Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. МIRONЮК, Г. М. Фельдман, Независимые линейные статистики на цилиндрах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 252–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:47:01

© 2014 г.

МИРОНЮК М. В.*, ФЕЛЬДМАН Г. М.*

НЕЗАВИСИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИКИ НА ЦИЛИНДРАХ

Пусть либо $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, либо $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$, где $\mathbf{R}$ — группа вещественных чисел, $\mathbf{T}$ — группа вращений окружности, Σ_a — m -адический солениод. Пусть α_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, — топологические автоморфизмы группы X . Доказан следующий аналог теоремы Скитовича–Дармуа для группы X . Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j такими, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Если линейные статистики $L_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3$, $L_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3$, $L_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3$ независимы, то все μ_j — гауссовские распределения.

Ключевые слова и фразы: независимые линейные статистики, гауссовское распределение, локально компактная абелева группа.

1. Введение. В. П. Скитовичем и Ж. Дармуа была доказана следующая теорема, характеризующая гауссовские распределения на вещественной прямой.

Теорема А ([1], [2], см. также [3, гл. 3]). Пусть ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины и α_j, β_j — ненулевые константы. Если линейные статистики $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ независимы, то случайные величины ξ_j — гауссовские.

Групповым аналогом теоремы Скитовича–Дармуа посвящено большое число исследований (см., например, [4]–[15], а также [16], где можно найти дополнительные ссылки). В частности, в [11] была доказана следующая теорема.

Теорема В. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Предположим, что группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной группе вращений окружности. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в X , имеющие не обращающиеся в нуль характеристические функции. Пусть α_j, β_j — топологические автоморфизмы группы X . Если линейные статистики $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ независимы, то случайные величины ξ_j — гауссовские.

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина; e-mail: myronyuk@ilt.kharkov.ua; feldman@ilt.kharkov.ua

Пусть $\mathbf{T}$ обозначает группу вращений окружности (одномерный тор), т.е. $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\}$. Как было замечено в [17], теорема В неверна на группе $\mathbf{T}$ уже для двух линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$. Отсюда следует, что если группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$, то класс распределений, характеризующийся независимостью линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$, вообще говоря, содержит не только гауссовские распределения. Другими словами, для групп, содержащих подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$, теорема Скитовича–Дармуа неверна, если рассматривать две линейные статистики от двух независимых случайных величин.

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующего достаточно неожиданного результата. Мы докажем, что для некоторых локально компактных абелевых групп, содержащих подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$, теорема Скитовича–Дармуа верна, если рассматривать три линейные статистики от трех независимых случайных величин.

Рассмотрим следующую общую задачу.

Задача 1. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j такими, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Пусть α_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, — топологические автоморфизмы группы X . Предположим, что линейные статистики $L_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \dots + \alpha_{in}\xi_n$, $i = 1, 2, \dots, n$, независимы. Описать распределения μ_j .

Как следует из теоремы В, если выполнены условия задачи 1 и группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbf{T}$, то μ_j — гауссовские распределения. Поэтому содержательная часть задачи 1 относится к случаю, когда группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$.

Отметим, что, как доказано в [11], решение задачи 1 может быть сведено к ее решению для связной локально компактной абелевой группы, одной из характеристик которой является ее размерность. Если размерность группы X равна 1 и группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$, то $X \cong \mathbf{T}$. Как доказано в [18], в условиях задачи 1 при $n = 2$ распределения μ_j являются либо гауссовскими, либо свертками гауссовских распределений с зарядами, сосредоточенными на подгруппе, порожденной элементом порядка 2.

Предположим теперь, что размерность группы X равна 2 и группа X содержит подгруппу, топологически изоморфную $\mathbf{T}$. Тогда группа X топологически изоморфна одной из следующих групп: $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$, где $\mathbf{R}$ — группа вещественных чисел, $\Sigma_a \times \mathbf{T}$, где Σ_a — a -адический

соленоид, и $\mathbf{T}^2$. Для групп $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$ и $\Sigma_a \times \mathbf{T}$ при $n = 2$ задача 1 была решена в работе [15]. Оказалось, что, так же как и в случае $X = \mathbf{T}$, распределения μ_j являются либо гауссовскими, либо свертками гауссовских распределений с зарядами, сосредоточенными на подгруппе, порожденной элементом порядка 2 в подгруппе $\mathbf{T}$. Для группы $\mathbf{T}^2$ при $n = 2$ полностью решить задачу 1 не удалось, но удалось описать все топологические автоморфизмы α_j, β_j группы $\mathbf{T}^2$ такие, что из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ следует, что распределения μ_j — гауссовские [12].

Насколько нам известно, задача 1 при $n > 2$ ранее не изучалась. Более того, во всех предыдущих работах, посвященных теореме Скитовича–Дармуа на группах, рассматривались две линейные статистики от $n \geq 2$ независимых случайных величин. Но в групповой ситуации, в отличие от классической, рассмотрение двух линейных статистик от $n > 2$ независимых случайных величин, вообще говоря, не дает возможности характеризовать гауссовские распределения или их аналоги (см., например, [16, § 14]). Как вытекает из доказанных в статье теорем 1 и 2, ситуация меняется, если рассматривать n линейных статистик от n независимых случайных величин.

В настоящей статье мы полностью решаем задачу 1 в случае $n = 3$ для группы $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$, а затем, опираясь на полученный результат, и для группы $\Sigma_a \times \mathbf{T}$. Ответ оказывается весьма неожиданным: распределения μ_j должны быть гауссовскими. Другими словами, если мы будем рассматривать три линейные статистики от трех независимых случайных величин, то для указанных групп снова верна теорема Скитовича–Дармуа. Подчеркнем, что, как отмечено выше, если рассматривать две линейные статистики от двух независимых случайных величин, то для указанных групп распределения μ_j могут быть как гауссовскими, так и свертками гауссовских распределений с зарядами, т.е. в этом случае теорема Скитовича–Дармуа неверна. Кроме того, мы видим, что на таких группах, в отличие от классической ситуации, класс распределений, характеризующийся независимостью n линейных статистик от n независимых случайных величин, зависит от n .

2. Обозначения и определения. Формулировка основной теоремы. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, Y — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$, $\text{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X . Если H — подгруппа группы Y , то обозначим через $A(X, H) = \{x \in X : (x, y) = 1 \text{ для любого } y \in H\}$ ее аннулятор. Если X_1 и X_2 — локально компактные абелевы группы, то для любого непрерывного гомоморфизма $\alpha: X_1 \mapsto X_2$ определим сопряженный гомоморфизм $\tilde{\alpha}: Y_2 \mapsto Y_1$ формулой $(x_1, \tilde{\alpha}y_2) = (\alpha x_1, y_2)$ для всех

$x_1 \in X_1, y_2 \in Y_2$. Обозначим через $\mathbf{Z}(2)$ подгруппу в $\mathbf{T}$, состоящую из элементов ± 1 , через $\mathbf{Z}$ — группу целых чисел. Обозначим через I тождественный автоморфизм группы. Положим $Y^{(2)} = \{2y: y \in Y\}$. Пусть $f(y)$ — функция на группе Y , h — произвольный элемент Y . Обозначим через Δ_h оператор конечной разности

$$\Delta_h f(y) = f(y + h) - f(y).$$

Многочленом на группе Y называется функция $f(y)$ такая, что при некотором n выполнено равенство

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0$$

для всех $y, h \in Y$. Минимальное n , при котором выполнено это равенство, называется степенью многочлена $f(y)$. Если A и B — подмножества в X , то положим $A + B = \{x \in X: x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Сверточную полугруппу вероятностных распределений на X обозначим $M^1(X)$. Характеристическую функцию распределения $\mu \in M^1(X)$ определим формулой

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x), \quad y \in Y.$$

Для $\mu \in M^1(X)$ определим распределение $\bar{\mu} \in M^1(X)$ по формуле $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$ для всех борелевских множеств B в X . Заметим, что $\widehat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Носитель распределения $\mu \in M^1(X)$ обозначим $\sigma(\mu)$. Отметим, что если H — замкнутая подгруппа в Y и $\hat{\mu}(y) = 1$ при $y \in H$, то $\sigma(\mu) \subset A(X, H)$. Будем говорить, что распределение $\mu \in M^1(X)$ сосредоточено на борелевском множестве $A \subset X$, если $\mu(B) = 0$ для любого борелевского множества B в X такого, что $B \cap A = \emptyset$. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$.

Распределение $\gamma \in M^1(X)$ называется гауссовским ([19], см. также [20, гл. IV]), если его характеристическая функция имеет вид

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y , удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u, v \in Y. \quad (1)$$

Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X . Отметим, что согласно этому определению вырожденные распределения являются гауссовскими.

Пусть $X = \mathbf{T}$. Тогда $Y \cong \mathbf{Z}$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $Y = \mathbf{Z}$. Пусть $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$. Элементы группы X будем

обозначать $x = (t, z)$, $t \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{T}$. Если $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, то $Y \cong \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать, что $Y = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, а элементы группы Y обозначать $y = (s, n)$, $s \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$. Легко проверить, что каждый автоморфизм $\varepsilon \in \text{Aut}(Y)$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & p \end{pmatrix}$, где $a, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $p = \pm 1$, и ε действует на Y следующим образом:

$$\varepsilon(s, n) = (as + cn, pn), \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тогда сопряженный автоморфизм $\delta = \tilde{\varepsilon} \in \text{Aut}(X)$ имеет вид

$$\delta(t, z) = (at, e^{ict} z^p), \quad t \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{T}.$$

Мы будем отождествлять автоморфизмы δ и ε с матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & p \end{pmatrix}$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, $\alpha_{ij} \in \text{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j такими, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Предположим, что линейные статистики $L_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3$, $L_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3$, $L_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3$ независимы. Тогда либо μ_j — вырожденные распределения, либо μ_j — гауссовские распределения, носители которых — классы смежности группы X относительно подгруппы, топологически изоморфной $\mathbf{R}$.

Доказательство теоремы 1 достаточно длинно и опирается на ряд лемм. Поэтому поясним в нескольких словах идею доказательства. Сначала мы доказываем, что в условиях теоремы 1 на произвольной локально компактной абелевой группе X свертка

$$\nu = \mu_1 * \bar{\mu}_1 * \mu_2 * \bar{\mu}_2 * \mu_3 * \bar{\mu}_3$$

является гауссовским распределением. Если группа X не содержит подгруппы, топологически изоморфной $\mathbf{T}$, то на X имеет место групповой аналог теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения [21], из которого следует, что и распределения μ_j — гауссовские. Но на группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ гауссовское распределение может иметь негауссовские делители. Поэтому из того, что распределение $\nu \in M^1(\mathbf{R} \times \mathbf{T})$ гауссовское, вообще говоря, не следует, что его делители — также гауссовские. Мы доказываем, что в условиях теоремы 1 гауссовское распределение ν не произвольно, а сосредоточено на подгруппе, топологически изоморфной $\mathbf{R}$. Отсюда по классической теореме Крамера о разложении гауссовского распределения следует, что распределения μ_j — также гауссовские.

3. Доказательство лемм. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\alpha_i, \beta_i \in \text{Aut}(X)$, $i = 1, 2$. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j . Для того чтобы линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3$, $L_3 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяли уравнению

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_1(u + \tilde{\alpha}_1v + \tilde{\beta}_1w)\hat{\mu}_2(u + \tilde{\alpha}_2v + \tilde{\beta}_2w)\hat{\mu}_3(u + v + w) \\ &= \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_3(u)\hat{\mu}_1(\tilde{\alpha}_1v)\hat{\mu}_2(\tilde{\alpha}_2v)\hat{\mu}_3(v)\hat{\mu}_1(\tilde{\beta}_1w)\hat{\mu}_2(\tilde{\beta}_2w)\hat{\mu}_3(w), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u, v, w \in Y$.

Доказательство. Отметим, что если ξ — случайная величина со значениями в группе X и с распределением μ , то $\hat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi, y)]$. Очевидно, что линейные статистики L_1 , L_2 и L_3 независимы тогда и только тогда, когда для любых $u, v, w \in Y$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, u)(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3, v)(\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3, w)] \\ &= \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, u)] \mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3, v)] \\ & \times \mathbf{E}[(\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3, w)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая то, что случайные величины ξ_j независимы, преобразуем левую часть равенства (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, u)(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3, v)(\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3, w)] \\ &= \mathbf{E}[(\xi_1, u + \tilde{\alpha}_1v + \tilde{\beta}_1w)(\xi_2, u + \tilde{\alpha}_2v + \tilde{\beta}_2w)(\xi_3, u + v + w)] \\ &= \mathbf{E}[(\xi_1, u + \tilde{\alpha}_1v + \tilde{\beta}_1w)] \mathbf{E}[(\xi_2, u + \tilde{\alpha}_2v + \tilde{\beta}_2w)] \mathbf{E}[(\xi_3, u + v + w)] \\ &= \hat{\mu}_1(u + \tilde{\alpha}_1v + \tilde{\beta}_1w)\hat{\mu}_2(u + \tilde{\alpha}_2v + \tilde{\beta}_2w)\hat{\mu}_3(u + v + w). \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем правую часть равенства (3):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, u)] \mathbf{E}[(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3, v)] \mathbf{E}[(\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3, w)] \\ &= \mathbf{E}[(\xi_1, u)(\xi_2, u)(\xi_3, u)] \mathbf{E}[(\xi_1, \tilde{\alpha}_1v)(\xi_2, \tilde{\alpha}_2v)(\xi_3, v)] \\ & \times \mathbf{E}[(\xi_1, \tilde{\beta}_1w)(\xi_2, \tilde{\beta}_2w)(\xi_3, w)] \\ &= \mathbf{E}[(\xi_1, u)] \mathbf{E}[(\xi_2, u)] \mathbf{E}[(\xi_3, u)] \mathbf{E}[(\xi_1, \tilde{\alpha}_1v)] \mathbf{E}[(\xi_2, \tilde{\alpha}_2v)] \\ & \times \mathbf{E}[(\xi_3, v)] \mathbf{E}[(\xi_1, \tilde{\beta}_1w)] \mathbf{E}[(\xi_2, \tilde{\beta}_2w)] \mathbf{E}[(\xi_3, w)] \\ &= \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_3(u)\hat{\mu}_1(\tilde{\alpha}_1v)\hat{\mu}_2(\tilde{\alpha}_2v)\hat{\mu}_3(v)\hat{\mu}_1(\tilde{\beta}_1w)\hat{\mu}_2(\tilde{\beta}_2w)\hat{\mu}_3(w). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе $\mathbf{R}$ и с распределениями μ_j . Пусть $a_j, b_j, j = 1, 2$, — ненулевые константы. Предположим, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \xi_3$, $L_3 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \xi_3$ независимы. Тогда либо все μ_j — вырожденные распределения, либо все μ_j — невырожденные гауссовские распределения, и справедливы следующие утверждения:

- 1) $a_1b_2 - a_1a_2b_2 - a_1b_1b_2 - a_2b_1 + a_1a_2b_1 + a_2b_1b_2 = 0$;
- 2) возможные комбинации знаков a_i, b_i описываются в таблице

a_1	a_2	b_1	b_2
+	—	—	+
+	—	—	—
—	+	+	—
—	+	—	—
—	—	+	—
—	—	—	+

- 3) $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$;
- 4) $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$;
- 5) $\begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 \\ b_1 - 1 & b_2 - 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Доказательство. По лемме 1 характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2), которое принимает вид

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_1(u + a_1v + b_1w)\hat{\mu}_2(u + a_2v + b_2w)\hat{\mu}_3(u + v + w) \\ &= \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_3(u)\hat{\mu}_1(a_1v)\hat{\mu}_2(a_2v)\hat{\mu}_3(v)\hat{\mu}_1(b_1w)\hat{\mu}_2(b_2w)\hat{\mu}_3(w), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u, v, w \in \mathbf{R}$. Из независимости линейных статистик L_1 и L_2 по теореме Скитовича–Дармуа вытекает, что все μ_j — гауссовские распределения, т.е. характеристические функции $\hat{\mu}_j(s)$ представимы в виде

$$\hat{\mu}_j(s) = \exp\{-\sigma_j s^2 + i\tau_j s\}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

где $\sigma_j \geq 0, \tau_j \in \mathbf{R}$. Подставляя (5) в (4), получаем, что справедливы следующие равенства:

$$\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2 + \sigma_3 = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_1 a_1 b_1 + \sigma_2 a_2 b_2 + \sigma_3 = 0. \quad (8)$$

Из (6)–(8) легко вытекает, что либо все μ_j — вырожденные распределения, либо все μ_j — невырожденные распределения.

Предположим, что распределения μ_j невырожденные. Тогда в (6)–(8) все σ_j положительны. Докажем утверждения 1)–5).

1) Так как в (6)–(8) все σ_j отличны от нуля, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. выполнено 1).

2) Так как все σ_j положительны, то 2) непосредственно вытекает из (6)–(8).

3) Предположим, что $a_1 = a_2$. Тогда из 2) следует, что $a_i < 0$, а из (7) и (8) вытекает, что $(1 - a_1)\sigma_3 = 0$. Так как $a_1 < 0$, то отсюда следует, что $\sigma_3 = 0$. Тогда из (6) получаем, что $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Полученное противоречие доказывает 3) в случае, когда $a_1 = a_2$. Аналогично рассуждаем в случае, когда $b_1 = b_2$.

4) Предположим, что $a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$. Тогда

$$b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1}. \quad (9)$$

Учитывая (9), перепишем (7) в виде

$$\frac{b_1}{a_1} (\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2) + \sigma_3 = 0.$$

Отсюда и из (6) вытекает, что

$$\left(1 - \frac{b_1}{a_1}\right) \sigma_3 = 0. \quad (10)$$

С учетом 2) из (9) следует, что либо $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, либо $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$. Поскольку в обоих случаях $a_1 b_1 < 0$, то из (10) следует, что $\sigma_3 = 0$. Тогда, учитывая что $a_i, b_i < 0$, из (8) получаем, что $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Полученное противоречие доказывает 4).

5) Предположим, что $\begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 \\ b_1 - 1 & b_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$, т.е.

$$(a_1 - 1)(b_2 - 1) = (a_2 - 1)(b_1 - 1). \quad (11)$$

Учитывая (11), перепишем левую часть равенства 1) следующим образом:

$$\begin{aligned} & a_1 b_2 - a_1 a_2 b_2 - a_1 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1 a_2 b_1 + a_2 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &= a_1 b_2 (1 - a_2 - b_1 + a_2 b_1) - a_2 b_1 (1 - a_1 - b_2 + a_1 b_2) \\ &= a_1 b_2 (a_2 - 1)(b_1 - 1) - a_2 b_1 (a_1 - 1)(b_2 - 1) \\ &= (a_2 - 1)(b_1 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \end{aligned}$$

Так как согласно 4) $a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0$, то либо $a_2 = 1$, либо $b_1 = 1$. Как следует из 2), в этих случаях $a_1 < 0$, $b_2 < 0$. Мы получили противоречие с (11). Лемма доказана.

Лемма 3 (см. [22, § 2]). Пусть X — топологическая абелева группа, G — борелевская подгруппа в X , $\mu \in M^1(G)$, $\mu = \mu_1 * \mu_2$. Тогда распределения μ_j можно заменить их сдвигами μ'_j таким образом, что $\mu = \mu'_1 * \mu'_2$, и $\mu'_j \in M^1(G)$.

Лемма 4 (см. [18]). Пусть $X = \mathbf{T}$, а ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \mathbf{T}$ и с распределениями μ_j , имеющими не обращающиеся в нуль характеристические функции. Предположим, что сумма $\xi_1 + \xi_2$ и разность $\xi_1 - \xi_2$ независимы. Тогда $\mu_j = E_{x_j} * \gamma * \pi_j$, где $x_j \in \mathbf{T}$, $\gamma \in \Gamma(\mathbf{T})$, π_j — заряды на $\mathbf{Z}(2)$ такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_1$. Другими словами, характеристические функции $\hat{\mu}_j(n)$ представимы в виде

$$\hat{\mu}_1(n) = \exp \left\{ -\sigma n^2 + i\theta_1 n + \kappa(1 - (-1)^n) \right\}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (12)$$

$$\hat{\mu}_2(n) = \exp \left\{ -\sigma n^2 + i\theta_2 n - \kappa(1 - (-1)^n) \right\}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (13)$$

где $\sigma \geq 0$, $\kappa \in \mathbf{R}$, $0 \leq \theta_j < 2\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма 5. Пусть $X = \mathbf{T}$, а ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , имеющими не обращающиеся в нуль характеристические функции. Пусть $\alpha_{ij} \in \text{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3$, $L_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3$, $L_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3$ вытекает, что все μ_j — вырожденные распределения.

Доказательство. Очевидно, что $\text{Aut}(X) = \{I, -I\}$. Заметим, что если для каких-нибудь двух линейных статистик, например L_1 и L_2 , выполнено $L_1 = \pm L_2$, то все μ_j — вырожденные распределения. Поэтому мы можем предполагать, что $L_i \neq \pm L_j$ для всех $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Отсюда легко следует, что без ограничения общности можно считать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3$, $L_3 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Обозначим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_3$, $\eta_2 = \xi_2$. Тогда η_1, η_2 — независимые случайные величины. Из независимости L_1 и L_2 следует, что сумма $\eta_1 + \eta_2$ и разность $\eta_1 - \eta_2$ также независимы. Из леммы 4, примененной к независимым случайным величинам η_1 и η_2 , вытекает, что существует $\sigma_2 \geq 0$ такое, что

$$|\hat{\mu}_1(2n)| |\hat{\mu}_3(2n)| = |\hat{\mu}_2(2n)| = e^{-4\sigma_2 n^2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (14)$$

Аналогично, из независимости линейных статистик L_1, L_3 и линейных статистик $-L_2, L_3$ получаем, что существуют $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_3 \geq 0$ такие, что

$$|\hat{\mu}_2(2n)| |\hat{\mu}_3(2n)| = |\hat{\mu}_1(2n)| = e^{-4\sigma_1 n^2}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (15)$$

$$|\hat{\mu}_1(2n)| |\hat{\mu}_2(2n)| = |\hat{\mu}_3(2n)| = e^{-4\sigma_3 n^2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (16)$$

Из (14)–(16) вытекает, что

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (17)$$

Поскольку $\hat{\mu}_j(n)$ — характеристические функции распределений, то из (17) вытекает, что в (12) $\kappa = 0$. Значит, μ_j — вырожденные распределения. Лемма доказана.

Пусть X — локально компактная абелева группа, $\alpha_i, \beta_i \in \text{Aut}(X)$, $i = 1, 2$. Введем следующие обозначения, которые сохраним на протяжении всей статьи:

$$\begin{aligned} L &= (\tilde{\alpha}_1 - I)Y + (\tilde{\beta}_1 - I)Y, & M &= (\tilde{\alpha}_2 - I)Y + (\tilde{\beta}_2 - I)Y, \\ N &= (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)Y + (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)Y. \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $\alpha_i, \beta_i \in \text{Aut}(X)$, $i = 1, 2$. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , имеющими не обращающиеся в нуль характеристические функции. Предположим, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3$, $L_3 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3$ независимы. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тогда $\nu = \nu_1 * \nu_2 * \nu_3 \in \Gamma(X)$, а функции $\psi_j(y) = -\ln \hat{\nu}_j(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_h \Delta_k \Delta_l \psi_1(y) = 0, \quad h, y \in Y, \quad k \in N, \quad l \in L, \quad (18)$$

$$\Delta_h \Delta_k \Delta_l \psi_2(y) = 0, \quad h, y \in Y, \quad k \in N, \quad l \in M, \quad (19)$$

$$\Delta_h \Delta_k \Delta_l \psi_3(y) = 0, \quad h, y \in Y, \quad k \in L, \quad l \in M. \quad (20)$$

Доказательство. По лемме 1 характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Заметим, что $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 > 0$, $y \in Y$, и характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (2). Из уравнения (2) получаем

$$\begin{aligned} \psi_1(u + \tilde{\alpha}_1 v + \tilde{\beta}_1 w) + \psi_2(u + \tilde{\alpha}_2 v + \tilde{\beta}_2 w) + \psi_3(u + v + w) \\ = A(u) + B(v) + C(w), \quad u, v, w \in Y, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A(y) &= \psi_1(y) + \psi_2(y) + \psi_3(y), \\ B(y) &= \psi_1(\tilde{\alpha}_1 y) + \psi_2(\tilde{\alpha}_2 y) + \psi_3(y), \\ C(y) &= \psi_1(\tilde{\beta}_1 y) + \psi_2(\tilde{\beta}_2 y) + \psi_3(y). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы воспользуемся методом конечных разностей. Пусть k_1 и m_1 — произвольные элементы группы Y . Положим $h_1 = -k_1 - m_1$. Тогда $h_1 + k_1 + m_1 = 0$. Придадим в (21) переменным u, v

и w приращения h_1 , k_1 и m_1 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (21), находим

$$\begin{aligned} \Delta_{l_{11}}\psi_1(u + \tilde{\alpha}_1 v + \tilde{\beta}_1 w) + \Delta_{l_{12}}\psi_2(u + \tilde{\alpha}_2 v + \tilde{\beta}_2 w) \\ = \Delta_{h_1}A(u) + \Delta_{k_1}B(v) + \Delta_{m_1}C(w), \quad u, v, w \in Y, \end{aligned} \quad (22)$$

где $l_{11} = (\tilde{\alpha}_1 - I)k_1 + (\tilde{\beta}_1 - I)m_1$, $l_{12} = (\tilde{\alpha}_2 - I)k_1 + (\tilde{\beta}_2 - I)m_1$. Пусть k_2 и m_2 — произвольные элементы группы Y . Положим $h_2 = -\tilde{\alpha}_2 k_2 - \tilde{\beta}_2 m_2$. Тогда $h_2 + \tilde{\alpha}_2 k_2 + \tilde{\beta}_2 m_2 = 0$. Придадим в (22) переменным u , v и w приращения h_2 , k_2 и m_2 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (22), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{l_{21}}\Delta_{l_{11}}\psi_1(u + \tilde{\alpha}_1 v + \tilde{\beta}_1 w) = \Delta_{h_2}\Delta_{h_1}A(u) \\ + \Delta_{k_2}\Delta_{k_1}B(v) + \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}C(w), \quad u, v, w \in Y, \end{aligned} \quad (23)$$

где $l_{21} = (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)k_2 + (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)m_2$. Пусть k_3 и m_3 — произвольные элементы группы Y . Положим $h_3 = -\tilde{\alpha}_1 k_3 - \tilde{\beta}_1 m_3$. Тогда $h_3 + \tilde{\alpha}_1 k_3 + \tilde{\beta}_1 m_3 = 0$. Придадим в (23) переменным u , v и w приращения h_3 , k_3 и m_3 соответственно. Вычитая из полученного уравнения уравнение (23), находим

$$\Delta_{h_3}\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}A(u) + \Delta_{k_3}\Delta_{k_2}\Delta_{k_1}B(v) + \Delta_{m_3}\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}C(w) = 0, \quad u, v, w \in Y. \quad (24)$$

Пусть h_4 — произвольный элемент группы Y . Придадим в (24) переменной u приращение h_4 . Вычитая из полученного уравнения уравнение (24), получаем

$$\Delta_{h_4}\Delta_{h_3}\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}A(u) = 0, \quad h_j, u \in Y. \quad (25)$$

Полагая в (25) $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, находим

$$\Delta_h^4 A(u) = 0, \quad h, u \in Y. \quad (26)$$

Таким образом, $A(y)$ — многочлен степени ≤ 3 . Тогда существуют симметричные k -аддитивные функции $g_k(y_1, y_2, \dots, y_k)$, $k = 1, 2, 3$, такие, что

$$A(y) = g_3^*(y) + g_2^*(y) + g_1^*(y) + g_0, \quad y \in Y,$$

где $g_k^*(y) = g_k(y, \dots, y)$, $g_0 = \text{const}$ [23]. Очевидно, что $g_k^*(-y) = (-1)^k g_k^*(y)$. Так как $A(-y) = A(y)$ и $A(0) = 0$, то $A(y) = g_2^*(y)$. Нетрудно проверить, что функция $g_2^*(y)$ удовлетворяет уравнению (1). Следовательно, $\nu \in \Gamma(X)$.

Так как $A(y) = g_2^*(y) = g_2(y, y)$, то легко видеть, что функция $A(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{h_3}\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}A(u) = 0, \quad h_j, u \in Y. \quad (27)$$

Аналогично получаем, что функции $B(v)$ и $C(w)$ также удовлетворяют уравнению (27).

Пусть h — произвольный элемент группы Y . Придадим в (23) переменной u приращение h . Вычитая из полученного уравнения уравнение (23) и учитывая (27), находим

$$\Delta_h \Delta_{l_{21}} \Delta_{l_{11}} \psi_1(u + \tilde{\alpha}_1 v + \tilde{\beta}_1 w) = 0. \quad (28)$$

Полагая здесь $v = w = 0$ и учитывая выражения для l_{11} и l_{21} , получаем, что функция $\psi_1(y)$ удовлетворяет уравнению (18). Рассуждая аналогично, убеждаемся, что функция $\psi_2(y)$ удовлетворяет уравнению (19), а функция $\psi_3(y)$ удовлетворяет уравнению (20). Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ и $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$, $\beta_i = \begin{pmatrix} b_i & d_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, — топологические автоморфизмы группы X . Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j . Предположим, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \xi_3$, $L_3 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \xi_3$ независимы. Тогда либо все μ_j — вырожденные распределения, либо все μ_j — невырожденные распределения, и для подгрупп L , M и N имеются такие возможности:

1. $L = \mathbf{R}$, $M = \mathbf{R}$, $N = \mathbf{R}$;
2. $L = \mathbf{R}$, $M = Y^{(2)}$, $N = Y^{(2)}$;
3. $L = Y^{(2)}$, $M = \mathbf{R}$, $N = Y^{(2)}$;
4. $L = Y^{(2)}$, $M = Y^{(2)}$, $N = \mathbf{R}$;
5. $L = Y^{(2)}$, $M = Y^{(2)}$, $N = Y^{(2)}$.

Доказательство. По лемме 1 характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Положим в (2) $u = (s_1, 0)$, $v = (s_2, 0)$, $w = (s_3, 0)$. Получим

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_1(s_1 + a_1 s_2 + b_1 s_3, 0) \hat{\mu}_2(s_1 + a_2 s_2 + b_2 s_3, 0) \hat{\mu}_3(s_1 + s_2 + s_3, 0) \\ &= \hat{\mu}_1(s_1, 0) \hat{\mu}_2(s_1, 0) \hat{\mu}_3(s_1, 0) \hat{\mu}_1(a_1 s_2, 0) \hat{\mu}_2(a_2 s_2, 0) \hat{\mu}_3(s_2, 0) \\ & \times \hat{\mu}_1(b_1 s_3, 0) \hat{\mu}_2(b_2 s_3, 0) \hat{\mu}_3(s_3, 0), \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (29)$$

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тогда $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 > 0$ при $y \in Y$. Очевидно, что функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (2), а значит, и уравнению (29). Из (29) по лемме 1, примененной к группе $\mathbf{R}$, и лемме 2 следует, что если хотя бы одна из функций $\hat{\nu}_j(s, 0)$ — характеристическая функция невырожденного распределения, то все $\hat{\nu}_j(s, 0)$ — характеристические функции невырожденных гауссовских распределений. Другими словами, либо $\hat{\nu}_j(s, 0) = 1$ при $s \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, 3$, либо $\hat{\nu}_j(s, 0) = e^{-\sigma_j s^2}$, где $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.

Предположим, что $\hat{\nu}_j(s, 0) = 1$ при $s \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, 3$. Тогда имеют место включения $\sigma(\nu_j) \subset A(X, \mathbf{R}) = \mathbf{T}$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно, по лемме 3 распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j , что $\sigma(\mu'_j) \subset \mathbf{T}$, $j = 1, 2, 3$. Так как подгруппа $\mathbf{T}$ инвариантна относительно любого топологического автоморфизма группы X , то в этом случае по лемме 5 все распределения μ_j вырожденные.

Предположим теперь, что $\hat{\nu}_j(s, 0) = e^{-\sigma_j s^2}$, где $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда из утверждения 2) леммы 2 вытекает, что выполнены условия:

$$(i) \quad \text{либо } a_1 \neq 1, \text{ либо } b_1 \neq 1; \quad (ii) \quad \text{либо } a_2 \neq 1, \text{ либо } b_2 \neq 1.$$

Заметим теперь, что из (i) следует, что для L имеются только две возможности: либо $L = \mathbf{R}$, либо $L = Y^{(2)}$. Аналогично, из (ii) вытекает, что для M имеются только две возможности: либо $M = \mathbf{R}$, либо $M = Y^{(2)}$. Очевидно, что каждая из этих возможностей реализуется.

Пусть $L = \mathbf{R}$ и $M = \mathbf{R}$. Тогда $p_i = q_i = 1$, $i = 1, 2$. Следовательно, $p_2 - p_1 = 0$, и $q_2 - q_1 = 0$. Учитывая утверждение 3) леммы 2, отсюда получаем, что для N имеется единственная возможность $N = \mathbf{R}$.

Пусть $L = \mathbf{R}$ и $M = Y^{(2)}$. Тогда $p_1 = q_1 = 1$ и либо $p_2 = -1$, либо $q_2 = -1$. Следовательно, либо $p_2 - p_1 = -2$, либо $q_2 - q_1 = -2$. Учитывая утверждение 3) леммы 2, отсюда получаем, что для N в таком случае имеется единственная возможность $N = Y^{(2)}$.

Пусть $L = Y^{(2)}$ и $M = \mathbf{R}$. Тогда либо $p_1 = -1$, либо $q_1 = -1$, и $p_2 = q_2 = 1$. Следовательно, либо $p_2 - p_1 = 2$, либо $q_2 - q_1 = 2$. Учитывая утверждение 3) леммы 2, отсюда получаем, что для N также имеется единственная возможность $N = Y^{(2)}$.

Пусть $L = Y^{(2)}$ и $M = Y^{(2)}$. Тогда либо $p_1 = -1$, либо $q_1 = -1$, и либо $p_2 = -1$, либо $q_2 = -1$. Если при этом $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$, то в силу утверждения 3) леммы 2 $N = \mathbf{R}$. Если же либо $p_1 \neq p_2$, либо $q_1 \neq q_2$, то в силу утверждения 3) леммы 2, $N = Y^{(2)}$. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $Y = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ и непрерывная функция $f(y)$, $y = (s, n) \in Y$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_k^2 \Delta_h f(y) = 0, \quad k \in \mathbf{R}, \quad h, y \in Y. \quad (30)$$

Предположим также, что $f(-y) = f(y)$, $y \in Y$. Тогда

$$f(s, n) = \sigma s^2 + \kappa(n)s + \lambda(n), \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (31)$$

где $\kappa(-n) = -\kappa(n)$ и $\lambda(-n) = \lambda(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Обозначим $f_n(s) = f(s, n)$, $s \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$. Полагая в (30) $y = (s, n)$, $k = h = (t, 0)$, получаем, что функция $f_n(s)$ при каждом фиксированном n удовлетворяет уравнению

$$\Delta_t^3 f_n(s) = 0, \quad t, s \in \mathbf{R}. \quad (32)$$

Из (32) вытекает, что функция $f_n(s)$ имеет вид

$$f_n(s) = \sigma(n)s^2 + \kappa(n)s + \lambda(n), \quad s \in \mathbf{R}. \quad (33)$$

Подставим представление (33) для функции $f_n(s)$ в (30), полагая $h = (0, m)$, $k = (t, 0)$. Получаем

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 \Delta_h f_n(s) &= \Delta_h \Delta_t^2 f_n(s) = \Delta_h \sigma(n) \Delta_t^2 s^2 \\ &= 2t^2 \Delta_m \sigma(n) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Delta_m \sigma(n) = 0$, т.е. $\sigma(n) = \sigma = \text{const}$.

Так как $f(-y) = f(y)$, $y \in Y$, то очевидно, что $\kappa(-n) = -\kappa(n)$ и $\lambda(-n) = \lambda(n)$, $n \in \mathbf{Z}$. Отметим также, что любая функция $f(s, n)$, имеющая вид (31), удовлетворяет уравнению (30). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть X — произвольная локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Заметим вначале, что если μ — распределение случайной величины ξ со значениями в группе X и $\alpha \in \text{Aut}(X)$, то характеристическая функция случайной величины $\alpha\xi$ равна $\hat{\mu}(\tilde{\alpha}y)$. Отсюда вытекает, что $\mu \in \Gamma(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mu) \in \Gamma(X)$. Поэтому, полагая $\zeta_j = \alpha_{1j}\xi_j$, $j = 1, 2, 3$, мы сводим доказательство теоремы 1 к случаю, когда линейные статистики имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \delta_{21}\xi_1 + \delta_{22}\xi_2 + \delta_{23}\xi_3$, $L_3 = \delta_{31}\xi_1 + \delta_{32}\xi_2 + \delta_{33}\xi_3$, где $\delta_{ij} \in \text{Aut}(X)$. Заметим также, что если $\alpha, \beta \in \text{Aut}(X)$, то линейные статистики L_1 , L_2 и L_3 независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные статистики L_1 , αL_2 и βL_3 . Поэтому, доказывая теорему, можно предполагать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3$, $L_3 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3$, где $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & p_i \end{pmatrix}$, $\beta_i = \begin{pmatrix} b_i & d_i \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, — топологические автоморфизмы группы $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$.

Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Учитывая лемму 7, мы можем доказывать теорему, предполагая, что все распределения μ_j невырожденные. Более того, как следует из доказательства леммы 7, в этом случае $\hat{\nu}_j(s, 0) = e^{-\sigma_j s^2}$, где $s \in \mathbf{R}$, $\sigma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$. Отметим, что тогда σ_j удовлетворяют уравнениям (6)–(8) и выполнены утверждения 1)–(5) леммы 2.

По лемме 1 характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Очевидно, что характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (2). Положим $\psi_j(y) = -\ln \hat{\nu}_j(y)$. Тогда из (2) следует, что функции $\psi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (21).

По лемме 6 функция $\psi_1(s, n)$ удовлетворяет уравнению (18). Воспользуемся теперь леммой 7 и заметим, что всегда выполнено включение

$$\mathbf{R} \subset N \cap L. \quad (34)$$

Из (18) и (34) тогда следует, что функция $\psi_1(s, n)$ удовлетворяет уравнению (30). Рассуждая аналогично, получаем, что функции $\psi_2(s, n)$ и $\psi_3(s, n)$ также удовлетворяют уравнению (30). Применяя к функциям $\psi_j(s, n)$ лемму 8, получаем, что имеют место представления

$$\psi_j(s, n) = \sigma_j s^2 + \kappa_j(n)s + \lambda_j(n), \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (35)$$

где $\kappa_j(-n) = -\kappa_j(n)$, $\lambda_j(-n) = \lambda_j(n)$ и $\kappa_j(0) = 0$, $\lambda_j(0) = 0$, $j = 1, 2, 3$.

По лемме 6, $\nu = \nu_1 * \nu_2 * \nu_3 \in \Gamma(X)$. Тогда очевидно, что

$$\hat{\nu}(s, n) = \exp\{-(\sigma s^2 + \kappa sn + \lambda n^2)\}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (36)$$

где $\sigma > 0$, $\kappa \in \mathbf{R}$, $\lambda \geq 0$ и

$$\psi_1(s, n) + \psi_2(s, n) + \psi_3(s, n) = \sigma s^2 + \kappa sn + \lambda n^2, \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (37)$$

Проверим, что функции $\kappa_j(n)$ в (35) линейные. Положим в (21) $u = (0, n)$, $v = (s_2, 0)$, $w = (s_3, 0)$. Отметим, что $\tilde{\alpha}_1 v = (a_1 s_2, 0)$, $\tilde{\alpha}_2 v = (a_2 s_2, 0)$, $\tilde{\beta}_1 w = (b_1 s_3, 0)$, $\tilde{\beta}_2 w = (b_2 s_3, 0)$. Учитывая представления (35), из (21) находим

$$\begin{aligned} & \sigma_1(a_1 s_2 + b_1 s_3)^2 + \kappa_1(n)(a_1 s_2 + b_1 s_3) + \lambda_1(n) + \sigma_2(a_2 s_2 + b_2 s_3)^2 \\ & + \kappa_2(n)(a_2 s_2 + b_2 s_3) + \lambda_2(n) + \sigma_3(s_2 + s_3)^2 + \kappa_3(n)(s_2 + s_3) + \lambda_3(n) \\ & = \lambda_1(n) + \lambda_2(n) + \lambda_3(n) + \sigma_1(a_1 s_2)^2 + \sigma_2(a_2 s_2)^2 + \sigma_3 s_2^2 \\ & + \sigma_1(b_1 s_3)^2 + \sigma_2(b_2 s_3)^2 + \sigma_3 s_3^2, \quad s_2, s_3 \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (38)$$

Полагая в (38) $s_2 = 1, s_3 = 0$, получаем

$$a_1 \kappa_1(n) + a_2 \kappa_2(n) + \kappa_3(n) = 0, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (39)$$

Полагая в (38) $s_2 = 0, s_3 = 1$, находим

$$b_1 \kappa_1(n) + b_2 \kappa_2(n) + \kappa_3(n) = 0, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (40)$$

С другой стороны, из (35) и (37) следует, что

$$\kappa_1(n) + \kappa_2(n) + \kappa_3(n) = \kappa n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (41)$$

Вычитая из (39) и (40) равенство (41), получаем

$$(a_1 - 1)\kappa_1(n) + (a_2 - 1)\kappa_2(n) = -\kappa n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (42)$$

$$(b_1 - 1)\kappa_1(n) + (b_2 - 1)\kappa_2(n) = -\kappa n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (43)$$

Так как согласно утверждению 5) леммы 2 справедливо неравенство $\begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 \\ b_1 - 1 & b_2 - 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то из уравнений (41)–(43) следует, что функции $\kappa_j(n)$

линейные, т.е. $\kappa_j(n) = \kappa_j n$, $n \in \mathbf{Z}$, где $\kappa_j \in \mathbf{R}$. Таким образом, представления (35) принимают вид

$$\psi_j(s, n) = \sigma_j s^2 + \kappa_j s n + \lambda_j(n), \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Отметим, что из (37) и (44) следует также, что

$$\lambda_1(n) + \lambda_2(n) + \lambda_3(n) = \lambda n^2, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (45)$$

Пусть $u = (s_1, n_1)$, $v = (s_2, n_2)$, $w = (s_3, n_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 v &= (a_1 s_2 + c_1 n_2, p_1 n_2), & \tilde{\alpha}_2 v &= (a_2 s_2 + c_2 n_2, p_2 n_2), \\ \tilde{\beta}_1 w &= (b_1 s_3 + d_1 n_3, q_1 n_3), & \tilde{\beta}_2 w &= (b_2 s_3 + d_2 n_3, q_2 n_3). \end{aligned}$$

Подставляя представления (44) в (21), получаем, что справедливы равенства (6)–(8), а также равенства

$$\kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 = 0, \quad (46)$$

$$\kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2 + \kappa_3 = 0, \quad (47)$$

$$2\sigma_1 c_1 + 2\sigma_2 c_2 + \kappa_1 p_1 + \kappa_2 p_2 + \kappa_3 = 0, \quad (48)$$

$$2\sigma_1 d_1 + 2\sigma_2 d_2 + \kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2 + \kappa_3 = 0, \quad (49)$$

$$2\sigma_1 a_1 d_1 + 2\sigma_2 a_2 d_2 + \kappa_1 a_1 q_1 + \kappa_2 a_2 q_2 + \kappa_3 = 0, \quad (50)$$

$$2\sigma_1 b_1 c_1 + 2\sigma_2 b_2 c_2 + \kappa_1 b_1 p_1 + \kappa_2 b_2 p_2 + \kappa_3 = 0, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & n_1 n_2 (\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2) + n_1 n_3 (\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2) \\ & + n_2 n_3 (2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 q_1 + \kappa_1 d_1 p_1 + \kappa_2 c_2 q_2 + \kappa_2 d_2 p_2) \\ & + \lambda_1 (n_1 + p_1 n_2 + q_1 n_3) + \lambda_2 (n_1 + p_2 n_2 + q_2 n_3) \\ & + \lambda_3 (n_1 + n_2 + n_3) = \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad n_j \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (52)$$

Заметим, что из (37) и (44) следует, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma \quad (53)$$

и

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \kappa. \quad (54)$$

Докажем, что носителем распределения ν является некоторая подгруппа в X , топологически изоморфная $\mathbf{R}$. Учитывая (36), для этого достаточно проверить, что

$$4\lambda\sigma = \kappa^2, \quad (55)$$

т.е., с учетом (53) и (54), нужно доказать, что

$$4\lambda(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2. \quad (56)$$

Проверка (56) — это ряд элементарных и скучных вычислений. Учитывая, что согласно утверждению 4) леммы 2 справедливо неравенство $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$, из (6) и (7) получаем

$$\sigma_1 = \frac{b_2 - a_2}{a_2b_1 - a_1b_2} \sigma_3, \quad \sigma_2 = \frac{a_1 - b_1}{a_2b_1 - a_1b_2} \sigma_3. \quad (57)$$

Аналогично, из (46) и (47) находим

$$\kappa_1 = \frac{b_2 - a_2}{a_2b_1 - a_1b_2} \kappa_3, \quad \kappa_2 = \frac{a_1 - b_1}{a_2b_1 - a_1b_2} \kappa_3. \quad (58)$$

Каждое из чисел p_j и q_j может принимать значения ± 1 . Здесь возможны несколько случаев, каждый из которых мы разберем отдельно.

I. Пусть $p_1 = p_2 = 1$. Тогда из (48) следует, что

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = -2\sigma_1c_1 - 2\sigma_2c_2. \quad (59)$$

Полагая в (52) $n_1 = -n_2 = 1$, $n_3 = 0$, получаем

$$-\kappa_1c_1 - \kappa_2c_2 = 2\lambda. \quad (60)$$

Подставляя (59) и (60) в (56) и учитывая (57) и (58), убеждаемся, что мы получили равенство.

Таким образом, в случае I равенство (55) доказано.

II. Пусть $q_1 = q_2 = 1$. Тогда из (49) следует, что

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = -2\sigma_1d_1 - 2\sigma_2d_2. \quad (61)$$

Полагая в (52) $n_1 = -n_3 = 1$, $n_2 = 0$, получаем

$$-\kappa_1d_1 - \kappa_2d_2 = 2\lambda. \quad (62)$$

Подставляя (61) и (62) в (56) и учитывая (57) и (58), убеждаемся, что мы получили равенство.

Таким образом, в случае II равенство (55) доказано.

III. Пусть либо $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = -1$, либо $p_1 = q_1 = -1$, $p_2 = q_2 = 1$, либо $p_1 = q_1 = 1$, $p_2 = q_2 = -1$. Полагая в (52) $n_1 = 0$, $n_2 = -n_3 = 1$, получаем

$$-(2\sigma_1c_1d_1 + 2\sigma_2c_2d_2 + \kappa_1c_1p_1 + \kappa_1d_1p_1 + \kappa_2c_2p_2 + \kappa_2d_2p_2) = 2\lambda. \quad (63)$$

Заметим, что из утверждения 3) леммы 2 следует, что $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$. Из (48) и (51) находим

$$c_1 = \frac{(1 - b_2)\kappa_3 - \kappa_1p_1(b_2 - b_1)}{2\sigma_1(b_2 - b_1)}, \quad c_2 = \frac{(1 - b_1)\kappa_3 - \kappa_2p_2(b_1 - b_2)}{2\sigma_2(b_1 - b_2)}. \quad (64)$$

Из (49) и (50) получаем

$$d_1 = \frac{(1 - a_2)\kappa_3 - \kappa_1 q_1(a_2 - a_1)}{2\sigma_1(a_2 - a_1)}, \quad d_2 = \frac{(1 - a_1)\kappa_3 - \kappa_2 q_2(a_1 - a_2)}{2\sigma_2(a_1 - a_2)}. \quad (65)$$

Находя из (63) λ и подставляя полученное выражение в (56), видим, что нужно проверить равенство

$$\begin{aligned} & -2(2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 p_1 + \kappa_1 d_1 p_1 + \kappa_2 c_2 p_2 + \kappa_2 d_2 p_2) \\ & \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2. \end{aligned} \quad (66)$$

Подставим (57), (58), (64) и (65) в (66). После элементарных преобразований убеждаемся в том, что проверка (66) сводится к проверке равенства

$$\begin{aligned} & (a_2 b_1 - a_1 b_2)((1 - b_2)(1 - a_2)(a_1 - b_1) + (1 - b_1)(1 - a_1)(b_2 - a_2)) \\ & = -(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)(a_1 - b_1)(b_2 - a_2). \end{aligned} \quad (67)$$

Справедливость (67) вытекает из утверждения 1) леммы 2.

Таким образом, в случае III равенство (55) доказано.

Для рассмотрения оставшихся случаев, положим в (52) $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Принимая во внимание, что $\lambda_j(-n) = \lambda_j(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2 + \kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 + 2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 q_1 \\ & + \kappa_1 d_1 p_1 + \kappa_2 c_2 q_2 + \kappa_2 d_2 p_2 + \lambda_1(1) + \lambda_2(1) + \lambda_3(3) = 3\lambda. \end{aligned} \quad (68)$$

IV. Пусть $p_1 = p_2 = -1$ и $q_1 = -q_2$. Полагая в (52) $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 0$, получаем

$$2(\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2) + \lambda_1(1) + \lambda_2(1) + \lambda_3(3) = 5\lambda.$$

Отсюда и из (68) находим

$$\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2 - (2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 q_1 - \kappa_2 c_2 q_1) = 2\lambda.$$

V. Пусть $q_1 = q_2 = -1$ и $p_1 = -p_2$. Полагая в (52) $n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 1$, получаем

$$2(\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2) + \lambda_1(1) + \lambda_2(1) + \lambda_3(3) = 5\lambda.$$

Отсюда и из (68) находим

$$\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 - (2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 d_1 p_1 - \kappa_2 d_2 p_1) = 2\lambda.$$

VI. Пусть либо $p_1 = q_2 = -1$, $p_2 = q_1 = 1$, либо $p_1 = q_2 = 1$, $p_2 = q_1 = -1$. Полагая в (52) $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, получаем

$$2(2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 q_1 + \kappa_1 d_1 p_1 + \kappa_2 c_2 q_2 + \kappa_2 d_2 p_2) + \lambda_1(1) + \lambda_2(1) + \lambda_3(3) = 5\lambda.$$

Отсюда и из (68) находим

$$2\sigma_1 c_1 d_1 + 2\sigma_2 c_2 d_2 + \kappa_1 c_1 p_2 + \kappa_1 d_1 p_1 + \kappa_2 c_2 p_1 + \kappa_2 d_2 p_2 - (\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2) - (\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2) = 2\lambda.$$

Далее в каждом из этих случаев рассуждаем так же, как в случае III. Итак, мы доказали, что справедливо равенство (55). Таким образом, получаем представление

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(s, n) &= \exp\{-(\sigma s^2 + \kappa sn + \lambda n^2)\} \\ &= \exp\left\{-\sigma\left(s + \frac{\kappa}{2\sigma}n\right)^2\right\}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Положим $H = \{y \in Y: \hat{\nu}(y) = 1\}$. Очевидно, что $H = \{n(-\kappa/(2\sigma), 1): n \in \mathbf{Z}\}$. Тогда $G = A(X, H) = \{(t, e^{it\kappa/(2\sigma)}): t \in \mathbf{R}\}$. Очевидно, что $G \cong \mathbf{R}$. Мы имеем $\sigma(\nu) \subset G$. Поскольку $\nu = \nu_1 * \nu_2 * \nu_3 = \mu_1 * \bar{\mu}_1 * \mu_2 * \bar{\mu}_2 * \mu_3 * \bar{\mu}_3$, то из леммы 3 следует, что распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j , что $\nu = \mu'_1 * \bar{\mu}'_1 * \mu'_2 * \bar{\mu}'_2 * \mu'_3 * \bar{\mu}'_3$, а $\sigma(\mu'_j) \subset G$. Так как ν — гауссовское распределение, а $G \cong \mathbf{R}$, то по теореме Крамера о разложении гауссовского распределения получаем, что все распределения μ'_j — гауссовские, а значит, μ_j — также гауссовские. Теорема доказана.

5. Комментарии к теореме 1.

З а м е ч а н и е 1. При $n = 2$ на группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ в условиях задачи 1 распределения μ_j являются либо гауссовскими, либо свертками гауссовских распределений с зарядами, сосредоточенными на $\mathbf{Z}(2)$ [15]. Согласно теореме 1, при $n = 3$ распределения μ_j — только гауссовские. Мы видим, что, в отличие от вещественной прямой $\mathbf{R}$, на группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ класс распределений, характеризующийся независимостью n линейных статистик от n независимых случайных величин, зависит от n .

З а м е ч а н и е 2. Как установлено при доказательстве теоремы 1, если линейные статистики L_i имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \xi_3$, $L_3 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \xi_3$ и распределения μ_j невырожденные, то носители μ_j — классы смежности группы X относительно одной и той же однопараметрической подгруппы $G = \{(t, e^{it\kappa/(2\sigma)}): t \in \mathbf{R}\}$.

Проверим, что подгруппа G инвариантна относительно всех автоморфизмов α_i, β_i . Учитывая (53), (54), (57) и (58), получаем, что $G = \{(t, e^{it\kappa_3/(2\sigma_3)}): t \in \mathbf{R}\}$. Проверим, что подгруппа G инвариантна относительно автоморфизма α_1 . Так как

$$\begin{aligned} \alpha_1\left(t, \exp\left\{it \frac{\kappa_3}{2\sigma_3}\right\}\right) &= \left(a_1 t, \exp\{ic_1 t\} \exp\left\{it p_1 \frac{\kappa_3}{2\sigma_3}\right\}\right) \\ &= \left(a_1 t, \exp\left\{ia_1 t \frac{\kappa_3}{2\sigma_3} \left(\frac{2c_1\sigma_3}{a_1\kappa_3} + \frac{p_1}{a_1}\right)\right\}\right), \end{aligned}$$

то для этого достаточно показать, что

$$\frac{2c_1\sigma_3}{a_1\kappa_3} + \frac{p_1}{a_1} = 1. \quad (69)$$

Для проверки равенства (69) вначале подставим в (69) представление для c_1 из (64), а затем в полученное выражение подставим представления для σ_1 и κ_1 из (57) и (58) соответственно. После простых преобразований убеждаемся, что проверяемое равенство сводится к равенству 1) в лемме 2.

Аналогично проверяем, что подгруппа G инвариантна относительно автоморфизмов $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Очевидно, что сужение каждого из автоморфизмов α_i, β_i на группу G является топологическим автоморфизмом G .

Из сказанного следует, что вывод о том, что распределения μ_j в теореме 1 — гауссовские, можно сделать не используя теорему Крамера, а непосредственно из теоремы Скитовича–Дармуа для вещественной прямой.

Отметим также, что условие инвариантности G относительно автоморфизмов α_i, β_i накладывает достаточно жесткие ограничения на α_i, β_i . Действительно, пусть G — произвольная подгруппа в группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, топологически изоморфная $\mathbf{R}$. Тогда G имеет вид $G = \{(t, e^{i\omega t}): t \in \mathbf{R}\}$, где ω — фиксированное вещественное число. Очевидно, что подгруппа G инвариантна относительно автоморфизма $\alpha = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & p \end{pmatrix} \in \text{Aut}(X)$ тогда и только тогда, когда $c = (a - p)\omega$.

Пусть $\omega = 0$, т.е. $G = \{(t, 1): t \in \mathbf{R}\}$. Тогда $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$, т.е. матрицы автоморфизмов α_i, β_i диагональные, причем для a_i и b_i выполнены утверждения 1)–5) леммы 2.

Пусть $\omega \neq 0$. Предположим также, что ни один из автоморфизмов α_i, β_i не равен $\pm I$. Тогда, помимо выполнения утверждений 1)–5) леммы 2, должны быть справедливы равенства

$$\frac{c_1}{a_1 - p_1} = \frac{c_2}{a_2 - p_2} = \frac{d_1}{b_1 - q_1} = \frac{d_2}{b_2 - q_2}. \quad (70)$$

В частности, если хотя бы одно из этих равенств не выполнено, то распределения μ_j вырожденные. Если же какие-либо из автоморфизмов

α_i, β_i равны $\pm I$, то в (70) отсутствуют выражения, отвечающие соответствующим автоморфизмам.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 не может быть усилена до утверждения, что μ_j — вырожденные распределения (ср. с леммой 5). Действительно, пусть G — произвольная однопараметрическая подгруппа в группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, имеющая вид $G = \{(t, e^{i\omega t}) : t \in \mathbf{R}\}$, где ω — фиксированное вещественное число. Пусть ненулевые вещественные числа a_i, b_i таковы, что система уравнений (6)–(8) имеет решение $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$. Рассмотрим автоморфизмы $\alpha_i, \beta_i \in \text{Aut}(X)$, $i = 1, 2$, вида

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 & (a_1 - p_1)\omega \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_2 & (a_2 - p_2)\omega \\ 0 & p_2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & (b_1 - q_1)\omega \\ 0 & q_1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} b_2 & (b_2 - q_2)\omega \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\xi_j, j = 1, 2, 3$, — независимые гауссовские случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j , имеющими характеристические функции

$$\hat{\mu}_1(s, n) = \exp\{-\sigma_1(s + \omega n)^2\}, \quad \hat{\mu}_2(s, n) = \exp\{-\sigma_2(s + \omega n)^2\},$$

$$\hat{\mu}_3(s, n) = \exp\{-\sigma_3(s + \omega n)^2\}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, что носители всех распределений μ_j совпадают с подгруппой G . Учитывая (6)–(8), легко непосредственно проверить, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(s, n)$ удовлетворяют уравнению (2), а следовательно, по лемме 1 линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, L_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3, L_3 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \xi_3$ независимы.

З а м е ч а н и е 4. На группе $X = \mathbf{T}$ при $n = 2$ в условиях задачи 1 распределения μ_j являются либо гауссовскими, либо свертками гауссовских распределений с зарядами [18], а при $n = 3$ все распределения μ_j по лемме 5 — вырожденные. На группе $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ при $n = 2$ в условиях задачи 1 распределения μ_j также являются либо гауссовскими, либо свертками гауссовских распределений с зарядами [15], а при $n = 3$ все распределения μ_j по теореме 1 — гауссовские. Может возникнуть предположение, что с увеличением n класс распределений в задаче 1, характеризующийся независимостью n линейных статистик от n независимых случайных величин, сужается. Оказывается, что это предположение не верно.

Действительно, пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — независимые случайные величины со значениями в $\mathbf{T}$ и распределениями μ_j . Рассмотрим линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, L_2 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4, L_3 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4, L_4 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4$. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \gamma * \pi_1, \mu_3 = \mu_4 = \gamma * \pi_2$, где $\gamma \in \Gamma(\mathbf{T})$, а π_j — сосредоточенные на $\mathbf{Z}(2)$ заряды такие, что $\pi_1 * \pi_2 = E_1$. Легко проверить, что в этом случае линейные статистики L_1, L_2, L_3, L_4 независимы, но ни одно μ_j не принадлежит $\Gamma(\mathbf{T})$.

6. Решение задачи 1 на группе $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$. Перейдем теперь решению задачи 1 в случае $n = 3$ на группе $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$. Напомним определение $\mathbf{a}$ -адического соленоида Σ_a .

Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, где $a_j \in \mathbf{Z}$, $a_j > 1$, $j = 0, 1, \dots$. Вначале мы определим группу целых $\mathbf{a}$ -адических чисел Δ_a . Как множество Δ_a совпадает с декартовым произведением $\prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Рассмотрим $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \Delta_a$ и определим сумму $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ следующим образом. Пусть $x_0 + y_0 = t_0 a_0 + z_0$, где $z_0 \in \{0, 1, \dots, a_0 - 1\}$, $t_0 \in \{0, 1\}$. Предположим, что числа $z_0, z_1, \dots, z_k$ и $t_0, t_1, \dots, t_k$ уже определены. Положим тогда $x_{k+1} + y_{k+1} + t_k = t_{k+1} a_{k+1} + z_{k+1}$, где $z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - 1\}$, $t_{k+1} \in \{0, 1\}$. Таким образом, по индукции определена последовательность $\mathbf{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$. Множество Δ_a с определенным выше сложением является абелевой группой. Эта группа, рассматриваемая в топологии произведения, называется группой целых $\mathbf{a}$ -адических чисел. Рассмотрим группу $\mathbf{R} \times \Delta_a$. Пусть B — подгруппа в $\mathbf{R} \times \Delta_a$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. Фактор-группа $\Sigma_a = (\mathbf{R} \times \Delta_a)/B$ называется $\mathbf{a}$ -адическим соленоидом. Группа Σ_a компактна, связна и имеет размерность один [24, формулы (10.12), (10.13), (24.28)]. Пусть $\mathbf{Q}$ обозначает группу рациональных чисел, рассматриваемую в дискретной топологии. Группа характеров группы Σ_a топологически изоморфна подгруппе $H_a \subset \mathbf{Q}$ вида

$$H_a = \left\{ \frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbf{Z} \right\}$$

[24, § 25.3].

Пусть $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$. Тогда $Y \cong H_a \times \mathbf{Z}$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $Y = H_a \times \mathbf{Z}$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (g, z)$, $g \in \Sigma_a$, $z \in \mathbf{T}$, а элементы группы Y — через $y = (r, n)$, $r \in H_a$, $n \in \mathbf{Z}$. Нетрудно проверить, что каждый автоморфизм $\varepsilon \in \text{Aut}(Y)$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & p \end{pmatrix}$, где $a \in \text{Aut}(H_a)$, $c \in H_a$, $p = \pm 1$, и ε действует на Y следующим образом: $\varepsilon(r, n) = (ar + cn, pn)$, $r \in H_a$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда сопряженный автоморфизм $\delta = \tilde{\varepsilon} \in \text{Aut}(X)$ имеет вид: $\delta(g, z) = (\tilde{a}g, (g, c)z^p)$, $g \in \Sigma_a$, $z \in \mathbf{T}$.

Обозначим через ι естественное вложение $\iota: Y \hookrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\iota(r, n) = (r, n)$. Пусть $\tau = \tilde{\iota}$ — сопряженный гомоморфизм $\tau: \mathbf{R} \times \mathbf{T} \rightarrow X$. Положим $g_t = \tau(t, 1)$, $g_t \in \Sigma_a$. Тогда $\tau(t, z) = (g_t, z)$. Поскольку, очевидно, $\overline{\iota(Y)} = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, то τ — мономорфизм [24, § 24.41].

Лемма 9 (см. [15]). Пусть a — рациональное число, $\tau: \mathbf{R} \times \mathbf{T} \rightarrow X$ — гомоморфизм, определенный выше. Пусть $K = \{(t, e^{ita}) : t \in \mathbf{R}\}$ — подгруппа в $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$. Тогда $\overline{\tau(K)} \cong \Sigma_a$.

Лемма 10. Пусть $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$, $\alpha_{ij} \in \text{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в

группе X и с распределениями μ_j такими, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Предположим, что линейные статистики $L_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3$, $L_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3$, $L_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3$ независимы. Тогда распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j , что распределения μ'_j сосредоточены на подгруппе $\tau(\mathbf{R} \times \mathbf{T})$.

Доказательство этой леммы проводится совершенно аналогично тому, как в [15] доказано соответствующее утверждение для двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и двух независимых линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta \in \text{Aut}(X)$.

Теорема 2. Пусть $X = \Sigma_a \times \mathbf{T}$, $\alpha_{ij} \in \text{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть ξ_j , $j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j такими, что их характеристические функции не обращаются в нуль. Предположим, что линейные статистики $L_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3$, $L_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3$, $L_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3$ независимы. Тогда либо μ_j — вырожденные распределения, либо μ_j — гауссовские распределения, носители которых — классы смежности группы X относительно подгруппы, топологически изоморфной Σ_a .

Доказательство. Пусть τ — определенный выше гомоморфизм. Обозначим $G = \tau(\mathbf{R} \times \mathbf{T})$. Как легко видеть, подгруппа G инвариантна относительно любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(X)$. По автоморфизму α определим отображение $\bar{\alpha}: \mathbf{R} \times \mathbf{T} \mapsto \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ формулой $\bar{\alpha}(t, z) = \tau^{-1}\alpha\tau(t, z)$. Легко проверить, что $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(\mathbf{R} \times \mathbf{T})$ и автоморфизму $\bar{\alpha}$ соответствует та же самая матрица, что и автоморфизму α . Учитывая лемму 10, можно с самого начала считать, что распределения μ_j сосредоточены на подгруппе G . Заметим, что поскольку отображение τ непрерывно и взаимно однозначно, то по теореме Суслина образы борелевских множеств при отображении τ — борелевские.

Пусть ξ — случайная величина со значениями в группе X , распределение которой сосредоточено на подгруппе G . Положим $\tilde{\xi} = \tau^{-1}\xi$. Тогда $\tilde{\xi}$ — случайная величина со значениями в группе $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$. Рассмотрим случайные величины $\tilde{\xi}_j$. Так как $\tau^{-1}\alpha_{ij}\xi_j = \bar{\alpha}_{ij}\tilde{\xi}_j$, то линейные статистики $\tilde{L}_1 = \bar{\alpha}_{11}\tilde{\xi}_1 + \bar{\alpha}_{12}\tilde{\xi}_2 + \bar{\alpha}_{13}\tilde{\xi}_3$, $\tilde{L}_2 = \bar{\alpha}_{21}\tilde{\xi}_1 + \bar{\alpha}_{22}\tilde{\xi}_2 + \bar{\alpha}_{23}\tilde{\xi}_3$, $\tilde{L}_3 = \bar{\alpha}_{31}\tilde{\xi}_1 + \bar{\alpha}_{32}\tilde{\xi}_2 + \bar{\alpha}_{33}\tilde{\xi}_3$ независимы. Пусть $\tilde{\mu}_j$ — распределения случайных величин $\tilde{\xi}_j$. Поскольку $\mu_j = \tau(\tilde{\mu}_j)$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 и леммы 9. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скитович В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, с. 217–219.

2. Darmais G. Analyse générale des liaisons stochastiques. Étude particulière de l'analyse factorielle linéaire. — Rev. Inst. Intern. Statist., 1953, v. 21, p. 2–8.
3. Казан А. М., Линник Ю. В., Пао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
4. Фельдман Г. М. Характеризация гауссовского распределения на группах независимостью линейных статистик. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 2, с. 180–190.
5. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
6. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для компактных групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 901–906.
7. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 747–756.
8. Neuenschwander D., Schott R. The Bernstein and Skitovich–Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces, and quantum groups. — Expo. Math., 1997, v. 15, № 4, p. 289–314.
9. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 603–607.
10. Feldman G. M., Graczyk P. On the Skitovich–Darmois theorem for compact Abelian groups. — J. Theoret. Probab., 2000, v. 13, № 3, p. 859–869.
11. Feldman G. M. On a characterization theorem for locally compact Abelian groups. — Probab. Theory Related Fields, 2005, v. 133, № 1, p. 345–357.
12. Миронюк М. В., Фельдман Г. М. Независимые линейные статистики на двумерном торе. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 1, с. 3–20.
13. Фельдман Г. М. Независимые линейные статистики на a -адических соленоидах. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 3, с. 515–532.
14. Feldman G. M., Graczyk P. The Skitovich–Darmois theorem for locally compact Abelian groups. — J. Aust. Math. Soc., 2010, v. 88, № 3, p. 339–352.
15. Feldman G. M., Myronyuk M. V. Independent linear forms on connected Abelian groups. — Math. Nachr., 2011, v. 284, № 2–3, p. 255–265.
16. Feldman G. M. Functional Equations and Characterization Problems on Locally Compact Abelian Groups. Zürich: European Math. Soc., 2008, 256 p. (EMS Tracts in Math., v. 5.)
17. Фельдман Г. М. Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 1, с. 47–58.
18. Baryshnikov Y., Eisenberg B., Stadje W. Independent variables with independent sum and difference: S^1 -case. — J. Multivariate Anal., 1993, v. 45, № 2, p. 161–170.
19. Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S. Probability distributions on locally compact abelian groups. — Illinois J. Math., 1963, v. 7, p. 337–369.
20. Parthasarathy K. R. Probability measures on metric spaces. New York–London: Academic Press, 1967, 276 p.
21. Фельдман Г. М. О разложении гауссовского распределения на группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 1, с. 136–143.
22. Feldman G. M. Arithmetic of Probability Distributions, and Characterization Problems on Abelian Groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1993, 223 p. (Transl. Math. Monogr., v. 116.)
23. Djoković D. Ž. A representation theorem for $(X_1 - 1)(X_2 - 1) \cdots (X_n - 1)$ and its applications. — Ann. Polon. Math., 1969, v. 22, p. 189–198.
24. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.

Поступила в редакцию
14.III.2013

Исправленный вариант
28.IV.2014