Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О неравномерных оценках точности аппроксимации в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 276–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:08:18

© 2014 г.

СЕНАТОВ В. В.*

**О НЕРАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ В
ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ**

Получены неравномерные и квазинеравномерные оценки, в которых «основное» слагаемое при широких условиях эквивалентно разности функций распределения. Построение этих оценок проводится с помощью асимптотических разложений.

Ключевые слова и фразы: асимптотические разложения, неравномерные оценки, точность аппроксимации, центральная предельная теорема.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией, конечным третьим моментом и общим распределением P . Обозначим P_n распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, Φ — стандартный нормальный закон, $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — его плотность. Хорошо известны неравномерные оценки точности аппроксимации в центральной предельной теореме (ЦПТ), например, при всех действительных x справедливо неравенство

$$|F_n(x) - G(x)| \leq c \frac{\beta_3}{(1 + |x|^3)\sqrt{n}}, \quad (1)$$

где F_n и G — функции распределения мер P_n и Φ , c — постоянная, β_3 — третий абсолютный момент распределения P . Назначение неравномерных оценок состоит в том, чтобы дать возможность получать оценки разности $F_n(x) - G(x)$, более точные, чем равномерные, за счет использования информации о том, что значение $|x|$ велико. Однако величины постоянных в известных неравномерных оценках существенно больше, чем величины постоянных в равномерных оценках, поэтому традиционные оценки вида (1) оказываются точнее равномерных лишь при достаточно больших значениях $|x|$, т.е. там, где их относительная точность невелика. Поэтому возникает вопрос о том, соответствуют ли традиционные неравномерные оценки своему назначению; ответ на него в настоящее время автору неизвестен.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

Цель данной работы — продемонстрировать оценки точности аппроксимации в ЦПТ, для которых «основные» (см. ниже) слагаемые меньше «основного» слагаемого в равномерной оценке (которое является неулучшаемым) при всех $x \neq 0$. Правда, следует сказать, что мы наложим дополнительные условия на распределение P . Одно из них состоит в том, что мы предположим существование четвертого момента, а второе — условие принадлежности P одному из двух определенных ниже классов распределений. Существование момента порядка выше третьего влечет появление еще одного вида неравномерности: помимо того, что оценка разности $F_n(x)$ и $G(x)$ улучшается при $|x| \rightarrow \infty$, она улучшается и при $|x| \rightarrow 1$, при $|x| = 1$ разность $F_n(x) - G(x)$ есть $o(1/\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$, в частности, $F_n(\pm 1) - G(\pm 1) = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$, если четвертый момент распределения P конечен. Первый из упоминавшихся классов состоит из распределений P , для которых

$$\int_1^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)| < 1, \quad (2)$$

где f — характеристическая функция распределения P , ν — некоторое положительное число, а второй — класс решетчатых распределений. Вначале мы займемся распределениями, для которых выполнены условия (2). Прежде всего отметим, что первое из них¹⁾ влечет непрерывность функции распределения $F(x)$ меры P . Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что из сходимости указанного интеграла следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^\nu dt \rightarrow 0$$

(это — аналог частного случая леммы Кронекера, см., например, [5, с. 543, формула (9)]), это же соотношение будет иметь место и при замене ν на любое натуральное $n \geq \nu$, а из хорошо известной формулы обращения

$$\Delta U(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} u(t) dt,$$

где $U(x)$ — произвольная функция распределения, $u(t)$ — ее характеристическая функция, $\Delta U(x)$ — величина скачка $U(x)$ в точке x , будет следовать, что $F_n(x)$, $n \geq \nu$, — непрерывная функция, что влечет непрерывность $F(x)$. По поводу второго из условий в (2) следует сказать, что оно называется условием (C) Крамера и использовалось в [2] для доказательства приведенного ниже соотношения (3). Из выполнения этого условия следует, в частности, нерешетчатость распределения P .

¹⁾ Это условие можно снять, слегка ухудшив оценки (см. [10]). — Прим. автора при корректуре.

Хорошо известно следующее представление разности $F_n(x) - G(x)$ для нерешетчатых распределений P : при всех действительных x

$$F_n(x) - G(x) = \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2)e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где α_3 — третий момент распределения P и величина $o(1/\sqrt{n})$ равномерна по всем действительным x . Удивительный и отчасти неожиданный факт состоит в том, что при $\alpha_3 \neq 0$ абсолютная величина первого слагаемого в правой части этого равенства (а оно получено Г. Крамером в 1937 г., см. выше, и обобщено К.-Г. Эссееном в 1945 г. в [7]) является, с одной оговоркой, наилучшаемой оценкой абсолютной величины левой части, более того, из (3) следует, что при всех действительных x , $|x| \neq 1$,

$$\frac{|F_n(x) - G(x)|}{(|\alpha_3|/(6\sqrt{2\pi n}))|1 - x^2|e^{-x^2/2}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Абсолютная величина первого слагаемого в правой части (3) и будет «основным» слагаемым в оценках, которые получены далее. Упомянутая оговорка состоит в следующем. Если мы рассматриваем распределения P с конечным моментом порядка k , то при каждом фиксированном n функция $|F_n(x) - G(x)|$ не может убывать (с точностью до медленно меняющейся функции) быстрее, чем $1/|x|^k$, точнее, она не может быть $O(1/|x|^{k+\varepsilon})$ одновременно при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ ни при каком $\varepsilon > 0$, поскольку при таком убывании этой функции интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{k+\delta-1} |F_n(x) - G(x)| dx$$

сходилась бы для любого $0 \leq \delta < \varepsilon$. Этот интеграл и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{k+\delta-1} |F_n(x) - E_0(x)| dx,$$

где $E_0(x)$ — вырожденная функция распределения с единичным скачком в нуле, сходятся или расходятся одновременно, а сходимости последнего влечет существование абсолютного момента порядка $k + \delta$ у распределения P_n , а потому и у P , что в общем случае неверно, если мы предполагаем лишь существование момента порядка k . Здесь мы воспользовались тем, что абсолютный момент порядка $s > 0$ распределения P можно вычислять по формуле

$$\beta_s = s \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{s-1} |E_0(x) - F(x)| dx, \quad s > 0,$$

аналогичная формула для обычных моментов имеет вид

$$\alpha_k = k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} (E_0(x) - F(x)) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

(эти формулы для неотрицательных случайных величин хорошо известны, см., например, [3, задача 3.91], в общем случае для их доказательства можно ввести случайные величины $X_1^+ = \max\{X_1, 0\}$ и $X_1^- = -\min\{X_1, 0\}$, при этом нужно учесть, что $X_1^k = (X_1^+ - X_1^-)^k = (X_1^+)^k + (-1)^k (X_1^-)^k$ и $|X_1|^s = (X_1^+ + X_1^-)^s = (X_1^+)^s + (X_1^-)^s$, поскольку в каждой точке вероятностного пространства, на котором определена X_1 , может быть отлична от нуля лишь одна из случайных величин X_1^+ , X_1^- ; последняя формула для α_k при $k = 1$, записанная в несколько ином виде, есть в [1, § 23, формула (3)] и в [5, с. 266, задача 39]).

Из сказанного следует, что в оценках величины $|F_n(x) - G(x)|$, для которых «основным» слагаемым является абсолютная величина первого слагаемого из правой части (3), необходимо присутствие «вспомогательных» слагаемых, которые либо равномерны по x (такие оценки мы будем называть квазинеравномерными), либо убывают при росте $|x|$ не быстрее $1/|x|^3$, если мы рассматриваем распределения P с конечным третьим моментом, или не быстрее $1/x^4$, если мы рассматриваем распределения P с конечным четвертым моментом. При этом «вспомогательные» слагаемые могут при росте n убывать быстрее «основного». Мы используем здесь кавычки из-за того, что при больших x вклад в оценку «основного» слагаемого может быть меньше суммарного вклада «вспомогательных» слагаемых.

По-видимому, сказанное выше об убывании оценок при $|x| \rightarrow \infty$, а также то обстоятельство, что абсолютная величина первого слагаемого в правой части (3) при $|x| \rightarrow \infty$ убывает экспоненциально быстро, привели к тому, что упомянутое слагаемое даже не рассматривалось как претендент хотя бы на участие в неравномерной или квазинеравномерной оценке.

Нам понадобятся следующие обозначения. Нетрудно понять, что при выполнении второго из условий (2) величина

$$\alpha(T) = \sup(|f(t)|: |t| \geq T)$$

строго меньше единицы для любого положительного значения T . Помимо характеристической функции $f(t)$ распределения P нам понадобится характеристическая функция $g(t) = e^{-t^2/2}$ стандартного нормального закона. Очевидно, что $g^n(t/\sqrt{n}) = g(t)$ для любого натурального n . Нам понадобятся числа

$$B_{k,n-l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots,$$

где $\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$ и $l \leq n$; зависимость этих чисел от T и l мы указывать не будем, это не должно привести к недоразумениям. Для

распределений с конечным четвертым моментом существует выбор T , при котором для любых k, l

$$B_{k,n-l} \rightarrow B_k, \quad n \rightarrow \infty,$$

где B_k — абсолютный момент порядка k стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$. Далее всюду, где будет появляться свободный параметр T , предполагается, что он выбран именно таким образом. Нам понадобятся многочлены Чебышёва–Эрмита $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$, $k = 0, 1, \dots$, и формула обращения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^k e^{-t^2/2} dt = H_k(x) \varphi(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

мы будем использовать только $H_0(x) \equiv 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$, $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$, $H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$. Отметим, что первое слагаемое в правой части (3) можно записать в виде $-(\alpha_3/(6\sqrt{n}))H_2(x)\varphi(x)$.

Нам понадобится хорошо известное равенство

$$a^k - b^k = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} b^j (a - b),$$

справедливое для любых комплексных чисел a, b и любого натурального k . Эта простая формула, точнее, ее многократное использование, будет одним из основных рабочих инструментов во всех доказательствах.

Теорема 1. Для распределений P с конечным четвертым моментом, удовлетворяющих условиям (2), при всех $n \geq \max\{\nu, 3\}$ и всех действительных x

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |1 - x^2| e^{-x^2/2} + R + K, \quad (4)$$

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{24n} B_{3,n-1} + \frac{\alpha_3^2}{72n} B_{5,n-2} + \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_{4,n-1} + \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{288n^{3/2}} B_{6,n-2},$$

$$|K| \leq \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi} \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2} + \frac{|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^\infty t^2 e^{-t^2/2} dt,$$

где $T > 0$ — параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении. В случае $\alpha_3 \neq 0$ левая часть неравенства (4) и первое слагаемое в его правой части при любом фиксированном $x \neq 1$ эквивалентны.

Доказательство. Проинтегрировав по частям правую часть равенства

$$f(t) - g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F(x) - G(x)),$$

мы получим формулу

$$\frac{f(t) - g(t)}{-it} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (F(x) - G(x)) dx,$$

следствием которой является равенство

$$\frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g(t)}{-it} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (F_n(x) - G(x)) dx. \quad (5)$$

Интеграл по всей действительной прямой от абсолютной величины подынтегрального выражения в правой части этого равенства является сходящимся и, как следует из сказанного выше, не превосходит суммы первых абсолютных моментов распределений P_n и Φ . При $n \geq \nu$ абсолютная величина левой части последнего равенства интегрируема по всей действительной прямой; интегрируемость на бесконечности обеспечивается первым из условий в (2), интегрируемость в окрестности нуля следует из того, что у распределений P_n и Φ первые два момента совпадают, поэтому числитель дроби в левой части равенства есть $O(t^3)$, $t \rightarrow 0$. Следовательно, справедлива формула обращения

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g(t)}{-it} dt.$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g(t)}{-it} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n})}{-it} dt \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{g(t)}{-it} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Почти очевидно, что абсолютная величина третьего слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t} dt \leq \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2} \quad (7)$$

и при росте n убывает экспоненциально быстро. Абсолютная величина второго слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_T^{\infty} \frac{|f(t)|^n}{t} dt \leq \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi} \int_T^{\infty} \frac{|f(t)|^{\nu}}{t} dt, \quad (8)$$

что также при росте n убывает экспоненциально быстро. Здесь мы воспользовались тем, что абсолютная величина характеристической функции является четной функцией. Первое слагаемое из (6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})}{-it} dt. \quad (9)$$

Рассмотрим разность

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad (10)$$

В правой части последнего равенства мы опустили аргументы у функций f^{n-j-1} и g^j , эти аргументы суть $t/\sqrt{n}$. Используя разложения функций f и g в отрезки их рядов Тейлора,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4, \\ g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4, \end{aligned}$$

мы видим, что левая часть (10) равна

$$\frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \quad (11)$$

Здесь и далее γ обозначает комплекснозначные функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы, эти функции могут быть различны даже в пределах одной формулы. Быть может, стоит отметить, что равенство $h(t) = \gamma H(t)$, где $\gamma = \gamma(t)$, $|\gamma| \leq 1$, эквивалентно неравенству $|h(t)| \leq |H(t)|$, поэтому справедливы, например, равенства $(\gamma + \gamma)/2 = \gamma$, $\gamma \cdot \gamma = \gamma$, где все три функции γ различны (первое из них означает, что абсолютная величина среднего двух функций, модули которых не превосходят единицы, вновь не превосходит единицы, а второе — что абсолютная величина произведения двух функций, модули которых не превосходят единицы, вновь не превосходит единицы), справедливы равенства $-\gamma = \gamma$, $i\gamma = \gamma$, где i — мнимая единица, а для неотрицательных функций $A(t)$, $B(t)$ справедливо равенство $\gamma A(t) + \gamma B(t) = \gamma(A(t) + B(t))$, где три функции γ различны и т.п.

Очевидно, что абсолютная величина суммы (11) не превосходит

$$\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} |t|^3 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Используя эту оценку, нетрудно понять, что модуль величины (9) не превосходит

$$\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} B_{2,n-1} + \frac{\beta_4 + 3}{24n} B_{3,n-1},$$

поэтому для всех действительных x

$$\begin{aligned} |F_n(x) - G(x)| &\leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} B_{2,n-1} + \frac{\beta_4 + 3}{24n} B_{3,n-1} \\ &+ \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi} \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Это — равномерная оценка величины $|F_n(x) - G(x)|$, в которой $B_{2,n-1} \sim 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.4$, а $B_{3,n-1} \sim 2/\pi \approx 0.64$. Сейчас мы увидим, что правая часть этого неравенства эквивалентна величине $|F_n(0) - G(0)|$.

При работе с величиной (11) мы можем действовать чуть деликатнее, чем при доказательстве неравенства (12). Рассмотрим сумму

$$\sum_{j=0}^{n-k} f^{n-k-j} g^j, \quad (13)$$

где $k = 1, 2, \dots$ и $k \leq n-1$. Такой вид с $k = 1$ имеет сумма по j из (11). Нетрудно понять, что сумму (13) можно преобразовать к виду

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} \{f^{n-k-j} - g^{n-k-j}\} g^j + (n-k+1)g^{n-k}.$$

Запишем разность в фигурных скобках в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{n-k-j-1} f^{n-k-j-1-j_1} g^{j_1} (f-g) &= \left(\frac{\alpha_3}{6} \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \\ &\times \gamma (n-k-j) \mu^{n-k-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Умножив правую часть этого равенства на g^j и просуммировав по j полученные произведения, нетрудно убедиться в том, что сумма (13) равна

$$\gamma \frac{\alpha_3}{6} t^3 \mu^{n-k-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{\beta_4 + 3}{4!} t^4 \mu^{n-k-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + (n-k+1)g^{n-k}.$$

Теперь ясно, что сумма (11) равна

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 n g^{n-1} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{72n} t^6 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{288n^{3/2}} t^7 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{24n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right); \end{aligned}$$

кроме того, понятно, что $g^{n-1} = g^n - (g^{n-1} e^{-t^2/(2n)} - g^{n-1}) = g^n + \gamma(t^2/(2n))g^{n-1}$.

Таким образом, для левой части (10) справедливо представление

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (it)^3 g^n + \gamma \frac{\alpha_3}{12n^{3/2}} t^5 g^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{24n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ + \gamma \frac{\alpha_3^2}{72n} t^6 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{288n^{3/2}} t^7 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

и величину (9) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (it)^2 e^{-t^2/2} dt + R, \quad (14)$$

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{24n} B_{3,n-1} + \frac{\alpha_3^2}{72n} B_{5,n-2} + \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_{4,n-1} + \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{288n^{3/2}} B_{6,n-2};$$

отметим, что $B_{4,n-1} \sim 3/\sqrt{2\pi} \approx 1.2$, $B_{5,n-1} \sim 8/\pi \approx 2.5$, $B_{6,n-1} \sim 15/\sqrt{2\pi} \approx 6$ и, кроме того, здесь вместо $B_{4,n-1}$ можно использовать величину $B_4(n/(n-1))^{5/2}$.

Величину из (14), связанную с интегралом, можно записать в виде

$$-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^2 e^{-t^2/2} dt + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>T\sqrt{n}} e^{-itx} (it)^2 e^{-t^2/2} dt.$$

Первое слагаемое в этой сумме совпадает с $-(\alpha_3/(6\sqrt{n}))H_2(x)\varphi(x)$, а модуль второго не превосходит величины

$$\frac{|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt, \quad (15)$$

которая при росте n убывает экспоненциально быстро.

Таким образом, мы получили асимптотическое разложение разности функций распределения $F_n(x)$ и $G(x)$,

$$F_n(x) - G(x) = \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} + R + K, \quad -\infty < x < \infty, \quad (16)$$

где величина R есть $O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$, и ее явная оценка указана выше, а абсолютная величина K не превосходит суммы величин (7), (8) и (15), которые при росте n убывают экспоненциально быстро.

Из этого разложения следует как эквивалентность правой и левой частей неравенства (12) при $x = 0$ и $\alpha_3 \neq 0$, упоминавшаяся выше, так и справедливость утверждения теоремы. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Неравенство, аналогичное (4), с тем же первым слагаемым в правой части, можно получить из любого асимптотического разложения для функций распределения с явной оценкой остаточной части. В частности, его можно получить из работы [8] 1974 г., из работы [6] 1996 г. и из любого разложения из [4] для функций распределения (большая часть последней работы посвящена разложениям для плотностей, но в § 15 главы 4 специально рассматривается вопрос о том, как из формул для плотностей можно получить разложения для функций распределения).

Теорема 2. Для распределений P с конечным четвертым моментом, удовлетворяющих условиям (2), при всех $n \geq \max\{\nu + 1, 3\}$ и всех действительных x

$$x(F_n(x) - G(x)) = -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} x H_2(x) \varphi(x) + R + M,$$

откуда следует, что при всех $x \neq 0$

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |1 - x^2| e^{-x^2/2} + \frac{|R|}{|x|} + \frac{|M|}{|x|},$$

где

$$|R| \leq c_{1,n} \frac{\beta_4 + 3}{n} + c_{2,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{3,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}},$$

$$c_{1,n} \approx 0.13, \quad c_{2,n} \approx 0.12, \quad c_{3,n} \approx 0.63, \quad c_{4,n} \approx 0.1,$$

точные значения этих величин указаны в формуле (40), а M является суммой четырех слагаемых, убывающих при росте n экспоненциально быстро, их оценки указаны в формулах (35), (36) и (41). В оценке $|F_n(x) - G(x)|$ первое слагаемое в правой части при $\alpha_3 \neq 0$ и каждом $|x| \neq 1$ эквивалентно его левой части.

Теорема 3. Для распределений P с конечным четвертым моментом, удовлетворяющих условиям (2), при всех $n \geq \max\{\nu + 2, 4\}$ и всех действительных x

$$x^2(F_n(x) - G(x)) = -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} x^2 H_2(x) \varphi(x) + R + M,$$

откуда следует, что при всех $x \neq 0$

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |1 - x^2| e^{-x^2/2} + \frac{|R|}{x^2} + \frac{|M|}{x^2},$$

где

$$|R| \leq c_{1,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{2,n} \frac{|\alpha_3| \beta_3}{n} + c_{3,n} \frac{\beta_4 + 3}{n} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} + c_{5,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}},$$

$$c_{1,n} \approx 0.69, \quad c_{2,n} \approx 0.16, \quad c_{3,n} \approx 0.69, \quad c_{4,n} \approx 0.43, \quad c_{5,n} \approx 3.5,$$

точные значения этих величин указаны в формулах (51) и (53), а M является суммой семи слагаемых, убывающих при росте n экспоненциально быстро, их оценки указаны в формулах (45)–(48) и (55). В оценке $|F_n(x) - G(x)|$ первое слагаемое в правой части при $\alpha_3 \neq 0$ и каждом $|x| \neq 1$ эквивалентно его левой части.

Теорема 4. Для распределений P с конечным четвертым моментом, удовлетворяющих условиям (2), при всех $n \geq \max\{\nu + 3, 5\}$ и всех действительных x

$$x^3(F_n(x) - G(x)) = -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} x^3 H_2(x) \varphi(x) + R + M,$$

откуда следует, что при всех $x \neq 0$

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |1 - x^2| e^{-x^2/2} + \frac{|R|}{|x|^3} + \frac{|M|}{|x|^3},$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq c_{1,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{2,n} \frac{|\alpha_3| \beta_3}{n} + c_{3,n} \frac{\beta_4 + 3}{n} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} \\ &\quad + c_{5,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi n^2}}, \\ c_{1,n} &\approx 2.5, \quad c_{2,n} \approx 1.8, \quad c_{3,n} \approx 4, \quad c_{4,n} \approx 1.6, \quad c_{5,n} \approx 18.1, \end{aligned}$$

точные значения этих величин указаны в формулах (72), а M является суммой десяти слагаемых, убывающих при росте n экспоненциально быстро, их оценки указаны в формулах (59)–(65) и (73). В оценке $|F_n(x) - G(x)|$ первое слагаемое в правой части при $\alpha_3 \neq 0$ и каждом $|x| \neq 1$ эквивалентно его левой части.

Доказательства этих утверждений мы отнесем в конец работы, а сейчас прокомментируем сформулированные оценки. «Основное» слагаемое в оценках $|F_n(x) - G(x)|$ имеет вид $|H_2(x)| e^{-x^2/2} |\alpha_3| / (6\sqrt{2\pi n})$, т.е. при росте $|x|$ убывает экспоненциально быстро. Оказывается, что существуют оценки величины $|F_n(x) - G(x)|$, которые при росте $|x|$ убывают степенным образом, но в некоторых зонах изменения $|x|$ лишь немногим хуже приведенной выше экспоненциальной оценки, правда, эти зоны являются достаточно узкими. Приведем эти оценки.

Нетрудно проверить, что $\max |x H_2(x) e^{-x^2/2}|$ достигается в точке $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1.93\dots$ и равен $c_1 = 0.8166\dots$, $\max |x^2 H_2(x) e^{-x^2/2}|$ достигается в точке $x_2 = \sqrt{(5 + \sqrt{17})/2} = 2.13\dots$ и равен $c_2 = 1.6604\dots$, а $\max |x^3 H_2(x) e^{-x^2/2}|$ достигается в точке $x_3 = \sqrt{3 + \sqrt{6}} = 2.33\dots$ и равен $c_3 = 3.7110\dots$. Поэтому

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \min \left\{ 1, \frac{c_1}{|x|}, \frac{c_2}{x^2}, \frac{c_3}{|x|^3} \right\} \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

для $O(1/n)$ можно выписать явную оценку, но нам она не понадобится. Сравним поведение указанного минимума, который мы обозначим $M(x)$, и функции $|H_2(x)| e^{-x^2/2}$ при возрастании $x > 0$. Нетрудно

проверить следующие равенства: $M(x) = 1$ на интервале $(0, x_{0,1})$, где $x_{0,1} = 0.8166\dots$; $M(x) = c_1/x$ на интервале $(x_{0,1}, x_{1,2})$, где $x_{1,2} = c_2/c_1 = 2.033\dots$; $M(x) = c_2/x^2$ на интервале $(x_{1,2}, x_{2,3})$, где $x_{2,3} = c_3/c_2 = 2.235\dots$; и $M(x) = c_3/x^3$ при $x > x_{2,3}$. На интервале $(1.8, 2.5)$ графики функций c_1/x , c_2/x^2 и c_3/x^3 довольно сильно переплетаются и значения этих функций близки к значениям функции $|H_2(x)|e^{-x^2/2}$, в частности, в точках x_1, x_2, x_3 графики функций $M(x)$ и $|H_2(x)|e^{-x^2/2}$ касаются друг друга. При больших значениях x оценки с последней функцией оказываются существенно точнее, в частности, при $x = 3$ значения функций c_1/x , c_2/x^2 , c_3/x^3 и $|H_2(x)|e^{-x^2/2}$ суть $0.272\dots$, $0.184\dots$, $0.137\dots$ и $0.088\dots$, а при $x = 4$ значения этих функций равны $0.204\dots$, $0.103\dots$, $0.057\dots$ и $0.005\dots$.

Разумеется, в качестве первого слагаемого в (1) можно взять величину

$$\frac{c_0}{1 + |x|^3} \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}}, \quad (18)$$

вид которой близок к традиционному виду неравномерных оценок. Посмотрим, что дает фиксация такой формы оценки. Во избежание недоразумений отметим, что мы не даем ее доказательства, хотя для тех распределений, которые мы рассматриваем, его можно получить из приведенных выше результатов. Мы хотим лишь получить ориентиры для нижней оценки постоянной c_0 . Выберем постоянную c_0 так, чтобы выполнялось равенство $c_0/(1 + x^3) = c_3/x^3$ при $x = x_{2,3}$. При таком выборе c_0 графики функций $c_0/(1 + x^3)$ и $M(x)$, $x > 0$, будут иметь единственную общую точку с абсциссой $x_{2,3}$ и ординатой c_3^2/c_2^2 , а значение c_0 равно $(c_2^3 + c_3^3)/c_2^2 = 4.043\dots$. Нетрудно проверить, что отношение функций $c_0/(1 + x^3)$ и $M(x)$ на интервале $(0, x_{0,1})$ убывает от $4.043\dots$ до $2.617\dots$, на интервале $(x_{0,1}, x_{1,2})$ убывает от $2.617\dots$ до $1.070\dots$, на интервале $(x_{1,2}, x_{2,3})$ убывает от 1.070 до 1 и на интервале $(x_{2,3}, \infty)$ возрастает от 1 до предельного значения $1.089\dots$. Таким образом, функция (18) с указанным значением c_0 неплохо оценивает первое слагаемое в правой части (17), но лишь на интервале $(x_{1,2}, \infty) = (2.033, \infty)$, а мы видели, что первое слагаемое в правой части (1) хорошо оценивает «основное» слагаемое в оценках, сформулированных выше, лишь на небольшом интервале $(1.8, 2.5)$.

Можно варьировать вид (2) «основного» слагаемого в неравномерных оценках, рассматривая оценки

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{C_a}{a + |x|^3} \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где $a > 0$, для распределений с конечным четвертым моментом. При этом мы будем считать, что величина C_a выбрана так, что графики

функций $C_a/(a + |x|^3)$ и $M(x)$ имеют при $x > 0$ общую точку с абсциссой $x_{2,3}$. Для $0 < a < 1$ такое варьирование ничего интересного не дает. Для $a > 1$ единственный заслуживающий упоминания факт состоит в том, что, определяя a и C_a из системы уравнений

$$\frac{C_a}{a + x_{2,3}^3} = \frac{c_3}{x_{2,3}^3}, \quad \frac{C_a}{a + x_{0,1}^3} = \frac{c_1}{x_{0,1}^3},$$

мы получим функцию $C_a/(a + |x|^3)$, график которой имеет две общие точки с графиком $M(x)$ (при этом $a \approx 4.8$, $C_a \approx 5.3$). При $x < x_{2,3}$ эта функция хорошо приближает $M(x)$, но при больших x , которые нам интересны, оценки (19) ничего хорошего не дают.

Приведем теперь несколько результатов для решетчатых распределений. Далее вплоть до начала доказательства леммы 1 мы считаем, что распределение P является решетчатым с шагом $h > 0$, т.е. $\text{supp } P \subset D = \{a + kh: k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где $\text{supp } P$ — носитель распределения P , т.е. множество всех его точек роста, $\text{supp } P = \{x: P(\{x\}^\varepsilon) > 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$, $\{x\}^\varepsilon$ означает ε -окрестность точки x , a — действительное число, h — максимальное число, для которого справедливо это включение. Разумеется, мы снимаем условия (2). Ясно, что носитель распределения P_n принадлежит решетке $D_n = \{a_n + kh/\sqrt{n}: k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где a_n — любое число из D_n , например, $a_n = a\sqrt{n}$.

Прежде всего отметим, что для решетчатых распределений справедлив аналог разложения (3), также полученный К.-Г. Эссееном, в правую часть которого следует добавить функцию $S_n(x)\varphi(x)$, где $S_n(x)$ — разрывная функция, возрастающая скачками величины $h/\sqrt{n}$ в точках решетки D_n и линейно убывающая на каждом интервале $(a_n + kh/\sqrt{n}, a_n + (k+1)h/\sqrt{n})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, от значения $h/(2\sqrt{n})$ до $-h/(2\sqrt{n})$. Очевидно, что в серединах указанных интервалов, т.е. в точках решетки D_n , сдвинутой на половину своего шага, иначе говоря, в точках решетки $\bar{D}_n = D_n + h/(2\sqrt{n})$, функция S_n равна нулю и в разложении (3) для решетчатых распределений можно опустить слагаемое, связанное с функцией S_n , при этом следует заменить слова «при всех действительных x » на условие $x \in \bar{D}_n$. Очевидно, что условие $x \in \bar{D}_n$ не умаляет общности результата, поскольку функция $F_n(x)$ постоянна на каждом интервале $(a_n + kh/\sqrt{n}, a_n + (k+1)h/\sqrt{n})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и, зная ее значения в серединах этих интервалов, мы знаем ее всюду.

Стоит отметить, что в случае, когда распределение P является распределением Бернулли, т.е. имеет ровно две точки роста, результат К.-Г. Эссеена, и даже с явной оценкой точности аппроксимации, можно получить из одного результата Я. В. Успенского 1937 г. [9]. Этому результату можно придать следующий вид.

Пусть распределение P имеет две точки роста $-p/\sqrt{pq}$ и $q/\sqrt{pq}$, в которых сосредоточены вероятности q и p (это распределение имеет

нулевое среднее, единичную дисперсию, третий момент $\alpha_3 = (q - p)/\sqrt{pq}$, четвертый момент $\beta_4 = (p^3 + q^3)/(pq)$ и шаг $h = 1/\sqrt{pq}$. Для любых $x, y \in \bar{D}_n$ при $n \geq 25/(pq)$ справедлива оценка

$$\left| F_n(x) - G(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(x)\varphi(x) - \left(F_n(y) - G(y) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(y)\varphi(y) \right) \right| \leq \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}.$$

Из этого утверждения, переходя к пределу по $y \rightarrow -\infty$, $y \in \bar{D}_n$, мы для любого $x \in \bar{D}_n$ получаем неравенство

$$\left| F_n(x) - G(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(x)\varphi(x) \right| \leq \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2},$$

из которого следует ранее сказанное. Отметим, что любое распределение Бернулли после центрирования и нормирования принимает тот вид, что указан выше.

Оказывается, что для любого решетчатого распределения с конечным четвертым моментом справедлив следующий аналог равенства (16):

$$F_n(x) - G(x) = \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2)e^{-x^2/2} + R + M, \quad x \in \bar{D}_n, \quad (20)$$

где R и M — величины, которые участвуют в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть P — решетчатое распределение с конечным четвертым моментом. Для любых $n \geq 2$ и $x \in \bar{D}_n$ справедлив аналог неравенства (4), в котором первое слагаемое совпадает с первым слагаемым в (4), оценка величины $|R|$ получается из оценки величины $|R|$ из (4) добавлением слагаемых

$$\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2, \quad \frac{\pi}{72} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 B_{4,n-1} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{288} \frac{\beta_4 + 3}{n} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 B_{5,n-1},$$

а оценка величины $|M|$ получается из оценки величины $|M|$ из (4) заменой первого слагаемого на $\alpha^n(T) \ln \sqrt{\pi/(Th)}$, второго на $e^{-T^2 n/2} \ln \sqrt{\pi/(Th)}$, и добавлением слагаемого $(h^2/\pi^3 n) e^{-\pi^2 n/(2h^2)}$. Здесь $h > 0$ — шаг распределения P , $0 < T \leq \pi/h$ — параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении, а величина $\alpha(T)$, строго меньшая единицы при любом указанном T , определяется по формуле $\alpha(T) = \max\{|f(t)|: T \leq t \leq \pi/h\}$.

Доказательство. Здесь мы воспользуемся формулой обращения из [4, гл. 5, § 2], следствием которой является равенство

$$F_n(x) - G(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} dt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} - \frac{1}{th/(2\sqrt{n})} \right) dt \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{e^{-t^2/2}}{it} dt
\end{aligned}$$

для $x \in \overline{D}_n$. Почти очевидно, что абсолютная величина последнего слагаемого не превосходит

$$\frac{h^2}{\pi^3 n} e^{-\pi^2 n/(2h^2)}. \quad (21)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} - \frac{1}{th/(2\sqrt{n})} &= \frac{th/(2\sqrt{n}) - \sin(th/(2\sqrt{n}))}{(th/(2\sqrt{n})) \sin(th/(2\sqrt{n}))} \\
&= \frac{\gamma}{6} \frac{th}{2\sqrt{n}} \frac{th/(2\sqrt{n})}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} = \gamma \frac{\pi}{12} \frac{th}{2\sqrt{n}}, \quad (22)
\end{aligned}$$

где функции γ таковы, что $|\gamma| \leq 1$. Здесь мы воспользовались тем, что $|u/\sin u| \leq \pi/2$ при $|u| \leq \pi/2$. Поэтому абсолютная величина второго слагаемого в правой части формулы обращения не превосходит

$$\frac{1}{24} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} |t| e^{-t^2/2} dt < \frac{1}{12} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2.$$

Первое слагаемое в правой части формулы обращения мы можем записать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} dt \\
& + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n})}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} dt \\
& - \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{e^{-t^2/2}}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} dt, \quad (23)
\end{aligned}$$

где $0 < T \leq \pi/h$ — параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении. Абсолютная величина последнего слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{4} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|} dt \leq \frac{e^{-T^2 n/2}}{2} \ln \frac{\pi}{Th},$$

а абсолютная величина второго не превосходит

$$\frac{\alpha^n(T)}{4} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} \frac{1}{|t|} dt = \frac{\alpha^n(T)}{2} \ln \frac{\pi}{Th}.$$

Рассмотрим первое слагаемое из (23). Мы можем записать его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}}{-it} dt \\ & + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) \\ & \quad \times \left(\frac{1}{\sin(th/(2\sqrt{n}))} - \frac{1}{th/(2\sqrt{n})} \right) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользовавшись цепочкой равенств (22), мы можем записать второе слагаемое в виде

$$\frac{1/2\pi}{h/2\sqrt{n}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) \gamma \frac{\pi}{12} \frac{th}{2\sqrt{n}} dt, \quad (25)$$

а так как

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} = \gamma \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} t^3 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{24n} t^4 \mu^{n-1},$$

то (25) по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{\pi}{72} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 B_{4,n-1} + \frac{\pi}{288} \frac{\beta_4 + 3}{n} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 B_{5,n-1}.$$

Первое из слагаемых в (24) мы уже рассматривали при доказательстве теоремы 1.

Собирая вместе полученные результаты и обращаясь к доказательству теоремы 1 начиная с формулы (9), нетрудно убедиться в справедливости разложения (20), а вместе с ним и теоремы 5.

Лемма 1. При $t \neq 0$ три первые производные функции $f(t)/t$ имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(t)}{t} \right)' &= \frac{(f(t))'t - f(t)}{t^2}, \quad \left(\frac{f(t)}{t} \right)'' = \frac{(f(t))''t^2 - 2(f(t))'t + 2f(t)}{t^3}, \\ \left(\frac{f(t)}{t} \right)''' &= \frac{(f(t))'''t^3 - 3(f(t))''t^2 + 6(f(t))'t - 6f(t)}{t^4}. \end{aligned}$$

Доказательство этой леммы для читателя, умеющего дифференцировать дробь, не представляет труда, и поэтому мы его опускаем.

Лемма 2. При $n \geq 3$ справедливы равенства

$$\left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)' t - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)' t = n f^{n-1} f' \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - n g^{n-1} g' \cdot \frac{t}{\sqrt{n}},$$

$$\begin{aligned}
& \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)'' t^2 - \left(g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)'' t^2 = n(n-1) f^{n-2} (f')^2 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \\
& \quad + n f^{n-1} f'' \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 - n(n-1) g^{n-2} (g')^2 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 - n g^{n-1} g'' \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2, \\
& \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)''' t^3 = n(n-1)(n-2) f^{n-3} (f')^3 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \\
& \quad + 3n(n-1) f^{n-2} f' f'' \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + n f^{n-1} f''' \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3,
\end{aligned}$$

равенство, аналогичное последнему, справедливо и для функции g . В правых частях этих равенств мы опустили аргументы у функций f , g и их производных, все эти аргументы суть $t/\sqrt{n}$. Справедливы представления

$$\begin{aligned}
f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4, \\
f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \gamma \frac{\beta_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3, \quad f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 + \gamma \frac{t^2}{2n}, \\
f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= -\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3, \\
f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= -\frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2, \quad f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \gamma \frac{t}{\sqrt{n}}, \\
f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= -1 - i\alpha_3 \frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\beta_4}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2, \quad f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = -1 + \gamma \beta_3 \frac{t}{\sqrt{n}}, \\
f''' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= -i\alpha_3 + \gamma \beta_4 \frac{t}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

где γ — комплекснозначные функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы. Справедливо также неравенство $|f''(t/\sqrt{n})| \leq 1$. Производные функции g в точке $t/\sqrt{n}$ суть

$$\begin{aligned}
g' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= -\frac{t}{\sqrt{n}} e^{-t^2/(2n)}, \quad g'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 - 1 \right) e^{-t^2/(2n)}, \\
g''' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= \left(-\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + 3 \frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)}.
\end{aligned}$$

Доказательство всех утверждений леммы достаточно очевидно, и мы его опускаем.

Лемма 3. Справедливы равенства

$$f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{i\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' t - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' t &= \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{\sqrt{n^{3/2}}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^3}{n} f^{n-1} \\ &+ \frac{\gamma}{6} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' t^2 - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' t^2 &= -\frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j \\ &+ \frac{n-1}{n} i\alpha_3 \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^6}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{3n} t^6 \mu^{n-2} \\ &+ \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^8 \mu^{n-3} + \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} \\ &+ \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' t^3 - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' t^3 &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^9}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} f^{n-j-4} g^j \\ &- \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} i \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t^7}{\sqrt{n}} f^{n-3} + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^{10} \mu^{n-4} \\ &+ \gamma \frac{3\alpha_3 \beta_3}{4n} t^8 f^{n-3} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^8 \mu^{n-3} - \frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j \\ &+ \frac{n-1}{n} i \frac{9\alpha_3}{2} \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \frac{\gamma}{8} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^8 \mu^{n-3} + \gamma \frac{3\alpha_3 \beta_3}{2n} t^6 f^{n-2} \\ &+ \gamma \frac{2(\beta_4 + 3)}{n} t^6 \mu^{n-2} - i\alpha_3 \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} + \frac{t^6}{n^2} g^n, \end{aligned} \quad (29)$$

где γ обозначает комплекснозначные функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы, эти функции могут быть различны даже в пределах одной формулы. В правых частях (26)–(29) аргументы функций f , g , μ опущены, все они суть $t/\sqrt{n}$. Функция $\mu(t)$ равна $\max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$.

Доказательство. Доказательство равенства (26) почти очевидно, оно основано на уже использовавшейся формуле $a^k - b^k = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} b^j (a - b)$, справедливой для любых комплексных чисел a , b и натурального k . Действительно,

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Используя первое из представлений функции $f(t/\sqrt{n})$ в виде отрезка ряда Тейлора из леммы 2 и аналогичное представление для функции

$$g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{t^2}{2}\right)^2,$$

мы видим, что правую часть предыдущего равенства можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \left(\frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right).$$

Дальнейшее очевидно.

Докажем равенство (27). Из леммы 2 следует, что его левую часть можно записать в виде

$$\begin{aligned} n \frac{t}{\sqrt{n}} (f^{n-1} f' - g^{n-1} g') &= n \frac{t}{\sqrt{n}} \left(f^{n-1} \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) + g^{n-1} \frac{t}{\sqrt{n}} e^{-t^2/(2n)} \right) \\ &= -n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 (f^{n-1} - g^{n-1}) - n \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 f^{n-1} \\ &\quad + n\gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 f^{n-1} + n \frac{\gamma}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 g^{n-1} \\ &= -n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \{f^{n-1} - g^{n-1}\} - n \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 f^{n-1} + \frac{\gamma}{6} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1}. \end{aligned}$$

Действуя также, как при доказательстве (26), мы можем преобразовать величину в фигурных скобках к виду

$$- \frac{i\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^4 \mu^{n-2}.$$

Теперь не составляет труда убедиться в справедливости равенства (27).

Для того чтобы доказать (28), рассмотрим вначале величину

$$n(n-1) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \{f^{n-2} (f')^2 - g^{n-2} (g')^2\}. \quad (30)$$

Так как

$$\begin{aligned} (f')^2 &= f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &= -\frac{t}{\sqrt{n}} \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) \\ &\quad - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \\ &= \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \gamma \frac{\beta_4}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4, \end{aligned}$$

то величина в фигурных скобках в (30) равна

$$\begin{aligned} & \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 f^{n-2} + i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 f^{n-2} - \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 g^{n-2} e^{-t^2/n} \\ & + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 f^{n-2} \\ & = \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 (f^{n-2} - g^{n-2}) + i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 f^{n-2} \\ & + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 \mu^{n-2}. \end{aligned}$$

Преобразуя разность $f^{n-2} - g^{n-2}$ так же, как при доказательстве (26), легко убедиться в том, что первое слагаемое в правой части последнего равенства можно записать в виде

$$- \frac{i\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5 \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n^2} t^6 \mu^{n-3}.$$

Поэтому величина (30) равна

$$\begin{aligned} & - \frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \frac{n-1}{n} i\alpha_3 \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^6}{n} f^{n-2} \\ & + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{3n} t^6 \mu^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^8 \mu^{n-3}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим величину

$$\begin{aligned} & n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 (f^{n-1} f'' - g^{n-1} g'') \\ & = n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \left(f^{n-1} \left(-1 - i\alpha_3 \frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\beta_4}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - g^{n-1} \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 - 1 \right) e^{-t^2/(2n)} \right) \\ & = -n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 (f^{n-1} - g^{n-1}) - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} - t^2 g^{n-1} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ & \quad + t^2 g^{n-1} (e^{-t^2/(2n)} - 1) + \gamma \frac{\beta_4}{2n} t^4 f^{n-1} \\ & = -n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 (f^{n-1} - g^{n-1}) - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 \mu^{n-1}. \end{aligned}$$

Так как разность $f^{n-1} - g^{n-1}$ мы уже преобразовывали, то нетрудно понять, что первое слагаемое в правой части последнего равенства можно

представить в виде

$$\frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2}$$

и правая часть последнего равенства есть

$$\frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2}.$$

Для того чтобы доказать (29), рассмотрим вначале величину

$$n(n-1)(n-2) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \{ f^{n-3} (f')^3 - g^{n-3} (g')^3 \}. \quad (31)$$

Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} (f')^3 &= \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) (f')^2 \\ &= -\frac{t}{\sqrt{n}} (f')^2 - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 (f')^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 \\ &= -\frac{t}{\sqrt{n}} \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) f' \\ &\quad - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \gamma \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) f' + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 \\ &= \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 f' + i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 f' + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 + \gamma \frac{\beta_4}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 \end{aligned}$$

и что

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 f' &= \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) \\ &= -\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 - \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \gamma \frac{\beta_4}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5, \\ i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 f' &= i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \\ &= -i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5. \end{aligned}$$

Поэтому величина в фигурных скобках в (31) равна

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 f^{n-3} - i \frac{3\alpha_3}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 f^{n-3} + \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 g^{n-3} e^{-3t^2/(2n)} \\ &+ \gamma \frac{3\alpha_3 \beta_3}{4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 f^{n-3} + \gamma \frac{\beta_4}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^5 f^{n-3} \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)(f^{n-3} - g^{n-3}) - i\frac{3\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 f^{n-3} \\ + \gamma\frac{3\alpha_3\beta_3}{4}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5 f^{n-3} + \gamma\frac{\beta_4+3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5 \mu^{n-3}.$$

Нетрудно проверить, что сама величина (31) равна

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^9}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} f^{n-j-4} g^j - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} i \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t^7}{\sqrt{n}} f^{n-3} \\ + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4+3}{n} t^{10} \mu^{n-4} + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{4n} t^8 f^{n-3} + \gamma \frac{\beta_4+3}{2n} t^8 \mu^{n-3}.$$

Теперь рассмотрим величину

$$3n(n-1)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \{f^{n-2} f' f'' - g^{n-2} g' g''\}. \quad (32)$$

Нетрудно понять, что

$$f' f'' = \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{i\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \gamma\frac{\beta_4}{6}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3\right) f'' \\ = -\frac{t}{\sqrt{n}} f'' - \frac{i\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 f'' + \gamma\frac{\beta_4}{6}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ = -\frac{t}{\sqrt{n}} \left(-1 - i\alpha_3 \frac{t}{\sqrt{n}} + \gamma\frac{\beta_4}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \\ - \frac{i\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \left(-1 + \gamma\beta_3 \frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma\frac{\beta_4}{6}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ = \frac{t}{\sqrt{n}} + i\frac{3\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \gamma\frac{\alpha_3\beta_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \gamma\frac{2\beta_4}{3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3.$$

Поэтому величина в фигурных скобках в (32) равна

$$\frac{t}{\sqrt{n}} f^{n-2} + i\frac{3\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 f^{n-2} - \frac{t}{\sqrt{n}} g^{n-2} e^{-t^2/n} + \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 g^n \\ + \gamma\frac{\alpha_3\beta_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 f^{n-2} + \gamma\frac{2\beta_4}{3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 f^{n-2} \\ = \frac{t}{\sqrt{n}}(f^{n-2} - g^{n-2}) + i\frac{3\alpha_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 f^{n-2} + \gamma\frac{\alpha_3\beta_3}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 f^{n-2} \\ + \frac{2(\beta_4+3)}{3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \mu^{n-2}.$$

Нетрудно проверить, что сама величина (32) равна

$$-\frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \frac{n-1}{n} i \frac{9\alpha_3}{2} \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \frac{\gamma}{8} \frac{\beta_4+3}{n} t^8 \mu^{n-3} \\ + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{2n} t^6 f^{n-2} + \gamma \frac{2(\beta_4+3)}{n} t^6 \mu^{n-2}.$$

Наконец, рассмотрим величину

$$\begin{aligned} & n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 (f^{n-1} f''' - g^{n-1} g''') \\ &= n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \left(f^{n-1} \left(-i\alpha_3 + \gamma \beta_4 \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-1} \left(3 \frac{t}{\sqrt{n}} - \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) e^{-t^2/(2n)} \right) \\ &= -i\alpha_3 \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} + \frac{t^6}{n^2} g^n. \end{aligned}$$

Собирая вместе полученные результаты, нетрудно убедиться в справедливости равенства (29). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Продифференцировав равенство (5), в левой части которого $g(t)$ можно заменить на $g^n(t/\sqrt{n})$, мы получим формулу

$$\left(\frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})}{t} \right)' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x (F_n(x) - G(x)) dx. \quad (33)$$

Нетрудно понять, что дифференцирование под знаком интеграла в правой части законно, поскольку интеграл по всей действительной оси от модуля подынтегрального выражения в правой части этого равенства конечен (он не превосходит полусуммы вторых моментов распределений P_n и Φ , т.е. единицы). Используя леммы 1 и 2, нетрудно убедиться в том, что левая часть последнего равенства есть

$$\frac{n(t/\sqrt{n})(f^{n-1}f' - g^{n-1}g') - (f^n - g^n)}{t^2} = \frac{A(t, n)}{t^2}.$$

Здесь мы, как обычно, опускаем аргументы у функций f , g и их производных, все они суть $t/\sqrt{n}$. Абсолютная величина этой дроби для $n \geq \nu + 1$ интегрируема на всей действительной оси. Интегрируемость на бесконечности обеспечивается первым из условий (2) и тем, что $|f'| \leq 1$ (абсолютная величина k -й производной характеристической функции не превосходит абсолютного момента k -го порядка). Интегрируемость в окрестности нуля обеспечивается упоминавшейся оценкой правой части (33), мы также сможем убедиться в ограниченности последней дроби, и даже в том, что она стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, после ее преобразований, которые будут проведены далее.

Из сказанного следует, что функцию $x(F_n(x) - G(x))$ можно вычислять по формуле обращения для преобразования Фурье:

$$x(F_n(x) - G(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{A(t, n)}{t^2} dt.$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{A(t, n)}{t^2} dt + M_1 + M_2, \quad (34)$$

где выбор $T > 0$ находится в нашем распоряжении, а

$$|M_1| \leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(|f(t/\sqrt{n})|^{n-1}|f'(t/\sqrt{n})| + |g(t/\sqrt{n})|^{n-1}|g'(t/\sqrt{n})|)}{t} dt,$$

$$|M_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{(|f(t/\sqrt{n})|^n + |g(t/\sqrt{n})|^n)}{t^2} dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что абсолютные величины характеристических функций и их производных являются четными функциями. Так как абсолютная величина первой производной функции f не превосходит единицы, а $g'(t/\sqrt{n}) = -(t/\sqrt{n})e^{-t^2/(2n)}$, то

$$|M_1| \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^{\infty} \frac{|f(t)|^{\nu}}{t} dt + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}, \quad (35)$$

$$|M_2| \leq \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} \frac{|f(t)|^{\nu}}{t} dt + \frac{1}{\pi T^3 n^{3/2}} e^{-T^2 n/2}, \quad (36)$$

эти величины при росте n убывают экспоненциально быстро.

Нетрудно понять, что величину $A(t, n)$ можно записать в виде

$$A(t, n) = \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)' t - \left(g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)' t - \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Используя равенства (26) и (27) из леммы 3, правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\gamma}{6} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2} \\ & - \left(-\frac{i\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Разделив эту величину на t^2 , мы получим сумму, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{\alpha_3}{2} \frac{it}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\alpha_3}{6} \frac{it}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \\ & + \gamma \frac{5}{24} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^2 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^4 \mu^{n-2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Очевидно, что эта сумма стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, о чем мы упоминали выше. Заметим, что второе и третье слагаемые этой суммы частично компенсируют друг друга, точнее,

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_3}{2} \frac{it}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\alpha_3}{6} \frac{it}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \\ & = -\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} f^{n-1} - \frac{\alpha_3}{6} \frac{it}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n-1} f^{n-j-1} \{f^j - g^j\}. \end{aligned}$$

Последнюю величину в фигурных скобках можно записать в виде

$$j \left(\gamma \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \mu^{j-1},$$

поэтому сумма второго и третьего слагаемых в (37) равна

$$-\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{t^4}{n} \mu^{n-2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\alpha_3}{6} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{t^5}{n^{3/2}} \mu^{n-2}. \quad (38)$$

Преобразуем первое слагаемое в (37). Очевидно, что его можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} (f^{n-j-2} - g^{n-j-2}) g^j - \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{3/2}} (n-1) g^{n-2} \\ & = -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} g^{n-2} \\ & \quad + \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} \left(\gamma \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \frac{n^2}{2} \mu^{n-3}, \end{aligned}$$

а первое слагаемое в правой части этого равенства можно записать в виде

$$-\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^n + \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^{n-2} (e^{-t^2/n} - 1) = -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^n + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} g^{n-2}.$$

Первое слагаемое в (38) равно

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-1} - \frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} (f^{n-1} - g^{n-1}) \\ & = -\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-1} + \frac{\alpha_3}{3} \frac{t}{\sqrt{n}} \left(\gamma \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) n \mu^{n-2}, \end{aligned}$$

а первое слагаемое в правой части последнего равенства можно записать в виде

$$-\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^n + \frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-1} (e^{-t^2/(2n)} - 1) = -\frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^n + \gamma \frac{\alpha_3}{3} \frac{t^3}{n^{3/2}} g^{n-1}.$$

Собирая вместе полученные результаты, мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{A(t, n)}{t^2} & = -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^n - \frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^n + \gamma \frac{5}{24} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^2 \mu^{n-1} \\ & \quad + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^4 \mu^{n-2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{t^4}{n} \mu^{n-2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\alpha_3}{6} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{t^5}{n^{3/2}} \mu^{n-2} \\ & \quad + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} g^{n-2} + \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} \left(\gamma \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) \\ & \quad \quad \quad \times C_{n-1}^2 \mu^{n-3} + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} g^{n-2} \\ & \quad + \frac{\alpha_3}{3} \frac{t}{\sqrt{n}} \left(\gamma \frac{\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 \right) n \mu^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} g^{n-1}. \end{aligned}$$

Теперь понятно, что первое слагаемое в (34) равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(-\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^3}{n^{1/2}} g^n - \frac{\alpha_3}{3} \frac{it}{\sqrt{n}} g^n \right) dt + R, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq c_{1,n} \frac{\beta_4 + 3}{n} + c_{2,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{3,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}}, \\ c_{1,n} &= \frac{5B_{2,n-1}}{24} + \frac{B_{4,n-2}}{24} \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0.13, \\ c_{2,n} &= \frac{B_{4,n-2}}{72} + \frac{B_{6,n-3}}{72} + \frac{B_{4,n-2}}{18} \sim \frac{7}{24\sqrt{2\pi}} \approx 0.12, \\ c_{3,n} &= \frac{B_3}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^2 + \frac{B_5}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^3 + \frac{B_3}{6} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \sim \frac{2}{\pi} \approx 0.63, \\ c_{4,n} &= \frac{B_{5,n-2}}{288} + \frac{B_{7,n-3}}{288} + \frac{B_{5,n-2}}{72} \sim \frac{11}{36\pi} \approx 0.1. \end{aligned} \quad (40)$$

Величина, связанная с интегралом из (39), равна

$$-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^3 e^{-t^2/2} dt + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it) e^{-t^2/2} dt \right) + M_3 + M_4,$$

где

$$|M_3| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt, \quad |M_4| \leq \frac{|\alpha_3|}{3\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt. \quad (41)$$

Сумма в последних скобках равна $(H_3(x) + 2H_1(x))\varphi(x) = xH_2(x)\varphi(x)$.

Таким образом, мы получили асимптотическое разложение $x(F_n(x) - G(x)) = -(\alpha_3/6\sqrt{n})xH_2(x)\varphi(x) + R + M$, где R — сумма величин, убывающих при росте n степенным образом, равномерная по x оценка этой суммы указана выше, а M — сумма четырех слагаемых, убывающих при росте n экспоненциально быстро, их равномерные оценки также указаны выше. Утверждение теоремы 2 доказано.

Доказательство теоремы 3. Продифференцировав равенство (33), мы получим формулу

$$\left(\frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})}{it} \right)'' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^2 (F_n(x) - G(x)) dx. \quad (42)$$

Нетрудно понять, что дифференцирование под знаком интеграла в правой части законно, поскольку интеграл по всей действительной оси от модуля подынтегрального выражения в правой части этого равенства конечен (он не превосходит одной трети суммы третьих абсолютных моментов распределений P_n и Φ). Используя лемму 1, нетрудно убедиться в том, что левая часть последнего равенства есть

$$\frac{A_1(t, n) - 2A_2(t, n) + 2A_3(t, n)}{it^3}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(t, n) &= \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)'' t^2 - \left(g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)'' t^2, \\ A_2(t, n) &= \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)' t - \left(g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)' t, \\ A_3(t, n) &= f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Из леммы 2 ясно, что абсолютная величина дроби (43) для $n \geq \nu + 2$ интегрируема на всей действительной оси. Интегрируемость на бесконечности обеспечивается первым из условий (2) и тем, что $|f'| \leq 1$ и $|f''| \leq 1$. Интегрируемость в окрестности нуля обеспечивается упоминавшейся оценкой правой части (42), мы также сможем убедиться в ограниченности последней дроби в окрестности нуля после ее преобразований, которые будут проведены далее.

Из сказанного следует, что функцию $x^2(F_n(x) - G(x))$ можно вычислять по формуле обращения для преобразования Фурье:

$$x^2(F_n(x) - G(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{A_1(t, n) - 2A_2(t, n) + 2A_3(t, n)}{it^3} dt.$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{A_1(t, n) - 2A_2(t, n) + 2A_3(t, n)}{it^3} dt + M_1 + \dots + M_4, \quad (44)$$

где выбор $T > 0$ находится в нашем распоряжении и

$$\begin{aligned} |M_1| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{n(|f(t/\sqrt{n})|^{n-2}|f'(t/\sqrt{n})|^2 + |g(t/\sqrt{n})|^{n-2}|g'(t/\sqrt{n})|^2)}{t} dt, \\ |M_2| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{(|f(t/\sqrt{n})|^{n-1}|f''(t/\sqrt{n})| + |g(t/\sqrt{n})|^{n-1}|g''(t/\sqrt{n})|)}{t} dt, \\ |M_3| &\leq \frac{2}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(|f(t/\sqrt{n})|^{n-1}|f'(t/\sqrt{n})| + |g(t/\sqrt{n})|^{n-1}|g'(t/\sqrt{n})|)}{t^2} dt, \\ |M_4| &\leq \frac{2}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{|f(t/\sqrt{n})|^n + |g(t/\sqrt{n})|^n}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Совпадение некоторых обозначений в этой теореме с обозначениями теоремы 2 не должно привести к недоразумениям, доказательства всех теорем проводятся независимо друг от друга. Так как абсолютные величины двух первых производных функции f не превосходят единицы, а $g'(t/\sqrt{n}) = -(t/\sqrt{n})e^{-t^2/(2n)}$ и $g''(t/\sqrt{n}) = ((t/\sqrt{n})^2 - 1)e^{-t^2/(2n)}$, то

$$|M_1| \leq \frac{n}{\pi} \alpha^{n-2-\nu}(T) \int_T^{\infty} \frac{|f(t)|^{\nu}}{t} dt + \frac{1}{\pi} e^{-T^2 n/2}, \quad (45)$$

$$|M_2| \leq \frac{1}{\pi} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{1}{\pi n} e^{-T^2 n/2} + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2}, \quad (46)$$

$$|M_3| \leq \frac{2}{\pi T} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{2}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2}, \quad (47)$$

$$|M_4| \leq \frac{2}{\pi T^2 n} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{2}{\pi T^4 n^2} e^{-T^2 n/2}, \quad (48)$$

эти величины при росте n убывают экспоненциально быстро.

Используя лемму 3, нетрудно убедиться в том, что числитель дроби в интеграле в (44) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \frac{n-1}{n} i\alpha_3 \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^6}{n} f^{n-2} \\ & + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{3n} t^6 \mu^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^8 \mu^{n-3} + \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j \\ & - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2} \\ & - 2 \left\{ \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\gamma}{6} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} \right. \\ & \quad \left. + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^6 \mu^{n-2} \right\} \\ & + 2 \left(-\frac{i\alpha_3}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в этой сумме седьмое слагаемое и второе слагаемое в фигурных скобках, умноженное на -2 , уничтожают друг друга, а шестое слагаемое и первое слагаемое в фигурных скобках, умноженное на -2 , частично компенсируют друг друга: их сумма равна шестому слагаемому с противоположным знаком. Разделив эту сумму на it^3 и приводя «подобные» члены, мы получим сумму

$$\begin{aligned} & -\frac{n-1}{n} \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j - \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j \\ & + \frac{n-1}{n} \alpha_3 \frac{t^2}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^3}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^5 \mu^{n-3} \\ & + \frac{11\gamma}{24} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^3 \mu^{n-2} + \frac{11\gamma}{12} \frac{\beta_4 + 3}{n} t \mu^{n-1} \\ & = -\frac{n-1}{n} \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{3/2}} (n-2) g^{n-3} - \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{3/2}} (n-1) g^{n-2} - \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{3/2}} n g^{n-1} \\ & + \frac{n-1}{n} \alpha_3 \frac{t^2}{\sqrt{n}} g^{n-2} - \frac{n-1}{n} \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} (f^{n-j-3} - g^{n-j-3}) g^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} (f^{n-j-2} - g^{n-j-2}) g^j - \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} (f^{n-j-1} - g^{n-j-1}) g^j \\
& + \frac{n-1}{n} \alpha_3 \frac{t^2}{\sqrt{n}} (f^{n-2} - g^{n-2}) + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^3}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^5 \mu^{n-3} \\
& + \frac{11\gamma}{24} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^3 \mu^{n-2} + \frac{11\gamma}{12} \frac{\beta_4 + 3}{n} t \mu^{n-1} \\
& = -\frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{1/2}} g^{n-3} + \frac{3n-2}{n} \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{3/2}} g^{n-3} + \frac{5\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{1/2}} g^{n-2} - \frac{5\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{3/2}} g^{n-2} \\
& - \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{3/2}} n g^{n-1} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{t^7}{n} \mu^{n-4} \\
& + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{288} \frac{t^8}{n^{3/2}} \mu^{n-4} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{t^5}{n} \mu^{n-3} + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{288} \frac{t^6}{n^{3/2}} \mu^{n-3} \\
& + \gamma \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{t^3}{n} \mu^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{144} \frac{t^4}{n^{3/2}} \mu^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{6} \frac{t^5}{n} \mu^{n-3} \\
& + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{24} \frac{t^6}{n^{3/2}} \mu^{n-3} + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_3}{4} \frac{t^3}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4! n} t^5 \mu^{n-3} \\
& + \frac{11\gamma}{24} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^3 \mu^{n-2} + \frac{11\gamma}{12} \frac{\beta_4 + 3}{n} t \mu^{n-1}
\end{aligned} \tag{49}$$

Очевидно, что сумма в правой части последнего равенства ограничена в окрестности нуля. Умножив эту сумму, за исключением первого, третьего и пятого слагаемых, на $1/(2\pi)$ и проинтегрировав ее от $-T\sqrt{n}$ до $T\sqrt{n}$, мы получим величину, не превосходящую

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6} \right)^2 \frac{B_{7,n-4}}{n} + \frac{13\alpha_3^2}{72} \frac{B_{5,n-3}}{n} + \frac{\alpha_3^2}{36} \frac{B_{3,n-2}}{n} + \frac{|\alpha_3| \beta_3}{4} \frac{B_{3,n-2}}{n} \\
& + \frac{\beta_4 + 3}{24} \frac{B_{5,n-3}}{n} + \frac{11(\beta_4 + 3)}{24} \frac{B_{3,n-2}}{n} + \frac{11(\beta_4 + 3)}{12} \frac{B_{1,n-1}}{n} \\
& + \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{288} \frac{B_{8,n-4}}{n^{3/2}} + \frac{13|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{288} \frac{B_{6,n-3}}{n^{3/2}} + \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{144} \frac{B_{4,n-2}}{n^{3/2}} \\
& + \frac{|\alpha_3|}{2} \frac{B_4}{n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-3} \right)^{5/2} + \frac{5|\alpha_3|}{6} \frac{B_2}{n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{3/2} \\
& = c_{1,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{2,n} \frac{|\alpha_3| \beta_3}{n} + c_{3,n} \frac{\beta_4 + 3}{n} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} + \tilde{c}_{5,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}},
\end{aligned} \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{1,n} &= \frac{B_{7,n-4}}{72} + \frac{13B_{5,n-3}}{72} + \frac{B_{3,n-2}}{36} \sim \frac{48}{72\pi} + \frac{13 \cdot 8}{72\pi} + \frac{2}{36\pi} \approx 0.69, \\
 c_{2,n} &= \frac{B_{3,n-2}}{4} \sim \frac{2}{4\pi} \approx 0.16, \\
 c_{3,n} &= \frac{B_{5,n-3}}{24} + \frac{11B_{3,n-2}}{24} + \frac{11B_{1,n-1}}{12} \sim \frac{8}{24} + \frac{11 \cdot 2}{24\pi} + \frac{11}{12\pi} \approx 0.69, \\
 c_{4,n} &= \frac{B_{8,n-4}}{288} + \frac{13B_{6,n-3}}{288} + \frac{B_{4,n-2}}{144} \sim \frac{105}{288\sqrt{2\pi}} \\
 &\quad + \frac{13 \cdot 15}{288\sqrt{2\pi}} + \frac{3}{144\sqrt{2\pi}} \approx 0.43, \\
 \tilde{c}_{5,n} &= \frac{B_4}{2} \left(\frac{n}{n-3} \right)^{5/2} + \frac{5B_2}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{3/2} \sim \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{5}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.93.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Сумму первого, третьего и пятого слагаемых правой части последнего равенства в (49) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^4}{n^{1/2}} g^n - \frac{5\alpha_3}{6} \frac{(it)^2}{n^{1/2}} g^n - \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{1/2}} g^n + \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{1/2}} (g^n - g^{n-3}) \\
 & - \frac{5\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{1/2}} (g^n - g^{n-2}) + \frac{\alpha_3}{3} \frac{1}{n^{1/2}} (g^n - g^{n-1}).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Сумму последних трех слагаемых мы можем представить в виде

$$\gamma \frac{\alpha_3}{4} \frac{t^6}{n^{3/2}} g^{n-3} + \gamma \frac{5\alpha_3}{6} \frac{t^4}{n^{3/2}} g^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^2}{n^{3/2}} g^{n-1}.$$

Проинтегрировав эту сумму так же, как мы интегрировали слагаемые из (49), мы видим, что к сумме (50) нужно добавить

$$\frac{|\alpha_3|}{4} \frac{B_6}{n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-3} \right)^{7/2} + \frac{5|\alpha_3|}{6} \frac{B_4}{n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{5/2} + \frac{|\alpha_3|}{6} \frac{B_2}{n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{3/2},$$

в связи с этим коэффициент при $|\alpha_3|/n^{3/2}$ в оценке остаточной части увеличится, он станет равным

$$c_{5,n} \sim \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{5}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{15}{4\sqrt{2\pi}} + \frac{5 \cdot 3}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \approx 3.5. \tag{53}$$

Интегрируя сумму первых трех слагаемых из (52), мы получим

$$-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} ((it)^4 + 5(it)^2 + 2) g^n dt + M_5 + M_6 + M_7, \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned} |M_5| &\leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt, & |M_6| &\leq \frac{5|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt, \\ |M_7| &\leq \frac{|\alpha_3|}{3\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Отметим, что сумма трех последних величин при $T\sqrt{n} \geq 10$ не превосходит $1.0502M_5$.

Легко видеть, что величина, связанная с интегралом в (54), равна

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (H_4(x) + 5H_2(x) + 2H_0(x))\varphi(x) \\ &= -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (x^4 - 6x^2 + 3 + 5(x^2 - 1) + 2)\varphi(x) \\ &= -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (x^4 - x^2)\varphi(x) = -\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} x^2 H_2(x)\varphi(x). \end{aligned}$$

Дальнейшее очевидно.

Доказательство теоремы 4. Продифференцировав равенство (42), мы получим формулу

$$-\left(\frac{f^n(t/\sqrt{n}) - g^n(t/\sqrt{n})}{t}\right)''' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^3 (F_n(x) - G(x)) dx. \quad (56)$$

Нетрудно понять, что дифференцирование под знаком интеграла в правой части законно, поскольку интеграл по всей действительной оси от модуля подынтегрального выражения в правой части этого равенства конечен (он не превосходит одной четверти суммы четвертых абсолютных моментов распределений P_n и Φ , а они суть $3 + (\alpha_4 - 3)/n$ и 3). Используя лемму 1, нетрудно убедиться в том, что левая часть последнего равенства есть

$$-\frac{A_1(t, n) - 3A_2(t, n) + 6A_3(t, n) - 6A_4(t, n)}{t^4}, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(t, n) &= \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' t^3 - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' t^3, \\ A_2(t, n) &= \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' t^2 - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' t^2, \\ A_3(t, n) &= \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' t - \left(g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' t, \\ A_4(t, n) &= f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Используя лемму 2, легко убедиться в том, что абсолютная величина дроби (57) для $n \geq \nu + 3$ интегрируема на всей действительной оси. Интегрируемость на бесконечности обеспечивается первым из условий (2) и тем, что абсолютные величины первых трех производных характеристической функции f ограничены. Интегрируемость в окрестности нуля обеспечивается упоминавшейся оценкой правой части (56), мы также сможем убедиться в ограниченности последней дроби после ее преобразований, которые будут проведены далее.

Из сказанного следует, что функцию $x^3(F_n(x) - G(x))$ можно вычислять по формуле обращения для преобразования Фурье

$$\begin{aligned} & x^3(F_n(x) - G(x)) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{A_1(t, n) - 3A_2(t, n) + 6A_3(t, n) - 6A_4(t, n)}{t^4} dt. \end{aligned}$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$-\frac{1}{2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{A_1(t, n) - 3A_2(t, n) + 6A_3(t, n) - 6A_4(t, n)}{t^4} dt + M_1 + \dots + M_7, \quad (58)$$

где выбор $T > 0$ находится в нашем распоряжении и

$$\begin{aligned} |M_1| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{t} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-3} \left| f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^3 + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-3} \left| g'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^3 \right) dt, \\ |M_2| &\leq \frac{3}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{t} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-2} \left| f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \left| f''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-2} \left| g'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \left| g''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) dt, \\ |M_3| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{1}{t\sqrt{n}} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| f''' \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| g''' \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) dt, \\ |M_4| &\leq \frac{3}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{n}{t^2} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-2} \left| f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^2 + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-2} \left| g'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^2 \right) dt, \\ |M_5| &\leq \frac{3}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| f''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| g''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) dt, \\ |M_6| &\leq \frac{6}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{t^3} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \left| g'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) dt, \\ |M_7| &\leq \frac{6}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \frac{1}{t^4} \left(\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n + \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n \right) dt. \end{aligned}$$

Совпадение некоторых обозначений в этой теореме с обозначениями теорем 2 и 3 не должно привести к недоразумениям, доказательства всех

теорем проводятся независимо друг от друга. Так как абсолютные величины двух первых производных функции f не превосходят единицы, модуль ее третьей производной не превосходит β_3 , а

$$g'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t}{\sqrt{n}} e^{-t^2/(2n)}, \quad g''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 - 1\right) e^{-t^2/(2n)},$$

$$g'''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + 3\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/(2n)},$$

то

$$|M_1| \leq \frac{n^{3/2}}{\pi} \alpha^{n-3-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{T\sqrt{n}}{\pi} e^{-T^2 n/2} + \frac{e^{-T^2 n/2}}{\pi T \sqrt{n}}, \quad (59)$$

$$|M_2| \leq \frac{3\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-2-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{3T}{\pi\sqrt{n}} e^{-T^2 n/2} + \frac{3}{\pi T n^{3/2}} e^{-T^2 n/2} + \frac{3}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}, \quad (60)$$

$$|M_3| \leq \frac{3}{\pi\sqrt{n}} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{3}{\pi T n^{3/2}} e^{-T^2 n/2} + \frac{T}{\pi n^{3/2}} e^{-T^2 n/2} + \frac{1}{\pi T n^{5/2}} e^{-T^2 n/2}, \quad (61)$$

$$|M_4| \leq \frac{3\sqrt{n}}{\pi T} \alpha^{n-2-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{3}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}, \quad (62)$$

$$|M_5| \leq \frac{3}{\pi T \sqrt{n}} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{3}{\pi T n^{3/2}} e^{-T^2 n/2} + \frac{3}{\pi T^3 n^{3/2}} e^{-T^2 n/2}, \quad (63)$$

$$|M_6| \leq \frac{6}{\pi T^2 \sqrt{n}} \alpha^{n-1-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{6}{\pi T^3 n^{3/2}} e^{-T^2 n/2}, \quad (64)$$

$$|M_7| \leq \frac{6}{\pi T^3 n^{3/2}} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t} dt + \frac{6}{\pi T^5 n^{5/2}} e^{-T^2 n/2}, \quad (65)$$

эти величины при росте n убывают экспоненциально быстро.

Используя лемму 3, нетрудно убедиться в том, что числитель дроби (57) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^9}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} f^{n-j-4} g^j - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} i \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t^7}{\sqrt{n}} f^{n-3} \\ & + \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^{10} \mu^{n-4} + \gamma \frac{3\alpha_3 \beta_3}{4n} t^8 f^{n-3} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^8 \mu^{n-3} \\ & - \frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \frac{n-1}{n} i \frac{9\alpha_3}{2} \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{8} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^8 \mu^{n-3} + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{2n} t^6 f^{n-2} + \gamma \frac{2(\beta_4 + 3)}{n} t^6 \mu^{n-2} \\
& - i\alpha_3 \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} + \frac{t^6}{n^2} g^n \\
& - 3 \left[- \frac{n-1}{n} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^7}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-3} f^{n-j-3} g^j + \frac{n-1}{n} i\alpha_3 \frac{t^5}{\sqrt{n}} f^{n-2} \right. \\
& \quad + \gamma \frac{\alpha_3\beta_3}{4} \frac{t^6}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{3n} t^6 \mu^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^8 \mu^{n-3} \\
& \quad + \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - i \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} t^3 f^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 \mu^{n-1} \\
& \quad \left. + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^6 \mu^{n-2} \right] \\
& + 6 \left\{ \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j - \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-1} + \frac{\gamma}{6} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1} \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^6 \mu^{n-2} \right\} \\
& + i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j + \frac{\gamma}{4} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-1}. \tag{66}
\end{aligned}$$

Заметим, что сумма седьмого слагаемого в квадратных скобках и второго в фигурных, а также сумма шестого слагаемого и первого в квадратных после умножения на соответствующие коэффициенты равны нулю, а одиннадцатое и предпоследнее слагаемые частично компенсируют друг друга: их сумма равна

$$-i\alpha_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} (f^j - g^j) = \gamma \frac{\alpha_3^2}{12} \frac{t^6}{n} \mu^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{48} \frac{t^7}{n^{3/2}} \mu^{n-2}.$$

Теперь сумму из (66) без первого, второго, седьмого слагаемых, без второго, шестого в квадратных скобках и первого в фигурных, деленную на t^4 , мы можем записать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^6 \mu^{n-4} + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{4n} t^4 f^{n-3} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{2n} t^4 \mu^{n-3} \\
& + \frac{\gamma}{8} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-3} + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{2n} t^2 f^{n-2} + \gamma \frac{2(\beta_4 + 3)}{n} t^2 \mu^{n-2} \\
& + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} \mu^{n-1} + \frac{t^2}{n^2} g^n + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{4} \frac{t^2}{n} f^{n-2} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} t^2 \mu^{n-2} \\
& + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{8n} t^4 \mu^{n-3} + \gamma \frac{3(\beta_4 + 3)}{2n} \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{8n} t^2 \mu^{n-2} \\
& + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{n} \mu^{n-1} + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4n} t^2 \mu^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{12} \frac{t^2}{n} \mu^{n-2}
\end{aligned}$$

$$+ \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{48} \frac{t^3}{n^{3/2}} \mu^{n-2} + \frac{\gamma}{4} \frac{\beta_4 + 3}{n} \mu^{n-1}.$$

После приведения «подобных» членов эту сумму можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^6 \mu^{n-4} + \frac{3\gamma}{4} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^4 \mu^{n-3} + \frac{27\gamma}{8} \frac{\beta_4 + 3}{n} t^2 \mu^{n-2} \\ & + \frac{15\gamma}{4} \frac{\beta_4 + 3}{n} \mu^{n-1} + \frac{\gamma}{12} \frac{\gamma_3^2}{n} t^2 \mu^{n-2} + \gamma \frac{3\alpha_3\beta_3}{4n} t^4 f^{n-3} + \frac{9\gamma}{4} \frac{\alpha_3\beta_3}{n} t^2 f^{n-2} \\ & + \frac{\gamma}{48} \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} \frac{t^3}{n^{3/2}} \mu^{n-2} + \frac{t^2}{n^2} g^n. \end{aligned} \quad (67)$$

Сумму оставшихся слагаемых из (66), деленную на t^4 , можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{i\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} f^{n-j-4} g^j - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} i \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t^3}{\sqrt{n}} f^{n-3} \\ & + \frac{n-1}{n} i \frac{9\alpha_3}{2} \frac{t}{\sqrt{n}} f^{n-2} - 3 \frac{n-1}{n} i \alpha_3 \frac{t}{\sqrt{n}} f^{n-2} \\ & - \frac{i\alpha_3}{2} \frac{t}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j + i\alpha_3 \frac{t}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j \\ & = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-4} f^{n-j-4} g^j + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{3\alpha_3}{2} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} f^{n-3} \\ & + \frac{n-1}{n} \frac{3\alpha_3}{2} \frac{it}{\sqrt{n}} f^{n-2} + \frac{\alpha_3}{2} \frac{it}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} f^{n-j-2} g^j \\ & = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^5}{n^{3/2}} (n-3) g^{n-4} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{3\alpha_3}{2} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} g^{n-3} \\ & + \frac{n-1}{n} \frac{3\alpha_3}{2} \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-2} + \frac{\alpha_3}{2} \frac{it}{n^{3/2}} (n-1) g^{n-2} \\ & + \gamma \frac{\alpha_3}{6} \frac{t^5}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-5} (f^{n-j-4} - g^{n-j-4}) g^j + \gamma \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t^3}{\sqrt{n}} (f^{n-3} - g^{n-3}) \\ & + \frac{3\alpha_3}{2} \frac{t}{\sqrt{n}} (f^{n-2} - g^{n-2}) + \frac{\alpha_3}{2} \frac{it}{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n-2} (f^{n-j-2} - g^{n-j-2}) g^j. \end{aligned}$$

Правую часть последнего равенства можно представить в виде суммы

$$\frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^5}{\sqrt{n}} g^{n-4} + \frac{3\alpha_3}{2} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} g^{n-3} + 2\alpha_3 \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-2} \quad (68)$$

и величины

$$\gamma \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} t^5 g^{n-4} + \frac{9\gamma}{2} \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} t^3 g^{n-3} + 2\gamma \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} t g^{n-2} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{72n} t^8 \mu^{n-5}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{288n^{3/2}} t^9 \mu^{n-5} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{4n} t^6 \mu^{n-4} + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{16n^{3/2}} t^7 \mu^{n-4} \\
& + \gamma \frac{\alpha_3^2}{4n} t^4 \mu^{n-3} + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{16n^{3/2}} t^5 \mu^{n-3} + \gamma \frac{\alpha_3^2}{24n} t^4 \mu^{n-3} \\
& + \gamma \frac{\alpha_3(\beta_4 + 3)}{96n^{3/2}} t^5 \mu^{n-3}.
\end{aligned} \tag{69}$$

Сумму (68) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^5}{\sqrt{n}} g^n + \frac{3\alpha_3}{2} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} g^n + 2\alpha_3 \frac{it}{\sqrt{n}} g^n - \frac{\alpha_3}{6} \frac{(it)^5}{\sqrt{n}} g^{n-4} (e^{-2t^2/n} - 1) \\
& - \frac{3\alpha_3}{2} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} g^{n-3} (e^{-3t^2/2n} - 1) - 2\alpha_3 \frac{it}{\sqrt{n}} g^{n-2} (e^{-t^2/n} - 1).
\end{aligned} \tag{70}$$

Сумму трех последних слагаемых можно записать в виде

$$\gamma \frac{\alpha_3}{3n^{3n^{3/2}}} t^7 g^{n-4} + \frac{9\gamma}{4} \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} t^5 g^{n-3} + 2\gamma \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} t^3 g^{n-2}. \tag{71}$$

Интегрируя суммы (67), (69) и (71), мы получим величину R , для которой

$$\begin{aligned}
|R| \leq & c_{1,n} \frac{\alpha_3^2}{n} + c_{2,n} \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n} + c_{3,n} \frac{beta_4 + 3}{n} + c_{4,n} \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} \\
& + c_{5,n} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}n^2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{1,n} &= \frac{B_{8,n-5}}{72} + \frac{B_{6,n-4}}{4} + \frac{7B_{4,n-3}}{24} + \frac{B_{2,n-1}}{12} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{105}{72} + \frac{15}{4} + \frac{7 \cdot 3}{24} + \frac{1}{12} \right) \approx 2.5, \\
c_{2,n} &= \frac{3B_{4,n-3}}{4} + \frac{9B_{2,n-1}}{4} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{3 \cdot 3}{4} + \frac{9}{4} \right) \approx 1.8, \\
c_{3,n} &= \frac{B_{6,n-4}}{24} + \frac{3B_{4,n-3}}{4} + \frac{27B_{2,n-2}}{8} + \frac{15B_{0,n-1}}{4} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{15}{24} + \frac{3 \cdot 3}{4} + \frac{27}{8} + \frac{15}{4} \right) \approx 4, \\
c_{4,n} &= \frac{B_{9,n-5}}{288} + \frac{B_{7,n-4}}{16} + \frac{7B_{5,n-3}}{96} + \frac{B_{3,n-2}}{48} \\
&\sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{384}{288} + \frac{48}{16} + \frac{7 \cdot 8}{96} + \frac{2}{48} \right) \approx 1.6, \\
c_{5,n} &= \frac{B_7}{3} \left(\frac{n}{n-4} \right)^4 + \frac{13B_5}{4} \left(\frac{n}{n-4} \right)^3 + \frac{13B_3}{2} \left(\frac{n}{n-3} \right)^2 + 2B_1 \left(\frac{n}{n-2} \right)^2 \\
&\sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{48}{3} + \frac{13 \cdot 8}{4} + \frac{13 \cdot 2}{2} + 2 \right) \approx 18.1.
\end{aligned} \tag{72}$$

Интегрируя сумму трех первых слагаемых в (70), мы получим сумму

$$\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_5(x)\varphi(x) + \frac{3\alpha_3}{2\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + \frac{2\alpha_3}{\sqrt{n}} H_1(x)\varphi(x)$$

и сумму экспоненциально быстро убывающих слагаемых, для которых справедливы оценки

$$\begin{aligned} |M_8| &\leq \frac{|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^5 e^{-t^2/2} dt, & |M_9| &\leq \frac{3|\alpha_3|}{2\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt, \\ |M_{10}| &\leq \frac{2|\alpha_3|}{\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (73)$$

Осталось лишь заметить, что

$$\begin{aligned} H_5(x) + 9H_3(x) + 12H_1(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x + 9(x^3 - 3x) + 12x \\ &= x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3 H_2(x). \end{aligned}$$

Дальнейшее очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2005, 446 с.
2. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М.: ИЛ, 1947, 143 с.
3. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей. М.: 1986, 327 с.
4. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009, 352 с.
5. Ширяев А. Н. Вероятность, т. 1, 2. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
6. Dobrić V., Ghosh B. K. Some analogs of the Berry–Esseen bound for first-order Chebyshev–Edgeworth expansions. — Statist. Decisions, 1996, v. 14, № 4, p. 383–404.
7. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
8. Shimizu R. On the remainder term for the central limit theorem. — Ann. Inst. Statist. Math., 1974, v. 26, p. 195–201.
9. Uspensky J. Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937, 411 p.
10. Сенатов В. В. О расширении класса распределений, многократные свертки которых допускают асимптотические разложения с явными оценками остаточных частей. — Теория вероятн. и ее примен., в печати.

Поступила в редакцию
18.IV.2013