Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, Предельные теоремы о сходимости математических ожиданий функционалов от сумм независимых случайных величин к решениям начально-краевых задач, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 233–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:56:19

© 2014 г. **ИБРАГИМОВ И. А.***, **СМОРОДИНА Н. В.****,
ФАДДЕЕВ М. М.**

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К РЕШЕНИЯМ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ¹⁾**

В работе доказываются предельные теоремы о сходимости математических ожиданий функционалов от некоторых случайных блужданий к решению начально-краевой задачи для уравнения $\partial u / \partial t = (\sigma^2 / 2) \Delta u = 0$, где σ — комплексный параметр, удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$.

Ключевые слова и фразы: начально-краевая задача, предельные теоремы, мера Фейнмана, псевдопроцессы.

1. Постановка задачи. Пусть σ — комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta u \quad (1)$$

(здесь $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^d$). Если σ — вещественное число, то уравнение (1) — это уравнение теплопроводности, а случай $\operatorname{Re} \sigma^2 = 0$ соответствует уравнению Шрёдингера. Таким образом, параметр σ связывает в единое семейство уравнения теплопроводности и Шрёдингера.

Далее, пусть D — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, с гладкой границей ∂D . Для уравнения (1) мы рассмотрим начально-краевую задачу с граничными условиями Дирихле

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u|_{\partial D} = 0. \quad (2)$$

*ПОМИ РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

**Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: nsmorodna@yahoo.com; mmf@ns2691.spb.ru, mmfaddeev@gmail.com

¹⁾ Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00577-а), программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1216.2012.1) и программы фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы математики». Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00487а) и ФЦП Минобрнауки (соглашение № 8501 от 07.09.2012). Работа третьего автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00215а), ФЦП Минобрнауки (соглашение № 8501 от 07.09.2012).

В случае, когда σ — вещественное число, решение начально-краевой задачи (1), (2) допускает вероятностное представление в виде математического ожидания функционала от винеровского процесса, остановленного в момент первого достижения границы ∂D области D . Именно, для каждого $x \in D$ определим процесс $\xi_x(t)$, $t \geq 0$, полагая

$$\xi_x(t) = x + \sigma w(t), \quad (3)$$

где $w(t) = (w_1(t), \dots, w_d(t))$ — вектор, координаты которого суть независимые стандартные винеровские процессы, стартующие из нуля. Через τ обозначим момент первого достижения процессом $\xi_x(t)$ границы области D и определим остановленный в этот момент процесс $\tilde{\xi}_x(t)$, полагая

$$\tilde{\xi}_x(t) = \xi_x(t \wedge \tau).$$

Известно (см. [1], [2]), что для всякой непрерывной на D функции φ функция

$$u(t, x) = \mathbb{E}\varphi(\tilde{\xi}_x(t)) \quad (4)$$

является решением начально-краевой задачи (1), (2), что означает, что семейство одномерных распределений процесса $\tilde{\xi}_x(t)$ есть фундаментальное решение (1),(2). Представление (4) решения начально-краевой задачи называют еще представлением решения в виде функционального интеграла (подробнее про функциональный интеграл см. [6], [7]).

В качестве вероятностного пространства в (4) можно взять пространство $C_0([0, T], \mathbf{R}^d)$ непрерывных функций $h: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ таких, что $h(0) = 0$, с винеровской мерой P_σ . Мера P_σ однозначно продолжается с алгебры цилиндрических множеств на σ -алгебру борелевских множеств $C_0([0, T], \mathbf{R}^d)$. При этом для каждого набора моментов времени $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ и каждого борелевского множества $A \subset (\mathbf{R}^d)^n$ мера $P_\sigma(U_{t_1, \dots, t_n, A})$ цилиндрического множества $U_{t_1, \dots, t_n, A}$ вида

$$U_{t_1, \dots, t_n, A} = \left\{ h \in C_0[0, T]: (h(t_1), h(t_2), \dots, h(t_n)) \in A \right\}$$

равна

$$\frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{nd/2} \prod_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^{1/2}} \int_A \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\|x_j - x_{j-1}\|^2}{t_j - t_{j-1}} \right\} dx_1 \cdots dx_n. \quad (5)$$

Известно [3], что в случае $\text{Im } \sigma \neq 0$ комплексная мера P_σ , которая на цилиндрических множествах задается формулой (5), не продолжается на σ -алгебру борелевских множеств $C_0([0, T], \mathbf{R}^d)$, что приводит к невозможности реализовать в этом случае функциональный интеграл как интеграл по мере в пространстве траекторий. Такие объекты, которые порождают в пространстве траекторий (невероятностную) меру

только на алгебре цилиндрических множеств, носят в литературе название псевдопроцессов. Имеется большое количество результатов о распределении функционалов от псевдопроцессов (см., например, [4], [5]), в частности, имеются результаты, показывающие, что образ конечно-аддитивной меры под действием достаточно гладкого отображения может оказаться уже счетно-аддитивной мерой.

Наиболее известен и изучен частный случай этой конструкции, когда $\operatorname{Re} \sigma^2 = 0$, т.е. когда уравнение (1) является уравнением Шрёдингера. В этом случае конечно-аддитивная мера, которая появляется в представлении решения в виде функционального интеграла, носит название меры Фейнмана. Соответствующий интеграл (интеграл Фейнмана) определяется через предел по измельчающейся последовательности разбиений интервала $[0, T]$. Следует отметить, что данный подход (это же относится и ко всей теории псевдопроцессов) не является в обычном смысле вероятностным, так как в нем отсутствует само понятие вероятностного пространства. Обзор публикаций, посвященных различным подходам к построению интеграла Фейнмана, можно найти в [6]–[10].

Далее, в работе авторов [11] был предложен метод аппроксимации решения одномерной ($d = 1$) начально-краевой задачи (1), (2) математическими ожиданиями функционалов от последовательности сложных пуассоновских процессов, опирающийся на использование традиционных методов теории вероятностей. В этой работе использовались сложные пуассоновские процессы специального вида, у которых распределение величины скачка является гауссовским. Далее в работе [12] этим же методом была построена вероятностная аппроксимация решения начально-краевой задачи (1), (2) уже в пространстве произвольной размерности, при этом, так же как и в [11], использовались сложные пуассоновские процессы с гауссовским распределением величины скачка.

Предложенный в [11] подход основан на использовании формулы (4), но для комплексного σ . Это невозможно сделать непосредственно, так как, во-первых, в этом случае процесс (3) становится комплекснозначным и, соответственно, не имеет смысла говорить о моменте первого достижения границы, а во-вторых, не ясно, как подставить комплексную величину (вектор с комплексными координатами) в аргумент функции φ , которая определена только на D .

Для решения первой проблемы (с моментом остановки) в [11], [12] использовался прием, связанный с продолжением начального данного φ до функции $\tilde{\varphi}$, заданной уже на всем $\mathbf{R}^d$, а для того, чтобы подставить в аргумент функции $\tilde{\varphi}$ комплексный d -мерный вектор, функция $\tilde{\varphi}$ предварительно аппроксимировалась тригонометрическим полиномом.

Далее, в работе [13] рассматривался вопрос вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для уравнения (1). Именно, рассматри-

ваилось уравнение (1) во всем $\mathbf{R}^d$ с начальным данным

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (6)$$

причем предполагалось, что $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$, а начальное данное φ принадлежит соболевскому классу W_2^l при некотором $l \geq 4$.

Чтобы сформулировать основной результат работы [13], нам потребуется ввести дополнительные обозначения. Для $t \geq 0$ через P^t обозначим операторную экспоненту $e^{(t\sigma^2/2)\Delta}$. По определению оператор P^t отображает функцию φ в решение $u(t, \cdot)$ задачи Коши (1), (6). Семейство операторов P^t образует полугруппу, т.е. $P^{t+s} = P^t P^s$ для всех $t, s \geq 0$. Решение задачи Коши (1), (6) представляется в виде свертки с фундаментальным решением, именно,

$$u(t, x) = P^t \varphi(x) = \frac{1}{\sigma^d (2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x + y) e^{-\|y\|^2/(2\sigma^2)} dy. \quad (7)$$

Соответствующее фундаментальное решение является вероятностной мерой только в случае вещественного σ , и в этом случае решение задачи Коши имеет вероятностное представление вида

$$u(t, x) = \mathbf{E} \varphi(x + \sigma \sqrt{t} \xi) = \mathbf{E} \varphi(x + \sigma w(t)), \quad (8)$$

где ξ — гауссовская $\mathbf{R}^d$ -значная случайная величина с единичной матрицей ковариаций, $w(t)$ — стандартный d -мерный винеровский процесс. В случае комплексного σ формула (8) формально не имеет смысла, так как функция φ является функцией вещественного аргумента, но, тем не менее, она может быть использована для вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1), (6). Поясним последнее простым одномерным ($d = 1$) примером.

Рассмотрим для комплексного σ , $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$, интеграл

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x + y) e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy. \quad (9)$$

Этот интеграл для не вещественного σ не имеет явного вероятностного смысла, так как не является математическим ожиданием вида $\mathbf{E} \varphi(\xi)$ ни для какой случайной величины ξ .

Предположим теперь дополнительно, что функция φ ограничена на $\mathbf{R}$ и одновременно продолжается до целой аналитической функции экспоненциального типа. Тогда, поворачивая контур интегрирования, мы получаем

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x + y) e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x + \sigma y) e^{-y^2/2} dy.$$

Последнее выражение представляет собой математическое ожидание

$$\mathbf{E} \psi(\eta),$$

где η — стандартная нормальная случайная величина, а ψ — функция, которая представляет собой сужение на прямую $x + \sigma t$, $t \in \mathbf{R}$, аналитического продолжения функции φ .

Таким образом, мы представили (9) в виде математического ожидания, но уже от другой функции. Для примера, если мы $\varphi(y) = \sin y$ и $\sigma = e^{i\pi/4}$ то, как легко сосчитать,

$$\psi(y) = \sin \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \cosh \frac{y}{\sqrt{2}} + i \cos \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \sinh \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Итак, для вышеуказанного класса функций φ мы имеем

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x+y) e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy = \mathbf{E} \psi(\eta), \quad (10)$$

что позволяет дать вероятностную трактовку интегралу (9).

Таким образом, для не вещественных σ вероятностное представление интеграла (9) имеет место, но для очень узкого класса функций φ . Вероятностная аппроксимация решения может быть получена таким образом при помощи подходящей аппроксимации начального данного φ целой аналитической функцией.

Следующий вопрос, который в данном случае естественно возникает, это вопрос о том, будет ли иметь место сходимость к решению задачи Коши, если мы не только будем аппроксимировать начальное данное целой функцией, но и одновременно заменять нормальную случайную величину какой-то ее аппроксимацией. В силу центральной предельной теоремы естественно в качестве такой аппроксимации выбрать нормированную сумму независимых случайных величин. Приведем здесь соответствующий результат из [13].

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных $\mathbf{R}^d$ -значных случайных величин с симметричным распределением $\mathcal{P}$ каждая. Предполагается, что случайные величины имеют единичную матрицу ковариаций и конечный экспоненциальный момент, т.е. для некоторого $\gamma > 0$

$$\mathbf{E} e^{\gamma \|\xi\|} < \infty. \quad (11)$$

Далее, пусть $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$, — независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с параметром единица. Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \quad (12)$$

С помощью процессов $\zeta_n(t)$ построим последовательность полугрупп операторов, аппроксимирующую полугруппу P^t . С этой целью для каждой (комплекснозначной) функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ и числа $M > 0$ определим функцию φ_M , полагая

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\|p\| \leq M} \widehat{\varphi}(p) e^{-i(p,x)} dp, \quad (13)$$

где, как обычно, $\widehat{\varphi}$ обозначает преобразование Фурье функции φ . Отметим, что при всех $M > 0$ функция φ_M (как функция $x \in \mathbf{C}^d$) является целой аналитической функцией экспоненциального типа. Далее число M выбирается в зависимости от n , $M = M(n)$.

Для натуральных n определим полугруппу операторов P_n^t , полагая для комплекснозначной $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ и $x \in \mathbf{R}^d$

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E} \varphi_M(x + \sigma \zeta_n(t)). \quad (14)$$

Справедливо следующее утверждение [13].

Теорема 1. Пусть $\varphi \in W_2^{2l+4}(\mathbf{R}^d)$, $l \geq 0$, $M(n) = n^{1/4}$. Тогда

$$\sup_{t \in [0, T]} \|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_{W_2^{2l}(\mathbf{R}^d)} \leq C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(\mathbf{R}^d)}}{n},$$

где $C = C(l, d, T)$.

В настоящей работе мы докажем предельные теоремы, аналогичные теореме 1, с оценкой скорости сходимости в соболевских метриках, но не для задачи Коши, а для начально-краевой задачи (1), (2).

2. Основные обозначения. Пусть $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в пространстве $\mathbf{R}^d$. Встречающиеся в выкладках константы обычно обозначаются буквой C , одна и та же буква может обозначать разные константы.

Через $W_2^k(D)$ мы будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на D и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. Через $\mathring{W}_2^k(D)$ мы обозначаем подпространство пространства $W_2^k(D)$, состоящее из тех элементов последнего, которые допускают продолжение нулем за пределы области D до элементов пространства $W_2^k(\mathbf{R}^d)$. Теория пространств Соболева подробно изложена в [16], [18], [19].

3. Задача Дирихле в кубе. В этом пункте мы предположим, что область D — это куб в $\mathbf{R}^d$. Для удобства будем считать, что это куб $[0, \pi]^d$, общий случай сводится к этому с помощью аффинного преобразования. Мы всегда будем предполагать, что (комплекснозначная) функция φ (начальное условие задачи (1), (2)) принадлежит классу $L_2(D)$.

Для $t \geq 0$ через P^t обозначим операторную экспоненту $e^{(t\sigma^2/2)\Delta_{\mathcal{D}}}$, где $\Delta_{\mathcal{D}}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(D)$, заданный на области определения $W_2^{2,0}(D)$, состоящей из элементов пространства $W_2^2(D)$, обращающихся в нуль на границе куба, и действующий как оператор Лапласа.

По определению оператор P^t отображает функцию φ в решение $u(t, \cdot)$ начально-краевой задачи (1), (2). Семейство операторов P^t образует полугруппу (т.е. $P^{t+s} = P^t P^s$ для всех $t, s \geq 0$).

Выпишем явное выражение для полугруппы P^t в виде, удобном для последующих оценок. Для каждой функции $\varphi \in L_2(D)$ через φ^{odd} обозначим ее нечетное (по каждой переменной) продолжение с $[0, \pi]^d$ на $[-\pi, \pi]^d$. Разложим функцию φ^{odd} в ряд Фурье:

$$\varphi^{\text{odd}}(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} B_m e^{i(m, x)}. \quad (15)$$

Используя метод разделения переменных, получаем

$$P^t \varphi(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} B_m e^{-\sigma^2 t \|m\|^2 / 2} e^{i(m, x)}. \quad (16)$$

Отметим, что из условия $\text{Re } \sigma^2 \geq 0$ следует, что

$$|e^{-\sigma^2 t \|m\|^2 / 2}| \leq 1. \quad (17)$$

Следующим шагом с помощью последовательности случайных процессов (12) построим последовательность полугрупп операторов, аппроксимирующую полугруппу P^t . Введем необходимые обозначения. Для каждого $M > 0$ через $\mathcal{H}_M$ обозначим проектор в $L_2([-\pi, \pi]^d)$ на линейное подпространство $\mathcal{L}(e_m, \|m\| \leq M)$, где

$$e_m(x) = e^{i(m, x)}.$$

При этом функция

$$\varphi_M(x) = \mathcal{H}_M \varphi^{\text{odd}}(x) = \sum_{\|m\| \leq M} B_m e^{i(m, x)} \quad (18)$$

является тригонометрическим полиномом и, соответственно, определена на всем $\mathbf{C}^d$. Далее число M мы будем выбирать в зависимости от n , $M = M(n)$.

Для натуральных n определим полугруппу операторов P_n^t , полагая для комплекснозначной $\varphi \in L_2(D)$ и $x \in \mathbf{R}^d$

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E} \varphi_M(x + \sigma \zeta_n(t)) \quad (19)$$

(процесс $\zeta_n(t)$ определен в (12)).

Для каждого $l = 0, 1, 2 \dots$ через H_D^{2l} обозначим пространство функций $\varphi: [0, \pi]^d \rightarrow \mathbf{C}$ таких, что сходится ряд $\sum_{m \in \mathbf{Z}^d} |B_m|^2 \|m\|^{4l}$. На пространстве H_D^{2l} введем норму, полагая

$$\|\varphi\|_{H_D^{2l}}^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} |B_m|^2 \|m\|^{4l}.$$

Легко показать, что H_D^{2l} является замкнутым подпространством $W_2^{2l}(D)$, более того, норма $\|\cdot\|_{H_D^{2l}}$ эквивалентна на этом подпространстве норме $\|\cdot\|_{W_2^{2l}(D)}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in H_D^{2l+4}$, $l \geq 0$, $M(n) = n^{1/4}$. Тогда

$$\sup_{t \in [0, T]} \|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_{W_2^{2l}(D)} \leq C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(D)}}{n},$$

где $C = C(l, d, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем, что для каждого $m \in \mathbf{Z}^d$

$$\mathbf{E} e^{i(m, \sigma \zeta_n(t))} = \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m, y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\}. \quad (20)$$

Из (18), (19) и (20) следует, что

$$P_n^t \varphi(x) = \sum_{\|m\| \leq M} B_m \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m, y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} e^{i(m, x)}. \quad (21)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & \|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_{W_2^{2l}}^2 \\ & \leq C \sum_{\|m\| \leq M} \|m\|^{4l} |B_m|^2 \left| \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m, y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \|m\|^2 t}{2} \right\} \right|^2 \\ & + C \sum_{\|m\| > M} \|m\|^{4l} |B_m|^2 \left| \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \|m\|^2 t}{2} \right\} \right|^2 \\ & = A_1 + A_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где A_1 и A_2 обозначают соответственно первую и вторую суммы в правой части неравенства (22).

Оценим сначала слагаемое A_2 . Используя (17), получим

$$\begin{aligned} A_2 & \leq C \sum_{\|m\| > M} \|m\|^{4l} |B_m|^2 \\ & \leq \frac{C}{M^8} \sum_{\|m\| > M} \|m\|^{4l+8} |B_m|^2 \leq C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}}^2}{M^8} = C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}}^2}{n^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь оценим слагаемое A_1 . Заметим прежде всего, что суммирование в A_1 ведется по множеству $\|m\| \leq M$ и, тем самым, справедливо неравенство

$$\frac{\|m\|}{\sqrt{n}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{1/4}}. \quad (24)$$

Напомним, что по условию случайная величина ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций, поэтому, снова используя (17), получим

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(p,m)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - \exp \left\{ - \frac{\sigma^2 \|m\|^2 t}{2} \right\} \right| \\ & \leq \left| \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 + \frac{\sigma^2 \|m\|^2}{2n} \right) \right\} - 1 \right| \\ & = \left| \exp \left\{ nt \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right\} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

Представим теперь интеграл, стоящий под экспонентой в правой части (25), в виде суммы двух интегралов — по области $\|y\| \leq n^{1/4}$ и по дополнительной области $\|y\| > n^{1/4}$, после чего воспользуемся элементарным неравенством

$$|ab - 1| \leq |a - 1| \cdot |b| + |b - 1|.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left\{ nt \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right\} - 1 \right| \\ & \leq \left| \exp \left\{ nt \int_{\|y\| \leq n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right\} - 1 \right| \\ & \quad \times \left| \exp \left\{ nt \int_{\|y\| > n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right\} \right| \\ & \quad + \left| \exp \left\{ nt \int_{\|y\| > n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right\} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (26)$$

Интеграл

$$\int_{\|y\| > n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y)$$

легко оценивается, именно, из условия (11) и неравенства (24) следует, что для любого $N > 0$ найдется константа $C > 0$ такая, что

$$\left| \int_{\|y\| > n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right| \leq Cn^{-N}. \quad (27)$$

Оценим теперь интеграл

$$\int_{\|y\| \leq n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y).$$

Так как по условию случайная величина ξ_1 имеет симметричное распределение, то мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\|y\| \leq n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \\ &= \int_{\|y\| \leq n^{1/4}} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 - \frac{i\sigma(m,y)}{\sqrt{n}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} + \frac{i\sigma^3(m,y)^3}{6n^{3/2}} \right) d\mathcal{P}(y). \end{aligned} \quad (28)$$

В области $\|y\| \leq n^{1/4}$ в силу (24) справедливо неравенство

$$\left| e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 - \frac{i\sigma(m,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} + \frac{i\sigma^3(m,y)^3}{6n^{3/2}} \right| \leq C \frac{\|m\|^4 \|y\|^4}{n^2}. \quad (29)$$

Теперь, комбинируя (25), (27) и (29), получаем оценку

$$\left| \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - e^{-\sigma^2 \|m\|^2 t/2} \right| \leq C \frac{\|m\|^4}{n}. \quad (30)$$

Далее, используя (30), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= C \sum_{\|m\| \leq M} \|m\|^{4l} |B_m|^2 \left| \exp \left\{ nt \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - e^{-\sigma^2 \|m\|^2 t/2} \right|^2 \\ &\leq \frac{C}{n^2} \sum_{\|m\| \leq M} \|m\|^{4l+8} |B_m|^2 \leq \frac{C}{n^2} \|\varphi\|_{W_2^{2l+4}}^2. \end{aligned}$$

Наконец, из последней оценки, (22) и (23) следует утверждение теоремы.

4. Задача Дирихле в ограниченной области с гладкой границей. Пусть D_0 — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, с границей ∂D_0 , принадлежащей классу C^∞ .

Выберем такой куб D , что его внутренность содержит замыкание множества D_0 . Как и выше, для простоты мы предположим, что $D = [0, \pi]^d$.

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения, а $s_1(x), s_2(x), \dots$ — соответствующие собственные функции оператора $-\Delta$ в D_0 с нулевыми

граничными условиями (именно, самосопряженного оператора $-\Delta_{D_0}$, действующего в пространстве $L_2(D_0)$ и заданного на области определения $W_2^{2,0}(D_0)$). Это значит, что для каждого $j = 1, 2, \dots$ функция s_j является решением начально-краевой задачи (с $\lambda = \lambda_j$)

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_{\partial D_0} = 0.$$

Нормируем функции s_j так, что для каждого $j \in \mathbf{N}$

$$\|s_j\|_{L_2(D_0)} = 1. \quad (31)$$

Известна асимптотика собственных значений λ_j при $j \rightarrow \infty$, полученная Г. Вейлем (см. [15, с. 205, формула (17.3.6)]). Именно, существует такая константа C , что

$$\lambda_j \sim Cj^{2/d}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Собственные функции $\{s_j\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(D_0)$, и, тем самым, всякая функция $\varphi \in L_2(D_0)$ раскладывается в ряд (сходящийся по норме $L_2(D_0)$)

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j(x). \quad (33)$$

Для $l \in \mathbf{N}$ через $H_{D_0}^{2l}$ обозначим множество функций $\varphi: D_0 \rightarrow \mathbf{C}$ таких, что сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 j^{4l/d}$.

На пространстве $H_{D_0}^{2l}$ введем норму, полагая

$$\|\varphi\|_{H_{D_0}^{2l}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 j^{4l/d}. \quad (34)$$

Покажем, что на $H_{D_0}^{2l}$ норма $\|\cdot\|_{H_{D_0}^{2l}}$ эквивалентна соболевской норме $\|\cdot\|_{W_2^{2l}(D_0)}$.

Лемма 1. *Существуют такие положительные константы $C_1 = C_1(D_0)$, $C_2 = C_2(D_0)$, что для каждого $\varphi \in H_{D_0}^{2l}$*

$$C_1 \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq \|\varphi\|_{H_{D_0}^{2l}} \leq C_2 \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)}.$$

Доказательство. В силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H_{D_0}^{2l}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 j^{4l/d} \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \lambda_j^{2l} \right)^{1/2} \\ &= C \|\Delta^l \varphi\|_{L_2(D_0)} \leq C \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, второе неравенство доказано. Для доказательства первого неравенства воспользуемся теоремой 5.1 из [14, гл. 2] (см. также [20, теорема 7.1.3]) о повышении гладкости решений уравнения эллиптического типа в области. Применительно к нашей задаче указанные теоремы означают справедливость оценки $\|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq C(\|\Delta^l \varphi\|_{L_2(D_0)} + \|\varphi\|_{L_2(D_0)})$. Поэтому

$$\|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^{2l} + 1) |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{4l/d} |a_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает, что $H_{D_0}^{2l}$ является замкнутым подпространством $W_2^{2l}(D_0)$. Заметим, что в случае, когда число l достаточно большое, именно $4l > d$, в силу классической теоремы вложения Соболева (см., например, [18], [19]) оператор вложения $W_2^{2l}(D_0) \subset C(D_0)$ ограничен, так что все функции из $H_{D_0}^{2l}$ непрерывны.

Как и выше, для $t \geq 0$ через P_0^t обозначим операторную экспоненту $e^{(t\sigma^2/2)\Delta_{D_0}}$. Используя метод разделения переменных, нетрудно показать, что оператор P_0^t действует на функцию $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j(x)$ следующим образом:

$$P_0^t \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j(x), \quad (35)$$

другими словами, функция $u(t, x) = P_0^t \varphi(x)$ есть единственное решение уравнения (1) с начально-краевыми условиями $u(0, x) = \varphi(x)$, $u|_{\partial D_0} = 0$. При этом из условия $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$ вытекает, что при всех $j \in \mathbf{N}$ выполнено

$$|e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2}| \leq 1. \quad (36)$$

Как известно (см., например, [17, гл. 6], [19, 4.3, §10]), всякую функцию, принадлежащую пространству $W_2^k(D_0)$ в области D_0 с гладкой границей, можно продолжить за пределы этой области с сохранением класса. Именно, если замыкание области D_0 содержится во внутренней области D_1 , то существует ограниченный оператор $\Pi: W_2^k(D_0) \rightarrow \overset{\circ}{W}_2^k(D_1)$ такой, что $(\Pi u)(x) = u(x)$ при всех $u \in W_2^k(D_0)$, $x \in D_0$. Введем в наши рассмотрения оператор продолжения (здесь $D = [0, \pi]^d$)

$$\Pi: W_2^{2l+4}(D_0) \rightarrow \overset{\circ}{W}_2^{2l+4}(D). \quad (37)$$

Пусть $\mathcal{H}_M$, как и выше, обозначает оператор проектирования (18), а $\widetilde{\mathcal{H}}_J$ обозначает проектор в $L_2(D_0)$ на линейную оболочку $\mathcal{L}(s_1, \dots, s_J)$. Далее у нас M и J будут зависеть от n : $M = M(n)$, $J = J(n)$.

Введем еще одно обозначение. Для каждой функции $\varphi \in L_2(D_0)$ через $\varphi_{M,J}$ будем обозначать функцию (тригонометрический полином)

$$\varphi_{M,J}(x) = \mathcal{H}_M \left(\Pi \widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi \right)^{\text{odd}}(x), \quad (38)$$

т.е. сначала мы проектируем φ на $\mathcal{L}(s_1, \dots, s_J)$ (получившаяся функция автоматически оказывается принадлежащей пространству $W_2^{2l+4}(D_0)$), затем продолжаем получившуюся функцию оператором продолжения Π на $D = [0, \pi]^d$, продолжаем нечетным образом на $[-\pi, \pi]^d$ и, наконец, проектируем на $\mathcal{L}(e_m, \|m\| \leq M)$.

Определим теперь семейство операторов (не полугруппу) Q_n^t , $t \geq 0$, полагая для $\varphi \in L_2(D_0)$, $x \in D_0$

$$Q_n^t \varphi(x) = \mathbf{E} \varphi_{M,J}(x + \sigma \zeta_n(t)). \quad (39)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in H_{D_0}^{2l+4}$, $l \geq 0$, $J(n) = n^{2d/d+16}$, $M(n) = \varepsilon_0 n^{1/2}$, где ε_0 — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $|\sigma| \varepsilon_0 < \gamma$. Тогда

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(Q_n^{t/n})^n \varphi - P_0^t \varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(D_0)}}{n^{1/(2+d/8)}},$$

где $C = C(l, d, T, D_0)$.

Доказательство. Посмотрим сначала на продолжения собственных функций. Пусть Πs_j — продолжение собственной функции s_j . Как и выше, $(\Pi s_j)^{\text{odd}}$ будет обозначать нечетное продолжение функции Πs_j с $D = [0, \pi]^d$ на $[-\pi, \pi]^d$. Разложим функцию $(\Pi s_j)^{\text{odd}}$ в ряд Фурье:

$$(\Pi s_j)^{\text{odd}}(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} K_m^j e^{i(m, x)}. \quad (40)$$

Лемма 2. Существует $C = C(d, l) > 0$ такое, что

$$\left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} |K_m^j|^2 \|m\|^{4l+8} \right)^{1/2} \leq C j^{(2l+4)/d}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} |K_m^j|^2 \|m\|^{4l+8} \right)^{1/2} = C \|\Delta^{l+2} \Pi s_j\|_{L_2(D)} \leq C \|\Pi s_j\|_{W_2^{2l+4}(D)}.$$

Воспользуемся непрерывностью оператора продолжения и теоремой 5.1 из [14, гл. 2]. Получим

$$\begin{aligned} \|\Pi s_j\|_{W_2^{2l+4}(D)} &\leq C \|s_j\|_{W_2^{2l+4}(D_0)} \leq C \|\Delta^{l+2} s_j\|_{L_2(D_0)} \\ &\leq C \lambda_j^{l+2} \leq C j^{(2l+4)/d}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Итак, пусть $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j$. Тогда $\widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi = \sum_{j=1}^J a_j s_j$ и в силу (40) для $x \in D$ выполнено

$$\Pi \widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}^d} K_m^j e^{i(m,x)} \right). \quad (41)$$

Заметим, что на D_0 функции $\widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi$ и $\Pi \widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi$ совпадают, значит, для $x \in D_0$ мы имеем

$$\sum_{j=1}^J a_j s_j(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}^d} K_m^j e^{i(m,x)} \right), \quad (42)$$

а применяя оператор Лапласа к левой и правой частям (42), получаем, что для $x \in D_0$ также справедливо

$$\sum_{j=1}^J a_j \lambda_j s_j(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}^d} K_m^j \|m\|^2 e^{i(m,x)} \right). \quad (43)$$

Далее, в силу (41) имеем

$$\varphi_{M,J}(x) = \mathcal{H}_M \left(\Pi \widetilde{\mathcal{H}}_J \varphi \right)^{\text{odd}}(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} K_m^j e^{i(m,x)} \right).$$

Теперь, используя (20), получаем

$$\begin{aligned} Q_n^{t/n} \varphi(x) &= \mathbf{E} \varphi_{M,J} \left(x + \sigma \zeta_n \left(\frac{t}{n} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} K_m^j \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} e^{i(m,x)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} K_m^j e^{i(m,x)} \right) - \frac{\sigma^2 t}{2n} \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} \|m\|^2 K_m^j e^{i(m,x)} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} \left[K_m^j \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 1 + \frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right] e^{i(m,x)} \right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношений (41), (42) следует, что

$$\begin{aligned} Q_n^{t/n} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^J a_j s_j(x) - \frac{\sigma^2 t}{2n} \sum_{j=1}^J a_j \lambda_j s_j(x) - \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| > M} K_m^j e^{i(m,x)} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 t}{2n} \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| > M} \|m\|^2 K_m^j e^{i(m,x)} \right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^J a_j \left(\sum_{\|m\| \leq M} K_m^j \left[\exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - 1 + \frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right] e^{i(m,x)} \right). \quad (44)$$

Таким образом,

$$Q_n^{t/n} \varphi(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(1 - \frac{\sigma^2 t \lambda_j}{2n} \right) s_j(x) + A_1(x) + A_2(x) + A_3(x),$$

где A_1, A_2, A_3 обозначают соответственно три последних слагаемых в (44). Следующим шагом оценим $W_2^{2l}(D_0)$ -норму слагаемых A_1, A_2, A_3 . Имеем

$$-A_1(x) = \sum_{j=1}^J a_j b_j^1(x), \quad \text{где } b_j^1(x) = \sum_{\|m\| > M} K_m^j e^{i(m,x)}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \|b_j^1\|_{W_2^{2l}(D_0)} &\leq \|b_j^1\|_{W_2^{2l}([- \pi, \pi]^d)} = C \left(\sum_{\|m\| > M} |K_m^j|^2 \|m\|^{4l} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{M^4} \left(\sum_{\|m\| > M} |K_m^j|^2 \|m\|^{4l+8} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \|s_j\|_{W_2^{2l+4}(D_0)} \leq \frac{C j^{(2l+4)/d}}{n^2} \end{aligned} \quad (45)$$

(на последнем шаге мы воспользовались оценкой леммы 2).

Далее, имеем $A_2(x) = \sum_{j=1}^J a_j b_j^2(x)$, где

$$b_j^2(x) = \frac{\sigma^2 t}{2n} \sum_{\|m\| > M} \|m\|^2 K_m^j e^{i(m,x)}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к оценке

$$\|b_j^2\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq \frac{C j^{(2l+4)/d}}{n^2}. \quad (46)$$

Наконец, мы имеем $A_3(x) = \sum_{j=1}^J a_j b_j^3(x)$, где

$$\begin{aligned} b_j^3(x) &= \sum_{\|m\| \leq M} K_m^j \left[\exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - 1 + \frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right] e^{i(m,x)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Соответствующая оценка здесь менее очевидна, мы сформулируем ее в виде отдельной леммы.

Лемма 3. Для некоторого $C > 0$ справедлива оценка

$$\|b_j^3\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq \frac{Cj^{(2l+4)/d}}{n^2}.$$

Доказательство. Оценим сначала выражение, стоящее в (47) в квадратных скобках. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - 1 + \frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right| \\ & \leq \left| \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right\} \right| \\ & \quad + \left| \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right\} - 1 + \frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right|. \end{aligned} \quad (48)$$

Так как у нас по условию $\|m\|^2/n \leq \varepsilon_0$, то второе слагаемое в правой части (48) оценивается сверху величиной $C\|m\|^4/n^2$. Оценим теперь первое слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right\} - \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t \|m\|^2}{2n} \right\} \right| \\ & \leq \left| \exp \left\{ t \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right) \right\} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (49)$$

Оценим теперь интеграл, стоящий под знаком экспоненты в правой части формулы (49). Так как по условию распределение $\mathcal{P}$ симметрично, а $|\sigma|_{\varepsilon_0} < \gamma$, то мы имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right| \\ & = \left| \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i\sigma(m,y)/\sqrt{n}} - 1 - \frac{i\sigma(m,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2(m,y)^2}{2n} + \frac{i\sigma^3(m,y)^3}{6n^{3/2}} \right) d\mathcal{P}(y) \right| \\ & \leq C \frac{\|m\|^4}{n^2}. \end{aligned}$$

Из последней оценки немедленно следует, что первое слагаемое в правой части (48) также оценивается сверху величиной $C\|m\|^4/n^2$. Далее, рассуждая также, как при доказательстве неравенства (45), получаем утверждение леммы.

Из (45), (46) и леммы 3 следует, что $A_1 + A_2 + A_3 = \sum_{j=1}^J a_j b_j$, причем

$$\|b_j\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq \frac{Cj^{(2l+4)/d}}{n^2},$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2 + A_3\|_{W_2^{2l}(D_0)} &\leq \frac{C}{n^2} \sum_{j=1}^J |a_j| j^{(2l+4)/d} \leq \frac{C J^{1/2+4/d}}{n^2} \left(\sum_{j=1}^J |a_j|^2 j^{4l/d} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C J^{1/2+4/d}}{n^2} \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &= \frac{C}{n^{1+8/(d+16)}} \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, мы получили представление оператора $Q_n^{t/n}$ в виде

$$Q_n^{t/n} = G_n + R_n, \quad (51)$$

где G_n — диагональный (в базисе $\{s_j\}$) оператор вида

$$G_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^J a_j \left(1 - \frac{\sigma^2 t \lambda_j}{2n} \right) s_j(x), \quad (52)$$

а для операторной нормы оператора $R_n: W_2^{2l}(D_0) \rightarrow W_2^{2l}(D_0)$ в силу (50) мы имеем оценку

$$\|R_n\|_{W_2^{2l}(D_0) \rightarrow W_2^{2l}(D_0)} \leq \frac{C}{n^{1+8/(d+16)}}. \quad (53)$$

Далее, в силу (51) имеем

$$\begin{aligned} \left\| (Q_n^{t/n})^n \varphi - P_0^t \varphi \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} &\leq \left\| (G_n + R_n)^n \varphi - \sum_{j=1}^J a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &\quad + \left\| \sum_{j=J+1}^{\infty} a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &\leq \left\| (G_n)^n \varphi - \sum_{j=1}^J a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^n T_{k,n} \varphi \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &\quad + \left\| \sum_{j=J+1}^{\infty} a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j \right\|_{W_2^{2l}(D_0)}, \end{aligned} \quad (54)$$

где $T_{k,n}$ обозначает сумму всевозможных произведений операторов G_n и R_n , содержащих R_n ровно k раз. Обозначим теперь через V_1, V_2, V_3 соответственно первое, второе и третье слагаемые в правой части (54). Оценим сначала V_3 . Имеем

$$V_3 \leq \left(\sum_{j=J+1}^{\infty} |a_j|^2 j^{4l/d} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{J^{4/d}} \left(\sum_{j=J+1}^{\infty} |a_j|^2 j^{(4l+8)/d} \right)^{1/2} \leq \frac{C \|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(D_0)}}{n^{1/(2+d/8)}}. \quad (55)$$

Оценим теперь V_2 . Операторная норма (из $W_2^{2l}(D_0)$ в $W_2^{2l}(D_0)$) оператора $T_{k,n}$ оценивается сверху величиной

$$\binom{n}{k} \|G_n\|^{n-k} \|R_n\|^k,$$

при этом из условия $\operatorname{Re} \sigma^2 \geq 0$ следует, что $\|G_n\| \leq 1$. Таким образом, в силу (53)

$$\begin{aligned} V_2 &= \left\| \sum_{k=1}^n T_{k,n} \varphi \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \leq \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \left\| \sum_{k=1}^n T_{k,n} \right\| \\ &\leq \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \|R_n\|^k = \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} ((1 + \|R_n\|)^n - 1) \\ &= \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} (e^{n \ln(1 + \|R_n\|)} - 1) \leq \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} (e^{n \|R_n\|} - 1) \\ &\leq C \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)} \cdot n \|R_n\| \leq \frac{C \|\varphi\|_{W_2^{2l}(D_0)}}{n^{1/(2+d/8)}} \leq \frac{C \|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(D_0)}}{n^{1/(2+d/8)}}. \end{aligned}$$

Осталось оценить слагаемое V_1 . Используя неравенство ($n \geq 2$)

$$\left| e^{-z} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq C \frac{|z|^2}{n},$$

справедливое для комплексных z , удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} z \geq 0$, $|z|^2 \leq n/2$, получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\| \sum_{j=1}^J a_j \left(1 - \frac{\sigma^2 t \lambda_j}{2n}\right)^n s_j - \sum_{j=1}^J a_j e^{-\sigma^2 t \lambda_j / 2} s_j \right\|_{W_2^{2l}(D_0)} \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^J |a_j|^2 j^{4l/d} \left| e^{-\frac{\sigma^2 t \lambda_j}{2}} - \left(1 - \frac{\sigma^2 t \lambda_j}{2n}\right)^n \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{n} \left(\sum_{j=1}^J |a_j|^2 j^{4l/d} \lambda_j^4 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{n} \|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(D_0)}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chung K. L., Zhao Z.* From Brownian Motion to Schrodinger's Equation. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
2. *Freidlin M.* Functional Integration and Partial Differential Equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985, 545 p.
3. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах. М.: Наука, 1983, 383 с.
4. *Beghin L., Orsingher E.* The distribution of the local time for «pseudoprocess» and its connection with fractional diffusion equations. — Stochastic Process. Appl., 2005, v. 115, № 6, с. 1017–1040.
5. *Lachal A.* First hitting time and place for pseudo-processes driven by the equation $\partial/\partial t = \pm \partial^N/\partial x^N$ subject to a linear drift. — J. Stochastic Process. Appl., 2008, v. 118, № 1, p. 1–27.
6. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984, 445 с.
7. *Руд М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978.
8. *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976, 191 с.
9. *Маслов В. П., Чеботарев А. М.* Определение континуального интеграла Фейнмана в p -представлении. — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 37–38.
10. *Чеботарев А. М.* О представлении решения уравнения Шрёдингера в виде математического ожидания функционалов скачкообразного процесса. — Матем. заметки, 1978, т. 24, № 5, с. 699–706.
11. *Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М.* Вероятностный подход к построению решений одномерных начально-краевых задач. — Теория вероятн. и ее примен., 2013, т. 58, в. 2, с. 255–281.
12. *Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M.* The probabilistic approximation of the Dirichlet initial boundary value problem solution for the equation $\partial u/\partial t = (\sigma^2/2)\Delta u$ with a complex parameter σ . — Markov Process. Related Fields (в печати).
13. *Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М.* Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = (\sigma^2/2)\Delta u$ с комплексным параметром σ . — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2013, т. 420, с. 88–102.
14. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
15. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2. М.: ИЛ, 1961, 555 с.
16. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 736 с.
17. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.
18. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 5. М.: Наука, 1959, 655 с.
19. *Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. и др.* Избранные главы анализа и высшей алгебры. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981, 200 с.
20. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013, 378 с.

Поступила в редакцию
18.XII.2013