Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, Е. Д. Косов, И. Нурдин, Г. Поли, Два свойства векторов из квадратичных форм от гауссовских случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 214–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:14:11

© 2014 г.

БОГАЧЕВ В. И.^{*}, КОСОВ Е. Д.^{},
НУРДИН И.^{***}, ПОЛИ Г.[†]****ДВА СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ ИЗ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ
ОТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾**

Изучаются распределения случайных векторов, компоненты которых представляют собой многочлены второго порядка от гауссовских случайных величин. В предположении, что распределение такого вектора не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега, установлено некоторое свойство линейной зависимости. Второй основной результат дает описание пределов по распределению последовательностей таких векторов.

Ключевые слова и фразы: квадратичные формы от гауссовских величин, второй винеровский хаос, сходимость по распределению, абсолютная непрерывность.

1. Введение и основные результаты. Благодаря многочисленным применениям в теории вероятностей и статистике, квадратичные формы или более общие многочлены второго порядка от гауссовских случайных величин представляют собой весьма важный объект. Цель этой работы — представить некоторые новые результаты о распределениях случайных векторов, компоненты которых являются такими квадратичными формами.

Чтобы быть более конкретными, зафиксируем натуральное число $k \geq 2$ и введем серию наборов $g_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$, $j = 1, 2, \dots$, из стандартных гауссовских случайных величин. Предположим, что величины $g_{i,j}$ являются совместно гауссовскими и $\mathbf{E}[g_{i,j}g_{i,j'}] = 0$ при $j \neq j'$ (т.е. для

^{*}Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия; e-mail: vibogach@mail.ru

^{**}Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: ked.2006@mail.ru

^{***}Institut Élie Cartan, Université de Lorraine, Vandœuvre-lès-Nancy, France; e-mail: inourdin@gmail.com

[†]Université du Luxembourg, Faculté des Sciences, de la Technologie et de la Communication, Luxembourg; e-mail: guillame.poly@eleves.enpc.fr

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проекта 14-11-00196 Российского научного фонда (результаты п. 2) и гранта ANR-10-BLAN-0121 «Malliavin, Stein and Stochastic Equations with Irregular Coefficients» (результаты п. 3).

каждого фиксированного i последовательность $g_{i,1}, g_{i,2}, \dots$ состоит из независимых стандартных гауссовских случайных величин). Рассмотрим также случайный вектор $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathbf{R}^k$, компоненты которого являются «квадратичными формами», т.е. для всякого $i = 1, \dots, k$

$$F_i = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j} (g_{i,j}^2 - 1) \quad \text{при некоторых } \lambda_{i,j} \in \mathbf{R} \text{ с } \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j}^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Ш. Кусуока в его известной работе [1] показал, что распределение вектора

$$F = (F_1, \dots, F_k)$$

указанного выше вида не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда существует такой непостоянный многочлен P на $\mathbf{R}^k$, что

$$P(F_1, \dots, F_k) = 0$$

почти наверное (см. также [2, теорема 3.1], где показано еще, что степень P всегда можно выбрать меньшей или равной $k \cdot 2^{k-1}$). Но что можно сказать про обычную линейную зависимость $F_1, \dots, F_k$? Одна из целей этой работы — привести ряд положительных и отрицательных результатов в духе следующей теоремы, которая будет доказана (фактически в несколько более общей постановке) в п. 2.

Теорема 1.1. Пусть число $k \in \mathbf{N}$ фиксировано. Пусть $F = (F_1, \dots, F_k)$ — такой случайный вектор вида (1.1), что распределение F не является абсолютно непрерывным. Тогда найдутся $k - 1$ независимых стандартных гауссовских случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}$ и $2k - 1$ вещественных чисел $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}$ таких, что $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$ и почти наверное

$$a_1 F_1 + \dots + a_k F_k = b_1 (\eta_1^2 - 1) + \dots + b_{k-1} (\eta_{k-1}^2 - 1).$$

Для лучшего понимания значения этой теоремы дадим небольшой комментарий. Пусть ее предположения выполнены. В случае $k = 1$ это возможно лишь при $F_1 = 0$. Когда $k = 2$, можно показать (см., например, [2, предложение 3.2]), что на самом деле мы можем взять $b_1 = 0$, а это означает, что F_1 и F_2 с необходимостью линейно зависимы. При $k \geq 3$ положение становится более сложным. Как показывает следующий простой контрпример, теперь уже неверно, что величины F_i обязательно линейно зависимы, когда распределение F не является абсолютно непрерывным. Пусть $g_1, g_2 \sim N(0, 1)$ независимы. Положим $F_1 = g_1^2 - 1$, $F_2 = g_2^2 - 1$ и

$$F_3 = g_1 g_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\left(\frac{g_1 + g_2}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right) - \left(\left(\frac{g_1 - g_2}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right) \right].$$

Второе равенство нужно лишь для того, чтобы показать, что F_3 в самом деле имеет вид (1.1). Легко проверить, что ковариационная матрица величин F_1, F_2, F_3 невырождена (значит, F_1, F_2, F_3 линейно независимы), хотя распределение (F_1, F_2, F_3) очевидным образом не является абсолютно непрерывным, поскольку

$$F_3^2 - (F_1 + 1)(F_2 + 1) = 0.$$

Следовательно, самое большее, чего можно достичь относительно линейной зависимости, и есть в точности то, что утверждается в нашей теореме.

Теперь обсудим второй основной результат этой работы, дающий описание возможных пределов по распределению для последовательностей векторов из квадратичных форм. Чтобы сформулировать точный результат, нам сначала потребуется ввести некоторое n в предыдущую постановку. Зафиксируем натуральное число $k \geq 1$. Пусть теперь $g_{i,j,n}$, где $1 \leq i \leq k$, $j, n = 1, 2, \dots$, — последовательность серий стандартных гауссовских случайных величин. Предположим, что для каждого фиксированного n величины $g_{i,j,n}$ являются совместно гауссовскими и что $E[g_{i,j,n}g_{i,j',n}] = 0$ при $j \neq j'$. Рассмотрим также последовательность случайных векторов $F_n = (F_{1,n}, \dots, F_{k,n}) \in \mathbf{R}^k$, компоненты которых опять являются «квадратичными формами»: для всякого $i = 1, \dots, k$ и всякого $n \geq 1$

$$F_{i,n} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,n}^2 - 1) \quad \text{для некоторых } \lambda_{i,j,n} \in \mathbf{R} \text{ с } \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j,n}^2 < \infty.$$

Тогда верна следующая теорема, которая является нашим вторым основным результатом.

Теорема 1.2. *Предположим, что векторы $F_n = (F_{1,n}, \dots, F_{k,n})$ сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$. Тогда предельное распределение совпадает с распределением вектора вида $\eta + F$, где $F = (F_1, \dots, F_k)$ имеет вид (1.1) и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ — независимый гауссовский случайный вектор.*

При $k = 1$ (одномерный случай) теорема 1.2 была доказана М. Арконесом [3] (она может быть выведена также из работы Б. А. Севастьянова [4], см. [5]). На первый взгляд можно было бы думать, что для доказательства теоремы 1.2 в общем случае $k \geq 2$ достаточно применить результат Арконеса вместе с теоремой Крамера–Вольда. Однако если попытаться осуществить эту стратегию, мы встретим существенное препятствие. В самом деле, рассмотрим случайный вектор $G = (G_1, \dots, G_k)$ в $\mathbf{R}^k$ и предположим, что всякая линейная комбинация величин G_i есть квадратичная форма от гауссовских случайных величин; как вывести из этого, что G имеет то же самое распределение, что и F вида (1.1)?

Работа организована следующим образом. Пункт 2 содержит результаты, относящиеся к теореме 1.1, в то время как доказательство теоремы 1.2 проводится в п. 3.

2. Полиномиальные второго порядка отображения с линейно зависимыми производными Маллявэна. Базовый факт исчисления Маллявэна состоит в том, что конечный набор соболевских функций $F_1, \dots, F_n$ на пространстве с гауссовской мерой μ имеет совместную плотность распределения при условии, что их градиенты Маллявэна $D_H F_1, \dots, D_H F_n$ вдоль пространства Камерона–Мартин H линейно независимы почти всюду (см. [6]–[8]). По этой причине представляют интерес различные достаточные условия для такой независимости, что ведет к естественному вопросу о последствиях альтернативной ситуации, когда градиенты линейно зависимы на множестве положительной меры. Едва ли можно ожидать полезной общей характеристики этого, но положение может быть более благоприятным для различных специальных классов функций, в частности для измеримых многочленов. Один из первых результатов в этом направлении (уже упомянутый выше) был получен Ш. Кусукой [1]. Этот результат был недавно обобщен в [2] следующим образом: мера, индуцированная $(F_1, \dots, F_n)$, не является абсолютно непрерывной в точности тогда, когда имеется полиномиальная зависимость между $F_1, \dots, F_n$, т.е. существует такой ненулевой многочлен ψ , что $\psi(F_1, \dots, F_n) = 0$. Но что можно сказать об обычной линейной зависимости $F_1, \dots, F_n$? Конечно, в общем случае такой зависимости может не быть даже в конечномерном случае. Однако есть ситуации, когда линейная зависимость производных отображения на $\mathbf{R}^d$ на множестве положительной меры дает обычную линейную зависимость самих отображений. Это, очевидно, так для линейных функций и может быть проверено для квадратичных форм. Цель этого пункта — представить ряд положительных и отрицательных результатов такого рода. Мы докажем, что если k измеримых линейных отображений $A_1, \dots, A_k$ на пространстве с гауссовской мерой μ таковы, что векторы $A_1 x, \dots, A_k x$ линейно зависимы для каждого x из множества положительной μ -меры, то найдется такой измеримый линейный оператор D ранга $k - 1$, что операторы $A_1, \dots, A_k, D$ линейно зависимы, т.е. $D = c_1 A_1 + \dots + c_k A_k$ с некоторыми числами $c_1, \dots, c_k$. В общем случае ранг D не может быть сделан меньше. Однако, если $k = 2$ и A_1 и A_2 — вторые производные вдоль H некоторых многочленов второго порядка, то приведенное выше утверждение верно с $D = 0$, т.е. A_1 и A_2 линейно зависимы.

Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X с топологическим сопряженным X^* , т.е. каждый функционал $f \in X^*$ есть центрированная гауссовская слу-

чайная величина на (X, μ) . Основные понятия и факты, относящиеся к гауссовским мерам, можно найти в [7], [8] и [9]. Напомним некоторые из них.

Пространство Камерона–Мартина меры μ есть множество

$$H = \{h \in X : |h|_H < \infty\},$$

где

$$|h|_H := \sup\{l(h) : l \in X^*, \|l\|_{L^2(\mu)} \leq 1\}.$$

Известно, что замыкание H в X имеет полную меру, поэтому мы будем всюду предполагать, что H плотно. Такая мера μ называется невырожденной. Равносильное условие состоит в том, что распределение каждого ненулевого функционала $f \in X^*$ имеет плотность.

Пусть X_μ^* обозначает замыкание X^* в $L^2(\mu)$. Элементы X_μ^* называются измеримыми линейными функционалами на X . Такой функционал допускает версию, линейную на всем X в обычном алгебраическом смысле. Обратно, всякая μ -измеримая функция, которая алгебраически линейна, принадлежит пространству X_μ^* .

Известно, что H состоит из всех векторов h таких, что мера μ эквивалентна ее сдвигу μ_h , определенному посредством равенства $\mu_h(B) = \mu(B - h)$. Известно также, что всякий вектор $h \in H$ порождает измеримый линейный функционал $\hat{h}$ на X , для которого

$$(f, \hat{h})_{L^2(\mu)} = f(h), \quad f \in X^*.$$

Каждый элемент из X_μ^* может быть представлен таким образом, поэтому отображение $h \mapsto \hat{h}$ взаимно однозначно. Известно, что H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(h, k)_H := (\hat{h}, \hat{k})_{L^2(\mu)}.$$

Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H , то

$$\hat{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n)_H \hat{e}_n(x),$$

где ряд сходится в $L^2(\mu)$ и почти всюду. В том случае, когда μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbf{R}^\infty$ (счетной степени $\mathbf{R}$, или пространстве всех вещественных последовательностей $x = (x_n)$) и $\{e_n\}$ — стандартный базис в $H = l^2$, имеем $\hat{e}_n(x) = x_n$ и

$$\hat{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x_n.$$

Для заданного ограниченного оператора $A: H \rightarrow H$ через $\hat{A}$ обозначим ассоциированный измеримый линейный оператор на X , т.е. такое измеримое линейное отображение из X в X , что $\hat{h}(\hat{A}x) = \hat{A}^* \hat{h}(x)$ для каждого $h \in H$. Этот оператор можно определить формулой

$$\hat{A}x = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{e}_n(x) A e_n,$$

где ряд сходится в X при почти всех x (что обеспечивается теоремой Цирельсона).

В случае, когда A — оператор Гильберта–Шмидта (и только в этом случае), оператор $\hat{A}$ принимает значения в H . Тогда $(\hat{A}x, h)_H = \widehat{A^* h}(x)$ для каждого $h \in H$, причем указанный выше ряд сходится в H при почти всех x .

Пространство $L^2(\mu)$ можно разложить в ортогональную сумму $\bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_k$ взаимно ортогональных замкнутых подпространств $\mathcal{X}_k$, которые строятся следующим образом. Обозначая через E_k замыкание в $L^2(\mu)$ многочленов вида $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, где f — многочлен степени k на $\mathbf{R}^n$ и $\xi_i \in X_{\mu}^*$, мы вводим пространство $\mathcal{X}_k$ как ортогональное дополнение к E_{k-1} в E_k , причем $E_0 = \mathcal{X}_0$ — одномерное пространство постоянных. Например, $\mathcal{X}_1 = X_{\mu}^*$. Функции из E_k называются измеримыми многочленами степени k . Пространство $\mathcal{X}_k$ называют однородным вине-ровским хаосом порядка k (хотя его элементы не являются однородными многочленами за исключением случая $k = 1$). Недавно в [10] было показано, что класс E_k совпадает с множеством μ -измеримых функций на X , которые допускают версии, являющиеся многочленами степени k в обычном алгебраическом смысле (алгебраический многочлен степени k есть функция, ограничение которой на любую прямую — многочлен степени k).

Элементы пространства $\mathcal{X}_2$ допускают следующее сравнительно простое представление: для каждого $f \in \mathcal{X}_2$ найдутся такие числа c_n и ортонормированная последовательность $\{\xi_n\} \subset X_{\mu}^*$, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi_n^2 - 1), \quad (2.1)$$

где ряд сходится почти всюду и в $L^2(\mu)$. Для всякого k элементы $\mathcal{X}_k$ могут быть представлены рядами по многочленам Эрмита степени k от величин ξ_n . В случае классического пространства Винера они могут быть записаны также как кратные интегралы Винера. В этом случае $X = C[0, 1]$ или $X = L^2[0, 1]$, μ есть мера Винера, ее пространство Камерона–Мартина H — это пространство всех таких абсолютно непрерывных функций h на $[0, 1]$, что $h(0) = 0$ и $h' \in L^2[0, 1]$;

$(u, v)_H = (u', v')_{L^2}$. Всякий элемент из X_μ^* может быть записан как стохастический интеграл Винера

$$\xi(x) = \int_0^1 u(t) dx(t), \quad u \in L^2[0, 1].$$

Положив

$$h(t) = \int_0^t u(s) ds,$$

имеем $\xi = \hat{h}$. Аналогично, всякий элемент из $\mathcal{X}_2$ может быть записан как двойной интеграл Винера

$$f(x) = \iint q(t, s) dx(t) dx(s),$$

где $q \in L^2([0, 1]^2)$. Однако первый интеграл

$$\xi(s, x) = \int q(t, s) dx(t)$$

должен быть согласованным процессом (так что второй интеграл — уже интеграл Ито согласованного процесса по винеровскому процессу), т.е. для каждого момента s случайная величина $\xi(s, x)$ должна быть измерима относительно σ -алгебры, порожденной величинами $x(t)$ с $t \leq s$; по этой причине требуется, чтобы $q(t, s) = 0$ при $t > s$.

Всякая функция $f \in \mathcal{X}_2$ имеет градиент Малиявэна $D_H f$ вдоль H , который является измеримым линейным оператором из X в H ; для f вида (2.1) имеем

$$D_H f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n(x) e_n,$$

где $\{e_n\}$ — такая ортонормированная последовательность в H , что $\xi_n = \hat{e}_n$; без потери общности можно считать, что $\{e_n\}$ — базис в H . Следовательно, вторая производная $D_H^2 f(x)$ является симметричным оператором Гильберта–Шмидта с собственным базисом $\{e_n\}$ и соответствующими собственными числами $\{2c_n\}$. Таким образом, ситуация аналогична случаю $\mathbf{R}^d$, где функция

$$Q(x) = \sum_{n=1}^d c_n (x_n^2 - 1)$$

имеет градиент

$$\nabla Q(x) = 2 \sum_{n=1}^d c_n x_n e_n.$$

В бескоординатном виде имеем $Q(x) = (Ax, x) - \text{tr} A$, где A — симметричный оператор, $\nabla Q(x) = 2Ax$. Единственное отличие состоит в

том, что ряд из $c_n \xi_n^2$ не имеет самостоятельного смысла, если только ряд из $|c_n|$ не сходится, поэтому типичный элемент $\mathcal{X}_2$ лишь формально выглядит как «квадратичная форма минус постоянная».

Ясно, что

$$D_H f = 2\widehat{D_H^2 f}.$$

Обратно, для всякого симметричного оператора Гильберта–Шмидта A , имеющего собственный базис $\{e_n\}$ и собственные числа $\{a_n\}$, существует такой элемент $f \in \mathcal{X}_2$ вида (2.1), что

$$A = D_H^2 f(x) \quad \text{и} \quad \hat{A}x = D_H f(x).$$

Легко видеть, что в случае классического винеровского пространства и элемента $f \in \mathcal{X}_2$, представленного посредством двойного интеграла Винера с интегральным ядром q , мы имеем

$$(D_H f(x), h)_H = \int_0^1 \int_0^1 [q(t, s) + q(s, t)] h'(t) dt dx(s), \quad h \in H.$$

Для второй производной имеем

$$(D_H^2 f(x) h_1, h_2)_H = \int_0^1 \int_0^1 [q(t, s) + q(s, t)] h_1'(t) h_2'(s) dt ds, \quad h_1, h_2 \in H.$$

Теперь можно спросить, всякие ли два элемента f и g из $\mathcal{X}_2$ линейно зависимы, если их градиенты $D_H f(x)$ и $D_H g(x)$ линейно зависимы для почти всех x ; что можно сказать про k элементов из $\mathcal{X}_2$? В терминах второй производной вдоль H наш вопрос таков: если два симметричных оператора Гильберта–Шмидта A и B на H таковы, что $\hat{A}x$ и $\hat{B}x$ линейно зависимы для почти всех x , то верно ли, что операторы A и B линейно зависимы? Тот же самый вопрос можно задать о не обязательно симметричных операторах на H и также о более общих измеримых линейных операторах (как и о более чем двух таких объектах).

Например, для двух заданных квадратичных форм (Ax, x) и (Bx, x) на $\mathbf{R}^d$ с симметричными операторами A и B линейная зависимость форм (или, что то же самое, линейная зависимость соответствующих элементов $(Ax, x) - \text{trase } A$ и $(Bx, x) - \text{trase } B$ класса $\mathcal{X}_2$) равносильна линейной зависимости операторов, причем оба свойства следуют из условия, что Ax и Bx линейно зависимы для x из множества положительной меры. Мы займемся бесконечномерными обобщениями этого факта.

Лемма 2.1. *Две функции $f, g \in \mathcal{X}_2$ линейно зависимы в точности тогда, когда операторы $D_H^2 f$ и $D_H^2 g$ на H линейно зависимы.*

Доказательство. Если $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ для некоторых чисел α, β , то очевидным образом $\alpha D_H^2 f + \beta D_H^2 g = 0$. Предположим, что последнее равенство верно. Это означает, что H -значное отображение

$\alpha D_H f + \beta D_H g$ имеет нулевую производную вдоль H . Из этого вытекает, что $\alpha D_H f(x) + \beta D_H g(x)$ — постоянный вектор $h_0 \in H$. Следовательно,

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \widehat{h_0}(x) + c,$$

где c — постоянная. Поскольку f и g ортогональны в $L^2(\mu)$ всем элементам из E_1 , заключаем, что $c = 0$ и $h_0 = 0$. Лемма 2.1 доказана.

Напомним следующий закон 0-1: для всякого μ -измеримого линейного подпространства $L \subset X$ имеем либо $\mu(L) = 0$, либо $\mu(L) = 1$. Есть также аналогичный закон 0-1 для измеримых многочленов ψ : множество $\{x: \psi(x) = 0\}$ имеет меру либо 0, либо 1 (см. [7, теорема 3.2.10 и предложение 5.10.10]).

Теорема 2.1. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — линейно независимые операторы Гильберта–Шмидта на H . Тогда либо векторы $\widehat{A_1}x, \dots, \widehat{A_k}x$ линейно независимы почти всюду, либо существует конечномерный ограниченный оператор D ранга не выше $k - 1$, являющийся нетривиальной линейной комбинацией операторов $A_1, \dots, A_k$.

Доказательство. Пусть $k = 2$. Можно считать, что $\widehat{A_1}x \neq 0$ почти всюду, поскольку иначе $\widehat{A_1}x = 0$ почти всюду в силу закона 0-1 и, значит, $A_1 = 0$. Предположим, что $\widehat{A_1}x$ и $\widehat{A_2}x$ линейно зависимы на множестве положительной меры. По закону 0-1 для многочленов они линейно зависимы почти всюду, так как множество Z всех точек x , в которых $\widehat{A_1}x$ и $\widehat{A_2}x$ линейно зависимы, описывается равенством

$$(\widehat{A_1}x, \widehat{A_2}x)_H^2 - (\widehat{A_1}x, \widehat{A_1}x)_H (\widehat{A_2}x, \widehat{A_2}x)_H = 0.$$

Значит, найдется такая функция k на X , что

$$\widehat{A_2}x = k(x)\widehat{A_1}x \quad \text{почти всюду.}$$

Тогда $k(x) = (\widehat{A_1}x, \widehat{A_2}x)_H / |\widehat{A_1}x|_H^2$. Функции

$$P(x) = (\widehat{A_1}x, \widehat{A_2}x)_H, \quad Q(x) = |\widehat{A_1}x|_H^2,$$

очевидным образом, дифференцируемы вдоль H . Заметим, что производные отображений $\widehat{A_1}$ и $\widehat{A_2}$ вдоль H являются в точности исходными операторами A_1 и A_2 соответственно. Дифференцируя равенство

$$Q(x)\widehat{A_2}x = P(x)\widehat{A_1}x,$$

получаем п.в.

$$Q(x)A_2 + D_H Q(x) \otimes \widehat{A_2}x = P(x)A_1 + D_H P(x) \otimes \widehat{A_1}x,$$

где для любых двух векторов $u, v \in H$ оператор $u \otimes v$ определен равенством

$$u \otimes v(h) = (u, h)_H v.$$

Следует заметить, что дифференцирование возможно почти всюду, поскольку для почти каждого $x \in Z$ в множестве Z содержатся всех прямые $x + \mathbf{R}h$ для каждого вектора $h \in H$, являющегося линейной комбинацией элементов фиксированного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H с рациональными коэффициентами.

Пусть x — какая-либо точка, где выполнено предыдущее равенство и при этом $Q(x) \neq 0$. Тогда

$$A_2 = k(x)A_1 + Q(x)^{-1}[D_H P(x) - k(x)D_H Q(x)] \otimes \hat{A}_1 x.$$

Полагая $c := k(x)$ и

$$D := Q(x)^{-1}[D_H P(x) - k(x)D_H Q(x)] \otimes \hat{A}_1 x,$$

приходим к тождеству $A_2 = cA_1 + D$, где D имеет ранг не выше 1.

Предположим теперь, что наше утверждение верно для некоторого $k > 2$, и рассмотрим линейно независимые операторы $A_1, \dots, A_k, A_{k+1}$. Можно считать, что векторы $\hat{A}_1 x, \dots, \hat{A}_k x$ линейно независимы почти всюду. Если $\hat{A}_1 x, \dots, \hat{A}_{k+1} x$ линейно зависимы на множестве положительной меры, то они линейно зависимы почти всюду, значит, существуют такие функции $c_1, \dots, c_k$ на X , что почти всюду

$$\hat{A}_{k+1} x = c_1(x)\hat{A}_1 x + \dots + c_k(x)\hat{A}_k x.$$

Опять легко проверить, что функции c_i (которые можно найти явно) дифференцируемы вдоль H п.в. Дифференцируя, приходим к равенству п.в.

$$A_{k+1} = c_1(x)A_1 + \dots + c_k(x)A_k + D(x),$$

где $D(x)$ является суммой k одномерных операторов и, значит, имеет ранг не выше k . Остается взять в качестве x общую точку дифференцируемости функций $c_1, \dots, c_k$. Теорема 2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Известно (см., например, [11]), что для всякого измеримого линейного оператора T из сепарабельного пространства Фреше X с гауссовской мерой μ (на самом деле не обязательно гауссовской) в сепарабельное банахово пространство Y существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E , компактно вложенное в X и имеющее полную меру, такое, что T совпадает п.в. с ограниченным линейным оператором из E в Y . Используя этот результат, можно свести предыдущую теорему (в случае пространств Фреше) к случаю ограниченных операторов.

Следствие 2.1. Пусть $k = 2$ и A_1 и A_2 симметричны. Если $\hat{A}_1 x$ и $\hat{A}_2 x$ линейно зависимы для векторов x из множества положительной меры, то A_1 и A_2 линейно зависимы.

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы, где $\hat{A}_2 x = k(x)\hat{A}_1 x$ почти всюду с некоторой измеримой функцией k . Кроме того, $A_2 = cA_1 + D$, где D имеет ранг не более 1. Предположим, что $D \neq 0$. Ясно, что D тоже симметричен, значит, $\hat{D} = \lambda \hat{h}_1 h_1$ для некоторых ненулевого вектора $h_1 \in H$ и ненулевого числа λ . Поскольку

$$\hat{D}x = (k(x) - c)\hat{A}_1 x \quad \text{п.в.}$$

и $\hat{D}x \neq 0$ почти всюду (в противном случае получим $D = 0$), то мы видим, что $\hat{A}_1$ принимает значения в одномерном образе D почти всюду. Это означает, что оба оператора A_1 и A_2 одномерны и в силу своей симметричности имеют вид $h \mapsto c_i(h, h_1)_H h_1$ с некоторыми постоянными c_1 и c_2 , откуда очевидно, что они линейно зависимы. Следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Предположим, что функции $f_1, \dots, f_k$, где $k > 2$, принадлежат $\mathcal{X}_2$ и линейно независимы. Тогда либо они имеют совместную плотность распределения, либо некоторая нетривиальная линейная комбинация $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ является вырожденным элементом $\mathcal{X}_2$ ранга $k - 1$, т.е. многочленом второго порядка от $k - 1$ элемента пространства $\mathcal{X}_1$ измеримых линейных функционалов.*

Следствие 2.3. *Пусть μ — невырожденная центрированная гауссовская мера на сепарабельном пространстве Фреше X , и пусть $A_1, \dots, A_k$ — линейно независимые непрерывные линейные операторы на X со значениями в банаховом пространстве E . Тогда либо векторы $A_1 x, \dots, A_k x$ линейно независимы почти всюду, либо некоторая нетривиальная линейная комбинация $c_1 A_1 + \dots + c_k A_k$ имеет ранг не выше $k - 1$.*

Доказательство. Пусть H — пространство Камерона–Мартина меры μ . Достаточно рассмотреть случай бесконечномерного H . Можно считать, что E сепарабельно, ибо образы операторов лежат в сепарабельном подпространстве. Вложив E в l^2 посредством инъективного непрерывного линейного оператора, можно перейти к случаю $E = H$. Наконец, взяв инъективный оператор Гильберта–Шмидта S и имея дело с операторами $SA_1, \dots, SA_k$, мы приходим к ситуации теоремы (на самом деле нет необходимости брать S , поскольку ограничения наших операторов на H автоматически будут операторами Гильберта–Шмидта, см. [7, предложение 3.7.10]). Следствие 2.3 доказано.

Покажем, что ранг вырожденной линейной комбинации, указанной в теореме 2.1, в общем случае нельзя сделать меньше.

Предложение 2.1. *Для каждого $k \in \mathbf{N}$ существуют такие операторы*

$$A_1, \dots, A_k: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad \text{где } d = \frac{k(k-1)}{2},$$

что для каждого вектора $x \in \mathbf{R}^k$ векторы $A_1x, \dots, A_kx$ линейно зависимы, но для каждого ненулевого вектора $x = (x_1, \dots, x_k)$ оператор $\sum_{i=1}^k x_i A_i$ имеет ранг $k - 1$. В частности, нетривиальная линейная комбинация операторов $A_1, \dots, A_k$ не может иметь ранг менее $k - 1$.

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — некоторые операторы из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^d$. Каждый оператор A_i представим матрицей $(a_i^{l,j})_{l \leq d, j \leq k}$ с k столбцами $A_i^1, \dots, A_i^k$, где

$$A_i^j = (a_i^{1,j}, \dots, a_i^{d,j}).$$

Сначала мы выберем матрицы A_i так, что $A_i^i = 0$ и

$$\sum_{i=1}^k x_i A_i x = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^k.$$

Последнее равносильно следующей системе векторных уравнений:

$$A_i^j = -A_j^i, \quad i \neq j.$$

Итак, мы получаем $d = k(k - 1)/2$ векторных уравнений для $k(k - 1)$ ненулевых столбцов матриц A_i . Следовательно, задав d столбцов (один столбец для каждого уравнения), оставшиеся столбцы мы однозначно определим из уравнений.

Рассмотрим два случая: k нечетно или k четно.

Пусть k нечетно, $m = (k - 1)/2$. В каждой матрице A_i мы зададим m столбцов (оставшиеся столбцы будут определены из уравнений) следующим образом:

$$A_i^j = e_{(i-1)m+j-i}, \quad j = i + 1, \dots, i + m \pmod k,$$

где $e_1, \dots, e_d$ — стандартный базис $\mathbf{R}^d$ и $j \pmod k$ есть наименьшее неотрицательное целое число $r \leq k$ с $j = pk + r$. Легко видеть, что для каждого $s \in \{1, \dots, d\}$ существует единственная пара столбцов A_i^j, A_j^i с $a_i^{s,j} \neq 0$; для разных s такие пары различны. Теперь зафиксируем ненулевой вектор $x \in \mathbf{R}^k$. Пусть $y \in \text{Ker } \sum_{i=1}^k x_i A_i$. Мы получаем, что $x_i y_j - x_j y_i = 0$ для всех пар i, j , что дает линейную зависимость векторов x и y . Следовательно,

$$\dim \left(\text{Ker } \sum_{i=1}^k x_i A_i \right) = 1,$$

что означает, что ранг $\sum_{i=1}^k x_i A_i$ равен $k - 1$.

Например, пусть $k = 3$. Тогда $d = k(k - 1)/2 = 3$, $m = (k - 1)/2 = 1$. Мы имеем $k(k - 1)/2 = 3$ уравнений. Сначала зададим один столбец

в каждой матрице, что вместе с равенством $A_i^i = 0$ дает следующее представление:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & A_1^{13} \\ 0 & 0 & A_1^{23} \\ 0 & 0 & A_1^{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2^{11} & 0 & 0 \\ A_2^{21} & 0 & 1 \\ A_2^{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & A_3^{12} & 0 \\ 0 & A_3^{22} & 0 \\ 1 & A_3^{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений $A_i^j = -A_j^i$, $i \neq j$, находим

$$A_1^3 = -A_3^1 = (0, 0, -1), \quad A_2^1 = -A_1^2 = (-1, 0, 0), \quad A_3^2 = -A_2^3 = (0, -1, 0),$$

так что наши матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что мы имеем нетривиальную линейную комбинацию

$$A = x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор $y = (a, b, c) \in \text{Ker } A$. Тогда

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ay + bx \\ yc - zb \\ -xc + za \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, векторы (a, b, c) и (x, y, z) линейно зависимы, следовательно, $\dim \text{Ker } A = 1$ и ранг A равен 2.

В случае четного k все аналогично. Пусть $k = 2m$. В каждой из матриц $A_1, \dots, A_{k-1}$ зададим m столбцов следующим образом. Сначала, имея дело с $k - 1$ столбцом $A_i^1, \dots, A_i^{k-1}$ матрицы A_i при $i = 1, \dots, k - 1$ и игнорируя последние $k - 1$ строк, мы зададим матричные элементы таким же способом, как для нечетного числа $k - 1$. Затем в i -й матрице (кроме последней) в k -м столбце поставим 1 на $(d - (k - 1) + i)$ -м месте и 0 на остальных местах. Предложение 2.1 доказано.

Пример 2.1. В случае $k = 3$ имеется простой пример трех линейно независимых элементов xy , $x^2 - 1$, $y^2 - 1$ класса $\mathcal{X}_2$ на плоскости со стандартной гауссовской мерой таких, что их градиенты (y, x) , $(2x, 0)$ и $(0, 2y)$ линейно зависимы в каждой точке (x, y) плоскости. Таким образом, их вторые производные представляют собой симметричные линейно независимые операторы, значения которых на каждом фиксированном векторе линейно зависимы.

3. Сходимость по распределению во втором винеровском хаосе. Сначала напомним некоторые важные известные результаты.

Теорема 3.1. Пусть $g_1, g_2, \dots$ — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность вида

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,n} (g_k^2 - 1), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,n}^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{т.е. } \mathbf{E}[F_n^2] = 1.$$

Предположим также, что $\sup_{k \geq 1} |\alpha_{k,n}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $F_n \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Этот результат представляет собой весьма специальный случай классического обобщения теоремы Линдберга (см. [12, п. 21] или [13, п. 21.2]) о сходимости последовательностей рядов $F_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{k,n}$ с независимыми в каждом ряде центрированными случайными величинами, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} \xi_{k,n}^2 = 1$. Условие сходимости по распределению к стандартному нормальному распределению состоит в том, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} (\xi_{k,n}^2 I\{|\xi_{k,n}| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0.$$

В нашем случае это условие очевидным образом выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\alpha_{k,n}^2 (g^2 - 1) I \left\{ |g^2 - 1| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha_{k,n}|} \right\} \right] \\ & \leq \alpha_{k,n}^2 \sqrt{\mathbf{E} [(g^2 - 1)^4]} \sqrt{\mathbf{P} \left(|g^2 - 1| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha_{k,n}|} \right)} \\ & \leq C \frac{|\alpha_{k,n}|^3}{\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon} \sup_{k \geq 1} |\alpha_{k,n}| \alpha_{k,n}^2, \end{aligned}$$

где g имеет стандартное нормальное распределение.

Нам понадобится также следующий результат Пекатти и Тюдора [14] (см. также [15, гл. 6]).

Теорема 3.2. Пусть $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ фиксированы и $k = k_1 + k_2$. Предположим, что заданы стандартные нормальные случайные величины $g_{i,j,n}$, $1 \leq i \leq k$, $j, n = 1, 2, \dots$, такие, что для каждого фиксированного n случайные величины $g_{i,j,n}$ являются совместно гауссовскими и $\mathbf{E}[g_{i,j,n} g_{i,j',n}] = 0$ для любого i при $j \neq j'$. Рассмотрим случайные k -мерные векторы $F_n = (F_{1,n}, \dots, F_{k,n})$, где $F_{i,n} = g_{i,1,n}$, если $i = 1, \dots, k_1$, и

$$F_{i,n} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,n}^2 - 1), \quad \text{если } i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2,$$

где $\lambda_{i,j,n} \in \mathbf{R}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i,j,n}^2 < \infty$. Пусть конечный предел $C_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[F_{i,n} F_{j,n}]$ существует для всех i, j . Тогда следующие два утверждения равносильны:

- (а) $(F_{1,n}, \dots, F_{k,n}) \xrightarrow{\text{law}} N_k(0, C)$ при $n \rightarrow \infty$, где $C = (C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$;
- (б) $F_{i,n} \xrightarrow{\text{law}} N_1(0, C_{i,i})$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$.

Теперь мы используем теоремы 3.1 и 3.2 для доказательства теоремы 1.2.

Доказательство. Можно считать, что предел распределений F_n не является дираковской мерой в нуле (иначе желаемое заключение тривиально). Известно, что сходимость по распределению для последовательности измеримых многочленов фиксированной степени дает ограниченность во всех L^p (см., например, [16, лемма 1], [8, задача 9.8.19] или [17, лемма 2.4]). Следовательно, без потери общности можно считать, что для всех i и n

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{i,k,n}^2 = \frac{1}{2},$$

т.е. $\mathbf{E}[F_{i,n}^2] = 1$ для всех i и n . Мы можем также считать, что

$$|\lambda_{i,1,n}| \geq |\lambda_{i,2,n}| \geq \dots.$$

Наконец, используя подходящий диагональный прием в духе Кантора, мы можем считать, что

$$\lambda_{i,j,n} \rightarrow \mu_{i,j} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По теореме Фату имеем $C_i := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{i,k}^2 \leq 1/2$. С другой стороны, мы утверждаем, что существуют такие натуральные числа $D_{i,n} \rightarrow \infty$, что

$$C_{i,n} := \sum_{k=1}^{D_{i,n}} (\lambda_{i,k,n} - \mu_{i,k})^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Действительно, пусть $a_{i,k,n} = (\lambda_{i,k,n} - \mu_{i,k})^2$. Для каждого $k \geq 1$ пусть $B_{i,k} \geq 1$ есть наименьшее натуральное число с тем свойством, что если $n \geq B_{i,k}$, то

$$a_{i,1,n} + \dots + a_{i,k,n} \leq \frac{1}{k}.$$

Ясно, что $(B_{i,k})_{k \geq 1}$ — возрастающая последовательность. Без потери общности можно считать, что $B_{i,k} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ (если $B_{i,k} \not\rightarrow \infty$, то $B_{i,k} = B_{i,\infty}$ для всех достаточно больших k , а это означает, что $a_{i,1,n} + \dots + a_{i,N,n} \leq 1/k$ для всех $n \geq B_{i,\infty}$ и всех N ; тогда $a_{i,j,n} = 0$ для всех j и всех $n \geq B_{i,\infty}$, так что существование $D_{i,n}$ становится очевидным). Положим

$$D_{i,n} = \sup\{k: B_{i,k} \leq n\}.$$

В частности, имеем $B_{D_{i,n}} \leq n$, откуда, в свою очередь,

$$a_{i,1,n} + \dots + a_{i,D_{i,n},n} \leq \frac{1}{D_{i,n}}.$$

Более того, $D_{i,n} \uparrow \infty$ (поскольку $n < B_{i,D_{i,n}} + 1$; если $D_{i,n} \not\rightarrow \infty$, то $D_{i,n} = D_{i,\infty}$ для достаточно больших n , что дает противоречие при $n \rightarrow \infty$).

Из (3.1) ясно, что

$$\sum_{j=1}^{D_{i,n}} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,n}^2 - 1) \stackrel{\text{law}}{=} \sum_{j=1}^{D_{i,n}} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,1}^2 - 1) \xrightarrow{L^2} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,j} (g_{i,j,1}^2 - 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, мы утверждаем, что

$$\sum_{j=D_{i,n}+1}^{\infty} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,n}^2 - 1) \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1 - 2C_i). \quad (3.2)$$

В самом деле, если $C_i = 1/2$, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{i,j,n} - \mu_{i,j})^2 &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_{i,j} - \lambda_{i,j,n}) \mu_{i,j} \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^N |\mu_{i,j}| |\mu_{i,j} - \lambda_{i,j,n}| + 2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_{i,j} - \lambda_{i,j,n}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu_{i,j}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^N |\mu_{i,j}| |\mu_{i,j} - \lambda_{i,j,n}| + 2\sqrt{2} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu_{i,j}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{i,j,n} - \mu_{i,j})^2 \leq 2\sqrt{2} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu_{i,j}^2 \right)^{1/2},$$

откуда следует, что $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{i,j,n} - \mu_{i,j})^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В результате получаем

$$\sum_{j=D_{i,n}+1}^{\infty} \lambda_{i,j,n}^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{i,j,n} - \mu_{i,j})^2 + 2 \sum_{j=D_{i,n}+1}^{\infty} \mu_{i,j}^2 \rightarrow 0,$$

и (3.2) доказано при $C_i = 1/2$. Предположим теперь, что $C_i < 1/2$. Поскольку $D_{i,n} \rightarrow \infty$ и

$$D_{i,n} \lambda_{i,D_{i,n}+1,n}^2 \leq \lambda_{i,1,n}^2 + \dots + \lambda_{i,D_{i,n},n}^2 \leq \frac{1}{2},$$

получаем, что $\lambda_{i,D_{i,n}+1,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим случайные величины

$$G_{i,n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2S_{i,n}}} \sum_{j=D_{i,n}+1}^{\infty} \lambda_{i,j,n} (g_{i,j,n}^2 - 1), \quad S_{i,n} = \sum_{j=1}^{D_{i,n}} \lambda_{i,j,n}^2.$$

Легко проверить, что $\mathbf{E}[G_{i,n}^2] = 1$ для всех n и что

$$\sup_{j \geq D_{i,n}+1} \frac{|\lambda_{i,j,n}|}{\sqrt{1-2S_{i,n}}} \leq \frac{|\lambda_{i,D_{i,n}+1,n}|}{\sqrt{1-2S_{i,n}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По теореме 3.1 мы получаем, что $G_{i,n} \xrightarrow{\text{law}} N(0,1)$, откуда, в свою очередь, следует, что (3.2) выполнено при $C_i < 1/2$.

Вычитая подпоследовательность, можно считать, что конечный предел

$$\alpha_{i,i',j,j'} := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g_{i,j,n} g_{i',j',n}] \quad (3.3)$$

существует для всех i, i', j, j' . Заметим, что $\alpha_{i,i,j,j'} = \delta_{jj'}$, где $\delta_{jj'}$ — символ Кронекера. Пусть

$$\mathbf{g}_\infty = (g_{i,j,\infty})_{i=1,\dots,d, j=1,2,\dots}$$

является центрированным гауссовским семейством, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{E}[g_{i,j,\infty} g_{i',j',\infty}] = \alpha_{i,i',j,j'}.$$

Теперь введем некоторые дополнительные обозначения. Для любых $n, m \geq 1$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n &= \left(\sum_{j=1}^{D_{1,n}} \lambda_{1,j,n} (g_{1,j,n}^2 - 1), \dots, \sum_{j=1}^{D_{d,n}} \lambda_{d,j,n} (g_{d,j,n}^2 - 1) \right), \\ \mathbf{V}_n &= \left(\sum_{j=D_{1,n}+1}^{\infty} \lambda_{1,j,n} (g_{1,j,n}^2 - 1), \dots, \sum_{j=D_{d,n}+1}^{\infty} \lambda_{d,j,n} (g_{d,j,n}^2 - 1) \right), \\ \mathbf{W}_{m,n} &= \left(\sum_{j=1}^m \mu_{1,j} (g_{1,j,n}^2 - 1), \dots, \sum_{j=1}^m \mu_{d,j} (g_{d,j,n}^2 - 1) \right) \\ &\quad (\text{где, возможно, } n = \infty), \\ \mathbf{Z}_\infty &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{1,j} (g_{1,j,\infty}^2 - 1), \dots, \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{d,j} (g_{d,j,\infty}^2 - 1) \right). \end{aligned}$$

В силу (3.2), (3.3) и теоремы 3.2 получаем (возможно, переходя к подпоследовательности), что для всякого фиксированного $m \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &(g_{1,1,n}, \dots, g_{1,m,n}, \dots, g_{d,1,n}, \dots, g_{d,m,n}, \mathbf{V}_n) \\ &\xrightarrow{\text{law}} (g_{1,1,\infty}, \dots, g_{1,m,\infty}, \dots, g_{d,1,\infty}, \dots, g_{d,m,\infty}, \widehat{\mathbf{g}}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\widehat{\mathbf{g}} := (\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_d)$ является центрированным гауссовским вектором, не зависящим от $\mathbf{g}_\infty$. Из (3.4) немедленно вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}((\mathbf{W}_{m,n}, \mathbf{V}_n); (\mathbf{W}_{m,\infty}, \widehat{\mathbf{g}})) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного } m, \quad (3.5)$$

где dist обозначает какую-либо метрику, которая метризует сходимость по распределению (скажем, метрику Форте–Мурье или метрику Прохорова). С другой стороны, поскольку

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\|\mathbf{U}_n - \mathbf{W}_{m,n}\|^2] = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\|\mathbf{W}_{m,\infty} - \mathbf{Z}_\infty\|^2] = 0,$$

где использована обычная норма в $\mathbf{R}^d$, мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \text{dist}((\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n); (\mathbf{W}_{m,n}, \mathbf{V}_n)) &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \text{dist}((\mathbf{W}_{\infty,m}, \hat{\mathbf{g}}); (\mathbf{Z}_\infty, \hat{\mathbf{g}})) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Сочетая (3.5) и (3.6) с

$$\begin{aligned} \text{dist}((\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n); (\mathbf{Z}_\infty, \hat{\mathbf{g}})) &\leq \text{dist}((\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n); (\mathbf{W}_{m,n}, \mathbf{V}_n)) \\ &\quad + \text{dist}((\mathbf{W}_{m,n}, \mathbf{V}_n); (\mathbf{W}_{m,\infty}, \hat{\mathbf{g}})) \\ &\quad + \text{dist}((\mathbf{W}_{m,\infty}, \hat{\mathbf{g}}); (\mathbf{Z}_\infty, \hat{\mathbf{g}})), \end{aligned}$$

получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}((\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n); (\mathbf{Z}_\infty, \hat{\mathbf{g}})) = 0,$$

откуда следует нужное заключение. Теорема 1.2 доказана.

Следует отметить, что теорема 1.2 обобщает теорему Арконеса на многомерный случай, но неизвестно, замкнуто ли в слабой топологии в одномерном случае множество распределений измеримых многочленов фиксированной степени выше 2. В связи с этой темой отметим работы [18] и [19], в которых речь идет о некоторых характеристиках, основанных на распределениях квадратичных форм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kusuoka S.* On the absolute continuity of the law of a system of multiple Wiener integral. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1983, v. 30, № 1, p. 191–198.
2. *Nourdin I., Nualart D., Poly G.* Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos. — Electron. J. Probab., 2013, v. 18, № 22, 19 p.
3. *Arcones M.* The class of Gaussian chaos of order two is closed by taking limits in distribution. — Contemp. Math., 1999, v. 234, p. 13–19.
4. *Севастьянов Б. А.* Класс предельных законов распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 3, с. 368–372.
5. *Nourdin I., Poly G.* Convergence in law in the second Wiener/Wigner chaos. — Electron. Comm. Probab., 2012, v. 17, № 36, 12 p.
6. *Shigekawa I.* Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures. — J. Math. Kyoto Univ., 1980, v. 20, № 2, p. 263–289.
7. *Bogachev V. I.* Gaussian Measures. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998, 433 p.
8. *Bogachev V. I.* Differentiable Measures and the Malliavin Calculus. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010, 488 p.

9. *Bogachev V. I.* Gaussian measures on infinite dimensional spaces. — *Real and Stochastic Analysis: Current Trends*. Ed. by M. M. Rao. Singapore: World Scientific Publ., 2014, p. 1–83.
10. *Арутюнян Л. М., Ярославцев И. С.* Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах. — *Докл. РАН*, 2013, т. 449, № 6, с. 627–631.
11. *Юрова Е. В.* О непрерывных сужениях измеримых линейных операторов. — *Докл. РАН*, 2012, т. 443, № 3, с. 300–303.
12. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
13. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
14. *Peccati G., Tudor C. A.* Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. — *Lecture Notes in Math.*, 2005, v. 1857, p. 247–262.
15. *Nourdin I., Peccati G.* Normal Approximations with Malliavin Calculus. From Stein's Method to Universality. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012, 239 p.
16. *Агафонов Б. В., Богачев В. И.* Асимптотические свойства многочленов от гауссовских случайных величин. — *Докл. РАН*, 2009, т. 429, № 1, с. 151–154.
17. *Nourdin I., Poly G.* Convergence in total variation on Wiener chaos. — *Stochastic Process. Appl.*, 2013, v. 123, № 2, p. 651–674.
18. *Christoph G., Prohorov Yu., Ulyanov V.* Characterization and stability problems for finite quadratic forms. — *Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications* (St. Petersburg, 1998). Boston: Birkhäuser Boston, 2001, p. 39–50.
19. *Прохоров Ю. В., Кристоф Г., Ульянов В. В.* О характеристических свойствах квадратичных форм. — *Докл. РАН*, 2000, т. 373, № 2, с. 168–170.

Поступила в редакцию
28.VI.2013