные результаты являются окончательными или близки к таковым. В настоящей работе рассматривается, в основном, область так называемых сверхбольших отклонений, когда $x/n \rightarrow \infty$. Тематике сверхбольших отклонений посвящены, в частности, работы [6]–[12]. Приведем два наиболее завершенных результата, предполагающих, что распределение $F(x)$ абсолютно непрерывно на полуоси и на всей оси соответственно. Первый из них содержится в [10, теорема 7.3(ii)].

Для $\lambda_- < h < \lambda$ и $\alpha > 0$ положим

$$m(h) = \left(\ln L(h) \right)', \quad \sigma^2(h) = m'(h), \quad Q(h, \alpha) = h\alpha - \ln L(h). \quad (1.2)$$

Теорема 1. Пусть

$$1 - F(x) = e^{-\lambda x} x^{\rho-1} l(x), \quad x \geq x_0 > 0, \quad (1.3)$$

где постоянная ρ положительна, функция $l(x)$ дифференцируема при всех $x \geq x_0$ и $l'(x) = o(l(x)/x)$, $x \rightarrow \infty$. Тогда распределение суммы S_n абсолютно непрерывно в области $x \geq x_0 n$ с плотностью $f_n(x)$, причем

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda(x/n)} \left(1 + o(1) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

равномерно по $x \geq \mu n$ при любом фиксированном $\mu > \max(x_0, \alpha_-)$.

Здесь $\alpha_- = \lim_{h \downarrow \lambda_-} m(h)$, $h = h(x/n)$, — единственное решение уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n} \quad (1.5)$$

и (см. (1.2)) $\Lambda(x/n) = Q(h, x/n)$.

Заметим, что $\alpha_- \leq \mathbf{E} X < \infty$, а функция $\Lambda(\alpha) = \sup_h (h\alpha - \ln L(h))$ является преобразованием Лежандра над $\ln L(h)$.

Обозначим

$$V(x) = \int_0^x e^{\lambda x} dF(x), \quad x \geq 0. \quad (1.6)$$

Теорема 2 (см. [11]). Предположим, что существуют постоянные $b > 1$, $c_1 > 1$, $c_2 > 1$ и $x_0 > 0$ такие, что при каждом $x \geq x_0$

$$c_1 V(x) \leq V(bx) \leq c_2 V(x). \quad (1.7)$$

Если распределение $F(x)$ абсолютно непрерывно с ограниченной плотностью $p(x)$ такой, что при некоторой постоянной $C > 0$

$$p(x) \leq C \frac{e^{-\lambda x} V(x)}{x}, \quad x \geq x_0, \quad (1.8)$$

то равномерно по $x \geq \mu n$ при любом фиксированном $\mu > \mathbf{E} X$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda(x/n)} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h) n^{-j} + O(n^{-s}) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где $h = h(x/n)$ удовлетворяет уравнению (1.5), $s \geq 1$ — целое, а $\sup_{x \geq \mu n} |a_j(h)| < \infty$.

Напомним (см. [11, замечание 3]), что теорема 2 наиболее информативна в случае, когда $x > Kn$, где положительная постоянная K достаточно велика.

Заметим, что из условия (1.3) вытекают соотношения

$$V(x) \sim \frac{\lambda x^\rho l(x)}{\rho}, \quad p(x) \sim \frac{\rho e^{-\lambda x} V(x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

т.е. условия (1.7) и (1.8) слабее, нежели (1.3).

Пользуясь случаем, отметим, что (1.8) равносильно соотношению

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xV'(x)}{V(x)} < \infty$$

или тому, что функция $V(x)/x^\alpha$ при некотором положительном α не возрастает на бесконечности. Отсюда, в частности, следует правое неравенство в (1.7) (см. также [11, замечание 1]).

Основная цель настоящей работы состоит в получении результатов, аккумулирующих достоинства теорем 1 и 2.

2. Результаты.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (1.7) и функция распределения $F(x)$ при $x \geq x_0$ абсолютно непрерывна с плотностью $p(x)$, удовлетворяющей условию (1.8). Тогда распределение суммы S_n абсолютно непрерывно в области $x \geq x_0 n$ с плотностью $f_n(x)$ такой, что при любом целом $s \geq 1$ равномерно по $x \geq nx_0$ и $h \in [\lambda_0, \lambda)$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-nQ(h, x/n)} \left(\phi(\beta) + \sum_{\nu=1}^{s-1} q_{\nu h}(\beta) n^{-\nu/2} + O(n^{-s/2}) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda)$ фиксировано, $\beta = (x - nm(h))/(\sigma(h)\sqrt{n})$, $\phi(\cdot)$ — плотность стандартного нормального распределения, $q_{\nu h}(y)$ — некоторые функции, равномерно ограниченные по $y \in \mathbf{R}$ и $h \in [\lambda_0, \lambda)$.

В частности,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-nQ(h, x/n)} \left(\phi(\beta) + O\left(\frac{|\phi'''(\beta)|}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Явные формулы для функций $q_{\nu h}(y)$ можно найти в [14, гл. VI, (1.10)].

Отметим, что основное отличие теоремы 3 от теоремы 2 — это отсутствие предположения, что распределение $F(x)$ абсолютно непрерывно на всей оси, а от теоремы 1 — ослабление условия (1.3).

Заметим, что если h является решением уравнения (1.5), то $\beta = 0$ и $Q(h, x/n) = \Lambda(x/n)$; кроме того, функции $q_{\nu h}(0)$ при нечетных ν обращаются в нуль, а при четных ν совпадают с $a_{\nu/2}(h)/\sqrt{2\pi}$ (см. (1.9) и [9, замечание 2]).

Из сказанного очевидным образом следует (1.9) при $x \geq \mu n (\mu > \max(x_0, \mathbf{E} X))$, а также теорема 1 с оценкой ошибки в (1.4) порядка $1/n$. Кроме того, соотношение (2.1) позволяет для нахождения соответствующей асимптотики использовать приближенное решение уравнения (1.5), что намного удобнее при практических вычислениях (само собой разумеется, что для получения наиболее содержательных результатов в теореме 3 следует выбирать параметр h таким образом, чтобы β было мало).

Из (2.1) без особых затруднений можно получить нижеследующее утверждение.

Следствие 1. В условиях и обозначениях теоремы 3

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x \leq S_n < x + y) &= e^{-nQ(h, x/n)} \frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \\ &\times \left(e^{-\beta^2/2} + O\left(\frac{|\beta|(1 + \beta^2)e^{-\beta^2/2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

равномерно по $x \geq nx_0$, $y > 0$ и $h \in [\lambda_0, \lambda)$, где $\lambda_0 \in (0, \lambda)$ фиксировано.

В частности, если выполнено условие (1.5), то

$$\mathbf{P}(x \leq S_n < x + y) = e^{-n\Lambda(x/n)} \frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по $y > 0$ и $x \geq \mu n$, где $\mu > \max(x_0, \mathbf{E}X)$ фиксировано.

Следствие 1 уточняет соотношение (1.5) из [11].

В области сверхбольших уклонений имеет место еще одно утверждение, аналогичное (2.2).

Теорема 4. Пусть ε_n — произвольная положительная последовательность, стремящаяся к нулю. Если выполнено условие (1.7) и

$$\text{функция } V(x) \text{ выпукла или вогнута на } [x_0, \infty), \quad (2.3)$$

то равномерно по $x, y > 0$ и h таким, что $\delta = \lambda - h \in (0, \varepsilon_n)$,

$$\mathbf{P}(x \leq S_n < x + y) = \frac{e^{-nQ(h, x/n)}}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} \left(e^{-\beta^2/2} + O(r)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Здесь $r = 1/\sqrt{n} + \delta \min(1, y) + (cV(1/\delta))^{-n}/(y\delta)$, c — некоторая достаточно малая положительная постоянная, β такое, как в теореме 3.

Следствие 2. Пусть κ_n — произвольная положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности. Если выполнены условия (1.7) и (2.3), то равномерно по $x \geq n\kappa_n$ и $y > 0$

$$\mathbf{P}(x \leq S_n < x + y) = \frac{e^{-n\Lambda(x/n)}}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} \left(1 + O(r)\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где h удовлетворяет уравнению (1.5), $r = \min(1, y)n/x + 1/\sqrt{n} + (n/x)^{an}/y$, a — некоторая положительная постоянная.

В частности, равномерно по $x \geq n\kappa_n$

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = \frac{e^{-n\Lambda(x/n)}}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{n}{x} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Доказательство теоремы 3. При доказательстве теоремы 3 используются подходы из [9]–[11].

Пусть случайная величина $X(h)$, $\lambda_- < h < \lambda$, имеет распределение $F_h(dx) = e^{hx} F(dx)/L(h)$, построенное по F с помощью преобразования Крамера. Напомним, что $m(h) = \mathbf{E}X(h)$, $\sigma^2(h) = \mathbf{D}X(h)$ (см. (1.1), (1.2)). Обозначим через $X_j(h)$, $j \geq 1$, независимые копии случайной величины $X(h)$. Положим $S_n(h) = X_1(h) + \dots + X_n(h)$.

В условиях теоремы 3 распределение суммы $S_n(h)$ при $x \geq nx_0$ является абсолютно непрерывным с плотностью распределения $f_{h,n}(\cdot)$, связанной с плотностью $f_n(\cdot)$ (см. (1.4)) равенством

$$f_n(x) = L^n(h) e^{-hx} f_{h,n}(x), \quad x \geq nx_0, \quad \lambda_- < h < \lambda. \quad (3.1)$$

Положим

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbf{P}(X(h) < y \mid X(h) \geq x_0), & p &= p(h) = \mathbf{P}(X(h) \geq x_0), \\ H(y) &= \mathbf{P}(X(h) < y \mid X(h) < x_0), & q &= q(h) = 1 - p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Принимая во внимание условие (1.8), заключаем, что распределение $G^{*m}(y)$, $m = 1, 2, \dots$, абсолютно непрерывно с плотностью распределения $g_m(y)$, равной нулю при $y < mx_0$ и, аналогично [9, (3.4)], такой, что

$$g_m(y) = \frac{e^{hy} p^{*m}(y)}{\hat{p}^m}, \quad y \geq mx_0, \quad \lambda_- < h < \lambda, \quad (3.3)$$

где $\hat{p} = pL(h) = \int_{x_0}^{\infty} e^{hy} p(y) dy$.

Пусть выполняются условия (1.7) и (1.8).

В лемме 2 из [11] показано, что при некотором C , не зависящем от y ,

$$p^{*m}(y) \leq C \frac{e^{-\lambda y} V^m(y)}{y}, \quad y \geq x_0. \quad (3.4)$$

Подставляя оценку (3.4) в равенство (3.3) и рассуждая как при доказательстве оценки (3.7) в [9], с учетом [11, (2.1) и замечание 1] найдем при каждом $m \geq 1$

$$\sup_y g_m(y) \leq C_m(\delta + \delta^{m\alpha}), \quad \delta = \lambda - h, \quad \lambda_0 \leq h < \lambda, \quad (3.5)$$

где положительная постоянная α заимствована из [11, (1.7)], а C_m не зависит от h .

Заметим, что в (3.5) критическим является случай $\delta \in (0, \delta_0)$, где δ_0 достаточно мало, и что (см. (3.2))

$$\sup_{h \in [\lambda_0, \lambda]} q(h) < 1; \quad 0 < c \leq qV\left(\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{1}{c} < \infty, \quad 0 < \delta \leq \delta_0, \quad (3.6)$$

где c не зависит от δ .

Пусть $n \geq m \geq 1/\alpha$. Тогда

$$\sup_y g_m(y) \leq 2C_m\delta, \quad \lambda_0 \leq h < \lambda. \quad (3.7)$$

Из тождества $F_h(y) = pG(y) + qH(y)$ следует, что

$$f_{h,n}(y) = \left(\sum_{k=1}^{2m-1} + \sum_{k=2m}^n \right) C_n^k p^k q^{n-k} u_{n,k}(y) = f_1(y) + f_2(y), \quad y \geq x_0 n, \quad (3.8)$$

где $u_{n,k}(y)$ — плотность распределения $G^{*k} * H^{*(n-k)}(y)$.

Согласно (3.5) и (3.6) (см. также [11, (1.8)]), при некоторых положительных постоянных C и ε , не зависящих от n и h ,

$$\sup_{y \geq x_0 n} f_1(y) \leq C\delta e^{-\varepsilon n}, \quad \lambda_0 \leq h < \lambda. \quad (3.9)$$

По формуле обращения для плотностей

$$\begin{aligned} 2\pi f_2(y) &= \left(\int_{|t| \leq a\delta} + \int_{|t| > a\delta} \right) e^{-ity} \left(f_h^n(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} C_n^k p^k q^{n-k} \widehat{G}^k(t) \widehat{H}^{n-k}(t) \right) dt \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где a — некоторая положительная постоянная, выбором которой распорядимся позже (см. (3.19)), $f_h(t)$, $\widehat{G}(t)$ и $\widehat{H}(t)$ — характеристические функции случайных величин с распределениями F_h , G и H соответственно.

Имеем

$$|I_2| \leq p^{2m} \sum_{k=2m}^n C_n^k q^{n-k} \left(p \sup_{|t| > a\delta} |\widehat{G}(t)| \right)^{k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{G}(t)|^{2m} dt. \quad (3.11)$$

При этом в силу (3.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{G}(t)|^{2m} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_m^2(y) dy \leq 4\pi C_m\delta, \quad \delta = \lambda - h, \quad \lambda_0 \leq h < \lambda. \quad (3.12)$$

Кроме того, из [9, лемма 1] и соотношения, аналогичного (2.3) из [11], следует, что при любом $h \in [\lambda_0, \lambda)$

$$|\widehat{G}(t)|^m \leq 1 - \frac{c_3 t^2}{\delta^2(1 + |t|/\delta)^2} \leq e^{-m\eta}, \quad |t| \geq a\delta, \quad (3.13)$$

где положительные постоянные c_3 и η не зависят от h .

Из (3.11)–(3.13) при некоторых положительных постоянных A и ε , не зависящих от n и $h \in [\lambda_0, \lambda)$, получим

$$|I_2| \leq A\delta e^{m\eta} \sum_{k=2m}^n C_n^k q^{n-k} (pe^{-\eta})^k \leq A\delta e^{m\eta} (q + pe^{-\eta})^n \leq A\delta e^{-\varepsilon n}. \quad (3.14)$$

Далее (см. (3.10)),

$$I_1 = \int_{|t| \leq a\delta} e^{-ity} f_h^n(t) dt + \theta\delta \sum_{k=0}^{2m-1} C_n^k p^k q^{n-k}, \quad |\theta| \leq 2a. \quad (3.15)$$

Положим (см. обозначения в начале этого пункта)

$$\hat{f}_h(t) = \mathbf{E} \exp \left(it \frac{S_n(h) - nm(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}} \right), \quad \beta(u) = \frac{u - nm(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}. \quad (3.16)$$

Аналогично [9, (3.9)] (см. также [11, лемма 1]) для любого целого $s \geq 3$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{|t| \leq a\delta} e^{-ity} f_h^n(t) dt &= \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \int_{|t| \leq a\delta\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-it\beta(y)} \hat{f}_h(t) dt \\ &= \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \int_{|t| \leq a\delta\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-it\beta(y)} \left(\hat{f}_h(t) - e^{-t^2/2} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu h}(it) n^{-\nu/2} \right) \right) dt \\ &\quad + \frac{2\pi}{\sigma(h)\sqrt{n}} \left(\phi(\beta(y)) + \sum_{\nu=1}^{s-3} q_{\nu h}(\beta(y)) n^{-\nu/2} \right) + \theta\delta e^{-\varepsilon n}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\lambda_0 \leq h < \lambda$, $|\theta| \leq A$, постоянные $A, \varepsilon > 0$ не зависят от n и h ,

$$q_{\nu h}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} e^{-t^2/2} P_{\nu h}(it) dt.$$

Учитывая (см. [14, гл. VI, лемма 4]), что

$$\left| \hat{f}_h(t) - e^{-t^2/2} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu h}(it) n^{-\nu/2} \right) \right| \leq c(s) \mu_s n^{-(s-2)/2} (|t|^s + |t|^{3(s-1)}) e^{-t^2/12} \quad (3.18)$$

в интервале $|t| < \mu_s^{-1/(s-2)} \sqrt{n}$, где $\mu_s = \mathbf{E}|X(h) - \mathbf{E}X(h)|^s / \sigma^s(h)$, и применяя лемму 1 из [11], получим с некоторыми постоянными a и A

$$\mu_s^{-1/(s-2)} \geq a\delta\sigma(h), \quad \mu_s \leq A, \quad \lambda_0 \leq h < \lambda. \quad (3.19)$$

Собирая соотношения (3.8)–(3.10) и (3.14)–(3.19), видим, что

$$f_{h,n}(y) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \left(\phi(\beta(y)) + \sum_{\nu=1}^{s-3} q_{\nu h}(\beta(y)) n^{-\nu/2} + O(n^{-(s-2)/2}) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

равномерно по $y \geq x_0 n$ и h , $\lambda_0 \leq h < \lambda$.

Первое утверждение теоремы 3 следует из (3.1) и (3.20). Положим в нем $s = 2$. Имея в виду лемму 1 из [11] и равенство

$$q_{1h}(y) = \phi'''(y) \frac{\mathbf{E}(X(h) - \mathbf{E}X(h))^3}{6\sigma^3(h)},$$

придем к (2.1).

Следствие 1 несложно получить, интегрируя равенство (2.1) в нужных пределах (см. соотношения (2.9), (2.10) из [13], где можно найти детальные выкладки).

4. Доказательство теоремы 4. Дополнительно к (3.16) обозначим

$$\tau = h\sigma(h)\sqrt{n}, \quad \delta_\varepsilon(h) = \int_0^{1/\varepsilon} |\widehat{f}_h(t) - e^{-t^2/2}| dt \quad (\varepsilon > 0).$$

Лемма 1. При любых положительных x, y, h и γ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x \leq S_n < x + y) &= L^n(h) e^{-hx} \frac{1 - e^{-hy}}{\tau\sqrt{2\pi}} \\ &\times \left(e^{-\beta^2/2} + \theta \left(\frac{|\beta|e^{-\beta^2/2}}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + \rho_\gamma(h, y) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $|\theta|$ не превосходит некоторой абсолютной постоянной, $\beta = \beta(x)$ и

$$\rho_\gamma(h, y) = \delta_\gamma(h) + (1 + \delta_\gamma(h)) \left(1 + \frac{1}{hy} \right) \tau\gamma. \quad (4.2)$$

Равенство (4.1) является следствием леммы 1 из [5] и соотношений (2.7), (2.9) и (2.10) из [13].

Положим $\gamma = (T\delta\sigma(h)\sqrt{n})^{-1}$, где T достаточно велико и будет выбрано позже. В обозначениях леммы 1 при $\nu = \mu_3/\sqrt{n}$ (см. обозначения после (3.18))

$$\delta_\gamma(h) \leq \delta_\nu(h) + \int_{1/\nu}^\infty e^{-t^2/2} dt + \int_{1/\nu}^{1/\gamma} \left| f_h \left(\frac{t}{\sigma(h)\sqrt{n}} \right) \right|^n dt. \quad (4.3)$$

Из (3.18), (3.19) при $s = 3$ и [11, лемма 1] следует

$$\delta_\nu(h) + \int_{1/\nu}^\infty e^{-t^2/2} dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty; \quad (4.4)$$

$$\int_{1/\nu}^{1/\gamma} \left| f_h \left(\frac{t}{\sigma(h)\sqrt{n}} \right) \right|^n dt \leq \delta\sigma(h)\sqrt{n} \int_a^T |f_h(\delta v)|^n dv. \quad (4.5)$$

Лемма 2. Если выполнено условие (1.7), то при любом $h \in (0, \lambda)$

$$1 - |f_h(\delta v)| \geq c_4 e^{-c_5/v} \frac{V(1/(v\delta))}{L(h)}, \quad 0 < v \leq \frac{1}{\delta b x_0}, \quad (4.6)$$

где $\delta = \lambda - h$, а положительные постоянные c_4 и c_5 зависят лишь от b, c_1 и c_2 .

Доказательство леммы 2. Положим $Y = \delta X(h)$. Имеем

$$1 - |f_h(\delta v)| = \mathbf{E}(1 - \cos(vY - a)) \geq \int_0^{a+(2-\varepsilon)\pi} 2 \sin^2 \frac{y-a}{2} dF_Y\left(\frac{y}{v}\right) \geq c_0(I_1 + I_2), \quad (4.7)$$

где $a = a(v) \in [0, 2\pi)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $c_0 = 2 \sin^2(\varepsilon\pi/2)$, $F_Y(y)$ — функция распределения Y ,

$$I_1 = \int_0^{\max(0, a-\varepsilon\pi)} dF_Y\left(\frac{y}{v}\right), \quad I_2 = \int_{a+\varepsilon\pi}^{a+(2-\varepsilon)\pi} dF_Y\left(\frac{y}{v}\right).$$

Пусть $\varepsilon = (2\pi - 1)/(2\pi b + 1)$. Если $a \geq \varepsilon\pi + b^{-1}$, то

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{1}{L(h)} \int_0^{(v\delta b)^{-1}} e^{-\delta u} dV(u) \geq e^{-(bv)^{-1}} \frac{V(1/(b\delta v))}{L(h)} \\ &\geq e^{-(bv)^{-1}} c_2^{-1} \frac{V(1/(v\delta))}{L(h)}, \quad v \leq \frac{1}{b\delta x_0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если же $0 \leq a < \varepsilon\pi + b^{-1}$, то в силу выбора ε при $\tau = (2 - \varepsilon)\pi$ (заметим, что $\tau > 1$) и $v \leq \tau(b\delta x_0)^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \int_{2\varepsilon\pi+b^{-1}}^{(2-\varepsilon)\pi} dF_Y\left(\frac{y}{v}\right) \\ &= \frac{1}{L(h)} \int_{\tau/(bv\delta)}^{\tau/(v\delta)} e^{-\delta u} dV(u) \\ &\geq e^{-\tau/v} \frac{V(\tau/(v\delta))}{L(h)} \left(1 - \frac{V(\tau/(bv\delta))}{V(\tau/(v\delta))}\right) \\ &\geq e^{-\tau/v} \frac{V(1/(v\delta))}{L(h)} \left(1 - \frac{1}{c_1}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Оценка (4.6) вытекает из (4.7)–(4.9). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2, неравенства $|f_h(\delta v)| \leq \exp(-(1 - |f_h(\delta v)|))$ и [11, лемма 1 и (1.8)] следует, что при всех h , $0 < \lambda_0 \leq h < \lambda$, и любом достаточно большом K

$$\delta\sigma(h)\sqrt{n} \int_a^K |f_h(\delta v)|^n dv = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Лемма 3. Если выполнены условия (1.7) и (2.3), то при всех $v > 0$ и $h \in (0, \lambda)$

$$|f_h(\delta v)| \leq C \left(v^{-c} + \frac{1}{V(1/\delta)} \right),$$

где $\delta = \lambda - h$, a и C — некоторые положительные постоянные.

Доказательство леммы 3. Обозначим $t = v/\pi$. Так же, как при проверке леммы 2, при некотором $a = a(t) \in [0, 2]$ имеем

$$\begin{aligned} |f_h(\delta v)| &= |f_h(\delta\pi t)| = \mathbf{E} \cos(\pi t \delta X(h) - a\pi) \\ &= \frac{1}{L(h)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi t \delta x - a\pi) e^{hx} dF(x) \leq \frac{1}{L(h)} (A + B), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\tilde{x}} e^{hx} dF(x), \\ B &= \left| \int_{\tilde{x}}^{\infty} \cos(\pi t \delta x - a\pi) e^{-\delta x} dV(x) \right|. \end{aligned}$$

Пусть x_0 — постоянная из условия (2.3) и

$$m = \min \left\{ l \in \mathbf{N}, l \geq 1: 2l \geq x_0 \delta t + \frac{3}{2} - a \right\}, \quad \tilde{x} = \frac{2m - 3/2 + a}{\delta t}. \quad (4.12)$$

Из [11, (2.5)] следует

$$\frac{1}{L(h)} A \leq \frac{e(1 + V(\tilde{x}))}{V(1/\delta)}. \quad (4.13)$$

Положим

$$\mu_k(y) = V\left(\frac{y + 2k + a}{\delta t}\right) - V\left(\frac{y + 2k - 1 + a}{\delta t}\right), \quad k \geq m.$$

Тогда

$$B = \left| \int_{2m-3/2}^{\infty} \cos(\pi u) e^{-(u+a)/t} dV\left(\frac{u+a}{\delta t}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-a/t} \left| \sum_{k \geq m} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi y) e^{-(y+2k)/t} \left\{ dV \left(\frac{y+2k+a}{\delta t} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{1/t} dV \left(\frac{y+2k-1+a}{\delta t} \right) \right\} \right| \\
&\leq e^{1/2t} (I + (e^{1/t} - 1)J),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где

$$I = \sum_{k \geq m} e^{-2k/t} \int_{-1/2}^{1/2} |d\mu_k(y)|, \quad J = \sum_{k \geq m} e^{-2k/t} \mu_k \left(-\frac{1}{2} \right).$$

Лемма 4. Если $f(x)$ выпукла (вогнута) на $[x_0, \infty)$, то при любых $x_0 \leq a < b$ функция $\mu(u) = f(b+u) - f(a+u)$ не убывает (возрастает) на $[0, \infty)$.

Доказательство леммы 4. Линейная зависимость $y = f(a+s) + k_s(x-a-s)$, где $s \geq 0$ и $k_s = \mu(s)/(b-a)$, описывает уравнение хорды графика функции $f(x)$ на отрезке $[a+s, b+s]$. Поэтому, если функция $f(x)$ выпукла и $0 < s < b-a$, то

$$\begin{aligned}
f(b) &\leq f(a+s) + k_s(b-a-s) \leq f(a) + k_0s + k_s(b-a-s) \\
&= f(a) + k_0(b-a) + (k_s - k_0)(b-a-s) = f(b) + (k_s - k_0)(b-a-s),
\end{aligned}$$

откуда следует, что $k_s - k_0 \geq 0$. Таким образом, $\mu(u)$ не убывает на $[0, b-a)$. Если же $u \geq b-a$, разобьем интервал $[0, u]$ на непересекающиеся подынтервалы длины меньшей $b-a$ и повторим рассуждение для каждого подынтервала. Случай вогнутой $f(x)$ рассматривается аналогично. Лемма 4 доказана.

Условие (2.3) и лемма 4 позволяют заключить, что функции $\mu_k(y)$ монотонны на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Поэтому, если $\mu_k(y)$ не убывает, то $\mu_k(1/2) \leq \mu_k(3/2) = \mu_{k+1}(-1/2)$ и (см. (4.14))

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k \geq m} e^{-2k/t} \left(\mu_k \left(\frac{1}{2} \right) - \mu_k \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \\
&\leq \sum_{k \geq m} e^{-2k/t} \left(\mu_{k+1} \left(-\frac{1}{2} \right) - \mu_k \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \leq (e^{2/t} - 1)J;
\end{aligned} \tag{4.15}$$

если же $\mu_k(y)$ не возрастает, то

$$I \leq e^{(2-2m)/t} \mu_m \left(-\frac{1}{2} \right) - (e^{2/t} - 1)J. \tag{4.16}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
J &\leq e^{3/(2t)} \sum_{k \geq m} \int_{(2k+a-3/2)/(\delta t)}^{(2k+a-1/2)/(\delta t)} e^{-\delta u} dV(u) \\
&\leq e^{3/(2t)} \int_{(2m-3/2)/(\delta t)}^{\infty} e^{-\delta u} dV(u) \leq e^{3/(2t)} L(h).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Учитывая (см. (4.12)), что $\tilde{x} \leq 5x_0$ при $m \geq 2$ и $\tilde{x} \leq 5/(2\delta t)$ при $m = 1$, и имея в виду, что $\mu_m(-1/2) = V(\tilde{x} + 1/(\delta t)) - V(\tilde{x})$ и $\tilde{x}\delta t \geq 2m - 3/2 \geq 1/2$, из (4.11)–(4.17) и соотношений (1.7), (1.8) из [11] получим утверждение леммы 3.

Применяя лемму 3 при $K \leq v \leq T$, найдем

$$\int_K^T |f_h(\delta v)|^n dv \leq C^n \cdot 2^{n-1} \left(\frac{1}{nc-1} K^{1-nc} + TV^{-n} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right).$$

Отсюда при $K > (2C)^{1/c}$, $T = (V(1/\delta)/(2C+1))^n$ и достаточно малом δ получаем

$$\delta \sigma(h) \sqrt{n} \int_K^T |f_h(\delta v)|^n dv = O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \tag{4.18}$$

Теорема 4 вытекает из (4.1)–(4.5), (4.10) и (4.18).

Для проверки следствия 2 нужно воспользоваться теоремой 4 при $\beta = 0$, а также соотношением (1.8) из [11] и следующим элементарным фактом (см. также [5, см. (3.44)]):

$$\frac{1 - e^{-hy}}{h} = \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} (1 + O(\delta \min(1, y))), \quad 0 < \delta = \lambda - h \rightarrow 0.$$

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
2. Боровков А. А., Рогозин Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.
3. Höglund T. A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, v. 49, № 1, p. 105–117.
4. Розовский Л. В. О нижней границе вероятностей больших отклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2001, т. 278, с. 208–224.
5. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений для некоторых классов распределений, удовлетворяющих условию Крамера. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2003, т. 298, с. 161–185.
6. Daniels H. E. Saddlepoint approximations in statistics. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, № 4, p. 631–650.
7. Нагаев А. В. Большие отклонения для одного класса распределений. — Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 56–68.
8. Нагаев А. В. Крамеровские большие отклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
9. Розовский Л. В. О сверхбольших отклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 1, с. 78–103.
10. Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 641–673.
11. Розовский Л. В. Вероятности сверхбольших отклонений сумм независимых случайных величин с экспоненциально убывающим распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 1, с. 175–179.
12. Rozovsky L. V. Superlarge deviation probabilities for sums of independent lattice random variables with exponential decreasing tails. — Statist. Probab. Lett., 2012, v. 82, № 1, p. 72–76.
13. Розовский Л. В. О вероятностях малых отклонений положительных случайных величин. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2004, т. 320, с. 150–159.
14. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.

Поступила в редакцию
16.III.2012