Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Аркин, Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки одномерных диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 365–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:35:49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2014 г.

АРКИН В. И.*

ПОРОГОВЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ
ОДНОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

В работе изучаются условия, при которых решение задачи оптимальной остановки одномерного диффузионного процесса порождается пороговыми стратегиями. А именно, даются необходимые и достаточные условия, при которых оптимальным моментом остановки является первый момент превышения процессом некоторого уровня (порога), а также условия, при которых область продолжения имеет пороговую структуру.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, задача оптимальной остановки, область продолжения, пороговая стратегия.

1. Введение. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задан одномерный диффузионный процесс $X_t, t \geq 0$, со значениями в интервале $\mathcal{J} = (l, r) \subset \mathbf{R}^1$, где $-\infty \leq l < r \leq \infty$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

где $a: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{R}^1$ и $\sigma: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{R}_+^1$ — функции сноса и диффузии, которые будут предполагаться непрерывными, а W_t — винеровский процесс. Процесс X_t предполагается регулярным, т.е., стартуя из произвольной точки $x \in \mathcal{J}$, он достигает любой точки $y \in \mathcal{J}$ за конечное время с положительной вероятностью.

Регулярность процесса обеспечивается, например, когда его снос и диффузия удовлетворяют следующему условию локальной интегрируемости:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1 + |a(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty \quad \text{с некоторым } \varepsilon > 0,$$

для любых $x \in \mathcal{J}$ (см., например, [1]). В нашем случае это условие выполняется, если $\sigma(x) > 0$ на интервале $\mathcal{J}$.

Предполагается также, что граничные точки l, r значений процесса являются естественными. Это означает, что они не могут быть достигнуты из внутренней точки области значений процесса (подробнее см., например, [2, гл. 2]).

Рассмотрим следующую задачу оптимальной остановки для этого процесса:

$$\mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \rightarrow \sup_{\tau \in \mathfrak{M}}, \quad (2)$$

* Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия;
e-mail: arkin@cemi.rssi.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00784) и РГНФ (проект № 14-02-00036).

где $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{R}^1$ — функция платы, $\rho > 0$ — коэффициент дисконтирования, $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — индикаторная функция множества $\{\cdot\}$, $\mathbf{E}^x$ обозначает математическое ожидание для процесса X_t , начинающегося в точке $X_0 = x$, а супремум берется по классу $\mathfrak{M}$ марковских моментов τ (относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$). В данной статье мы не будем различать марковские моменты и моменты остановки (м.о.), хотя под м.о. часто понимаются марковские моменты, конечные с вероятностью 1. Иногда для краткости мы будем опускать индикаторную функцию в выражениях типа левой части формулы (2), полагая $g(X_\tau)e^{-\rho\tau} = 0$ на множестве $\{\tau = \infty\}$ (аналогично тому, как это делается, например, в [3]–[5]).

Функция платы $g(x)$ предполагается непрерывной, ограниченной снизу и положительной в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{J}$. Эти условия обеспечивают, в частности, что функция выигрыша в задаче (2), $U(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^x g(X_\tau)e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$, положительна для всех $x \in \mathcal{J}$.

Как следует из общей теории (см., например, [6, гл. 1]), при достаточно общих условиях оптимальным моментом остановки в задаче (2) будет момент первого выхода процесса X_t из области продолжения $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{J}: U(x) > g(x)\}$. Если $U(x) < \infty$ (для всех $x \in \mathcal{J}$)²⁾, а $g(x)$ непрерывна, то область $\mathcal{C}$ будет открытым множеством, и, следовательно, ее можно представить в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов. Поэтому задачу нахождения оптимального момента остановки в этом случае можно свести к нахождению оптимального момента первого выхода из интервалов (a, b) , $l \leq a < b \leq r$, содержащих начальную точку x процесса X_t . Необходимые условия оптимальности такого интервала были получены в [8].

Во многих задачах оптимальной стратегией будет остановка процесса X_t в тот момент, когда он достигнет некоторого уровня (порога) — такую стратегию мы будем называть пороговой. В этом случае задачу оптимальной остановки можно свести к гораздо более простой однопараметрической задаче нахождения оптимального порога. Оптимальные пороговые стратегии возникают, например, в финансовой математике [9], моделях инвестирования в условиях неопределенности (теория реальных опционов) [10]–[12] и т.д. Для задач оптимальной остановки в дискретном времени пороговые стратегии изучались в [13]. Конечно, существуют задачи оптимальной остановки, для которых оптимальная стратегия не является пороговой. Простой пример с процессом геометрического броуновского движения и неубывающей выпуклой функций платы приведен в [14] (см. также [4, раздел 6.4]).

Другим интересным вопросом, связанным с пороговыми стратегиями, является структура области продолжения. Вообще говоря, даже если пороговая стратегия является оптимальной, область продолжения $\mathcal{C}$ может не иметь пороговой структуры, т.е. не быть интервалом типа (l, p) ³⁾. Пороговая структура области продолжения, с одной стороны, дает простое правило остановки для процесса, исходящего из произвольного начального состояния, а с другой стороны, позволяет рассматривать задачу со свободной границей (один из основных инструментов для решения задач оптимальной остановки) в классе l -интервалов. Условия, при которых область продолжения имеет пороговую структуру, изучались в недавней работе [15]. В ней приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы область продолжения в задаче оптимальной остановки по классу пороговых моментов была l -интервалом. Там же приведены достаточные условия для того, чтобы область продолжения оставалась l -интервалом и в классе всех марковских моментов. В настоящей работе будет

²⁾ При этом $U(x)$ будет непрерывной функцией (см., например, [7]).

³⁾ Множества типа (l, p) , у которых левый конец совпадает с левой граничной точкой области значений процесса, мы в данной работе будем называть l -интервалами. Аналогично, множества типа (p, r) будем называть r -интервалами.

показано, что некоторые из предложенных в [15] достаточных условий на самом деле являются и необходимыми. Задача оптимальной остановки по классу пороговых стратегий рассматривалась в [16]. Обсуждение соответствующих результатов приводится ниже в п. 3. Другие достаточные условия для того, чтобы область продолжения была l -интервалом, предложены в [5].

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В п. 2 приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче остановки по классу пороговых моментов остановки. В п. 3 указаны необходимые и достаточные условия, при которых оптимальный момент остановки по классу всех марковских моментов, а также область продолжения будут иметь пороговую структуру. На эти условия можно смотреть как на решение «обратной» задачи оптимальной остановки, когда требуется выделить класс случайных процессов и функций платы, для которых решены задачи оптимальной остановки. Некоторые замечания по поводу условий доказанных теорем, а также о возможной модификации полученных результатов сформулированы в п. 4.

2. Пороговые моменты остановки. В [17] был изложен вариационный подход к решению задач оптимальной остановки для диффузионных процессов. В рамках этого подхода предлагается рассматривать класс марковских моментов, являющихся моментами первого выхода процесса из множества (являющегося элементом заданного семейства), и проводить оптимизацию по этому семейству множеств.

Будем далее обозначать $\tau_p = \inf\{t \geq 0: X_t \geq p\}$ — первый момент, когда процесс X_t покидает интервал (l, p) . Мы будем называть τ_p *пороговым моментом остановки* (первым моментом выхода на порог p). Рассмотрим задачу оптимальной остановки по классу *пороговых моментов остановки* $\mathfrak{M}_{th} = \{\tau_p, p \in \mathcal{J}\}$ ⁴⁾:

$$\mathbf{E}^x g(X_{\tau_p}) e^{-\rho \tau_p} \mathbf{1}_{\{\tau_p < \infty\}} \rightarrow \sup_{p \in \mathcal{J}}. \quad (3)$$

Пусть $V_p(x) = \mathbf{E}^x g(X_{\tau_p}) e^{-\rho \tau_p} \mathbf{1}_{\{\tau_p < \infty\}}$ и $V(x) = \sup_{p \in \mathcal{J}} V_p(x)$ есть оптимальный выигрыш в задаче (3) по пороговым моментам остановки.

Определим *область продолжения по классу* $\mathfrak{M}_{th}$ как $\mathcal{C}_{th} = \{x: V(x) > g(x)\}$, а *область остановки по классу* $\mathfrak{M}_{th}$ как $\mathcal{S}_{th} = \{x: V(x) = g(x)\}$. Такие определения аналогичны соответствующим определениям для классической задачи оптимальной остановки (по всем моментам остановки).

В общем случае, даже когда оптимальным моментом остановки в задаче (2) будет пороговый момент, область продолжения $\mathcal{C}$ может не иметь пороговой структуры, т.е. не быть l -интервалом (к этому мы вернемся позже в п. 3).

С процессом X_t связан инфинитезимальный оператор $\mathbb{L}f(x) = a(x)f'(x) + \sigma^2(x)f''(x)/2$, где функции $a(x)$, $\sigma(x)$ определены в (1). Поскольку функции $a(x)$ и $\sigma(x)$ непрерывны, то для дифференциального уравнения

$$\mathbb{L}u(x) = \rho u(x) \quad (4)$$

на интервале $\mathcal{J}$ существуют единственные (с точностью до положительного множителя) линейно независимые возрастающее и убывающее решения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно (см. [2, гл. 2]). Более того, при сделанных в п. 1 предположениях на границу интервала значений $\mathcal{J}$ справедливы следующие соотношения: $0 < \psi(x), \varphi(x) < \infty$ при $x \in \mathcal{J}$ и $\psi(l+0) = 0$.

Будем далее предполагать выполнение следующего условия на левой границе интервала $\mathcal{J}$:

$$\lim_{x \downarrow l} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0. \quad (5)$$

⁴⁾ Здесь и далее индекс «th» соответствует классу пороговых моментов остановки (threshold stopping times).

Определим функцию $h(p) = g(p)/\psi(p)$ для $l < p < r$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для оптимальности порогового момента останковки в задаче (3), а также для пороговой структуры области продолжения $\mathcal{C}_{\text{th}}$.

Теорема 1. i) Пороговый момент останковки τ_{p^*} является оптимальным в задаче (3) для всех $x \in \mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$h(p) \leq h(p^*) \quad \text{при } p < p^*; \quad (6)$$

$$h(p) \text{ не возрастает при } p > p^*. \quad (7)$$

ii) Область продолжения $\mathcal{C}_{\text{th}}$ в задаче (3) является l -интервалом (l, p^*) , где $p^* \in \mathcal{I}$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (7) и справедливо неравенство

$$h(p) < h(p^*) \quad \text{при } p < p^*. \quad (8)$$

Доказательство. Определим $\tau_{a,p} = \inf\{t \geq 0: X_t \notin (a, p)\}$, где $l < a < p$. Известные формулы, описывающие решение $V_{a,p}(x)$ задачи Дирихле для уравнения (4) на интервале (a, p) с граничными условиями $V_{a,p}(a) = g(a)$, $V_{a,p}(p) = g(p)$ (см., например, [4, лемма 4.3] или [8, раздел 3]), дают следующее представление:

$$V_{a,p}(x) := \mathbf{E}^x g(X_{\tau_{a,p}}) e^{-\rho \tau_{a,p}} = g(a)u_1(x, a, p) + g(p)u_2(x, a, p),$$

где

$$u_1(x, a, p) = \frac{\psi(x)\varphi(p) - \psi(p)\varphi(x)}{\psi(a)\varphi(p) - \psi(p)\varphi(a)}, \quad u_2(x, a, p) = \frac{\psi(a)\varphi(x) - \psi(x)\varphi(a)}{\psi(a)\varphi(p) - \psi(p)\varphi(a)}.$$

Переход к пределу $a \downarrow l$ и условие (5) на левой границе влекут следующую формулу:

$$\lim_{a \downarrow l} V_{a,p}(x) = V_p(x) = \begin{cases} h(p)\psi(x) & \text{при } x < p, \\ g(x) & \text{при } x \geq p. \end{cases} \quad (9)$$

i) Пусть выполнены условия (6), (7). Возьмем произвольные $x, p \in \mathcal{I}$.

Если $x < \min(p, p^*)$, то $V_p(x) = h(p)\psi(x) \leq h(p^*)\psi(x) = V_{p^*}(x)$. Если $x \geq \max(p, p^*)$, то $V_p(x) = g(x) = V_{p^*}(x)$. Если $p \leq x < p^*$, то $V_p(x) = g(x) = h(x)\psi(x) \leq h(p^*)\psi(x) = V_{p^*}(x)$. Если $p^* \leq x < p$, то $V_p(x) = h(p)\psi(x) \leq h(x)\psi(x) = g(x) = V_{p^*}(x)$. Таким образом, $V_p(x) \leq V_{p^*}(x)$ для любых $x, p \in \mathcal{I}$.

Пусть теперь $V_p(x) \leq V_{p^*}(x)$ для всех x и p из $\mathcal{I}$. Тогда для $p < p^*$ и $x < p$ имеем: $V_p(x) = h(p)\psi(x) \leq V_{p^*}(x) = h(p^*)\psi(x)$, т.е. $h(p) \leq h(p^*)$. Если $p^* < p_1 < p_2$, то $V_{p_2}(p_1) = h(p_2)\psi(p_1) \leq V_{p^*}(p_1) = g(p_1) = h(p_1)\psi(p_1)$, следовательно, $h(p_2) \leq h(p_1)$.

ii) Из представления (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} V(x) &= \sup_p V_p(x) = \max \left\{ \sup_{p \leq x} V_p(x), \sup_{p > x} V_p(x) \right\} \\ &= \max \left\{ g(x), \psi(x) \sup_{p > x} h(p) \right\} = \psi(x) \max \left\{ h(x), \sup_{p > x} h(p) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, области продолжения $\mathcal{C}_{\text{th}}$ и останковки $\mathcal{S}_{\text{th}}$ в задаче (3) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{th}} &= \{x: V(x) = g(x)\} = \left\{ x: \sup_{p > x} h(p) = h(x) \right\}, \\ \mathcal{C}_{\text{th}} &= \{x: V(x) > g(x)\} = \left\{ x: \sup_{p > x} h(p) > h(x) \right\}. \end{aligned}$$

Из (7) следует, что $h(p^*) \geq h(p)$ для $p > p^*$. Поэтому для $x < p^*$ имеем $\sup_{p > x} h(p) \geq h(p^*) > h(x)$, тем самым, $x \in \mathcal{C}_{\text{th}}$. Если $x \geq p^*$, то $\sup_{p > x} h(p) = h(x)$ и, следовательно, $x \in \mathcal{S}_{\text{th}}$. Это означает, что $\mathcal{C}_{\text{th}} = (l, p^*)$.

В другую сторону, пусть $\mathcal{C}_{th} = (l, p^*)$ и, значит, $\mathcal{S}_{th} = [p^*, r)$.

Предположим, что $h(x_1) < h(x_2)$ для некоторых $p^* < x_1 < x_2$. Тогда $\sup_{p > x_1} h(p) \geq h(x_2) > h(x_1)$, что противоречит тому, что $x_1 \in \mathcal{S}_{th}$. Следовательно, $h(p)$ не возрастает для $p > p^*$.

Предположим теперь, что $h(x) \geq h(p^*)$ для некоторого $x < p^*$. Обозначим $\bar{x} = \min\{y \in [x, p^*]: h(y) = \max_{x \leq p \leq p^*} h(p)\}$. Если $\bar{x} < p^*$, то $\sup_{p > \bar{x}} h(p) = \sup_{[\bar{x}, p^*]} h(p) = h(\bar{x})$, что противоречит включению $\bar{x} \in \mathcal{C}_{th}$. Если $\bar{x} = p^*$, то $h(x) < h(p^*)$, но это противоречит предположению $h(x) \geq h(p^*)$. Следовательно, $h(x) < h(p^*)$ для всех $x < p^*$.

Теорема доказана.

Таким образом, оптимальный порог p^* является точкой максимума функции $h(p)$. Отсюда сразу следует необходимость различных вариантов известного принципа гладкого склеивания.

Следствие 1. Пусть τ_{p^*} , где $p^* \in \mathcal{I}$, есть оптимальный момент остановки в задаче (3), а функция $g(x)$ дифференцируема в точке p^* . Тогда функция $V(x)$ также дифференцируема в точке p^* и $V'(p^*) = g'(p^*)$.

Доказательство. Из представления (9) следует, что

$$V(x) = V_{p^*}(x) = \begin{cases} h(p^*)\psi(x) & \text{при } x < p^*, \\ g(x) & \text{при } x \geq p^*, \end{cases} \quad (10)$$

и, значит, $V'(p^*-0) = h(p^*)\psi'(p^*)$, $V'(p^*+0) = g'(p^*)$. С другой стороны, в точке p^* имеем $h'(p^*) = 0$, поэтому $g'(p^*)\psi(p^*) = g(p^*)\psi'(p^*)$, или $g'(p^*) = h(p^*)\psi'(p^*)$. Следовательно, $V(x)$ дифференцируема в точке p^* и $V'(p^*) = g'(p^*)$. Следствие доказано.

Необходимость условия гладкого склеивания при некоторых дополнительных условиях на процесс была показана в [6]. Близкий к нашему результат приведен в [5].

Следующий результат можно рассматривать как распространение принципа гладкого склеивания на «негладкий» случай.

Следствие 2. Пусть τ_{p^*} , где $p^* \in \mathcal{I}$, есть оптимальный момент остановки в задаче (3), а функция $g(x)$ имеет односторонние производные $g'(p^*-0)$ и $g'(p^*+0)$ в точке p^* . Тогда функция $V(x)$ также имеет односторонние производные в точке p^* и справедливы следующие неравенства:

$$g'(p^*+0) = V'(p^*+0) \leq V'(p^*-0) \leq g'(p^*-0).$$

Доказательство. В самом деле, поскольку p^* есть точка максимума функции $h(p)$, то

$$h'(p^*-0) \geq 0 \geq h'(p^*+0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V'(p^*-0) &= h(p^*)\psi'(p^*) = g'(p^*-0) - h'(p^*-0)\psi(p^*) \leq g'(p^*-0), \\ V'(p^*+0) &= g'(p^*+0) = h'(p^*+0)\psi(p^*) + h(p^*)\psi'(p^*) \\ &\leq h(p^*)\psi'(p^*) = V'(p^*-0). \end{aligned}$$

3. Пороговая структура оптимального момента остановки и множества продолжения. В этом пункте мы покажем, что если условия теоремы 1 дополнить еще одним, то они станут необходимыми и достаточными для того, чтобы оптимальный момент остановки и область продолжения имели пороговую структуру не только в задаче (3) по пороговым моментам остановки, но и в задаче (2) по всем моментам остановки $\mathcal{M}$. Напомним, что область продолжения в задаче (2) — это множество $\mathcal{C} = \{x: U(x) > g(x)\}$, где $U(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$, а $\mathcal{S} = \{x: U(x) = g(x)\}$ есть, соответственно, область остановки.

Теорема 1. i) Пусть для некоторого $p^* \in \mathcal{J}$ функция платы $g(p)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (p^*, r) и существует $g'(p^*+0)$. Тогда, если выполнены следующие условия:

$$h(p) \leq h(p^*) \quad \text{при } p < p^*; \quad (11)$$

$$\psi'(p^*)g(p^*) \geq \psi(p^*)g'(p^*+0); \quad (12)$$

$$\mathbb{L}g(p) \leq \rho g(p) \quad \text{при } p > p^*, \quad (13)$$

то τ_{p^*} является оптимальным моментом остановки в задаче (2) для всех $x \in \mathcal{J}$, при этом

$$U(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} = \begin{cases} h(p^*)\psi(x) & \text{при } x < p^*, \\ g(x) & \text{при } x \geq p^*. \end{cases}$$

ii) Если τ_{p^*} есть оптимальный момент остановки в задаче (2) для всех $x \in \mathcal{J}$, функция $g(p)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (p^*, r) и существует $g'(p^*+0)$, то выполнены условия (11)–(13).

Любопытно сравнить этот результат с необходимыми и достаточными условиями оптимальности пороговых моментов остановки из недавней работы [16] (см. теорему 3.1). Условия (11) и (13) совпадают с соответствующими условиями (17) и (18) из [16], а условие (12) носит (в отличие от интегрального условия (16) в [16]) локальный характер, т.е. описывает поведение функции (и ее производной) только в одной точке.

З а м е ч а н и е 1. Если в теореме 2 дополнительно предположить, что функция $g(p)$ дифференцируема в точке p^* , то неравенство (12) переходит в равенство, которое эквивалентно условию «гладкого склеивания» (см. доказательство следствия 1).

Если в соотношении (11) имеет место строгое неравенство, то аналогичные результаты оказываются справедливыми и для области продолжения $\mathcal{C}$.

Теорема 2. i) Пусть для некоторого $p^* \in \mathcal{J}$ функция платы $g(p)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (p^*, r) и существует $g'(p^*+0)$. Если выполнены неравенство

$$h(p) < h(p^*) \quad \text{при } p < p^*; \quad (14)$$

и условия (12), (13), то $\mathcal{C} = (l, p^*)$.

ii) Пусть $\limsup_{x \uparrow p^*} h^+(x) = 0^{(5)}$. Тогда, если $\mathcal{C} = (l, p^*)$, а $g(p)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (p^*, r) и существует $g'(p^*+0)$, то выполнены условия (14) и (12), (13).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. i) Пусть выполнены условия (11)–(13). Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = V_{p^*}(x) = \begin{cases} h(p^*)\psi(x) & \text{при } x < p^*, \\ g(x) & \text{при } x \geq p^*. \end{cases}$$

Очевидно, что $U(x) \geq \Phi(x)$.

С другой стороны, из (11) следует $h(p^*)\psi(x) \geq h(x)\psi(x) = g(x)$ при $x < p^*$, тем самым, $\Phi(x) \geq g(x)$ для всех x . Из этого неравенства и формулы Ито–Танака (см., например, [1]) вытекает, что для любого момента остановки $\tau \in \mathfrak{M}$ и $N > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x g(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} &\leq \mathbf{E}^x \Phi(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} \\ &= \Phi(x) + \mathbf{E}^x \int_0^{\tau \wedge N} (\mathbb{L}\Phi - \rho\Phi)(X_t) e^{-\rho t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(p^*) [\Phi'(p^*+0) - \Phi'(p^*-0)] \mathbf{E}^x \int_0^{\tau \wedge N} e^{-\rho t} dL_t(p^*), \end{aligned} \quad (15)$$

⁵⁾ $h^+(x) = \max\{0, h(x)\}$.

где $L_t(p^*)$ есть локальное время процесса в точке p^* .

Обозначим $T_1 = \{0 \leq t \leq \tau \wedge N: X_t < p^*\}$, $T_2 = \{0 \leq t \leq \tau \wedge N: X_t > p^*\}$. Имеем: $\mathbb{L}\Phi(X_t) - \rho\Phi(X_t) = h(p^*)[\mathbb{L}\psi(X_t) - \rho\psi(X_t)] = 0$ для $t \in T_1$ и $\mathbb{L}\Phi(X_t) - \rho\Phi(X_t) = \mathbb{L}g(X_t) - \rho g(X_t) \leq 0$ для $t \in T_2$ (см. условие (13)). Далее,

$$\begin{aligned}\Phi'(p^*+0) &= g'(p^*+0), \quad \Phi'(p^*-0) = h(p^*)\psi'(p^*), \\ \Phi'(p^*+0) - \Phi'(p^*-0) &= \frac{\psi(p^*)g'(p^*+0) - g(p^*)\psi'(p^*)}{\psi(p^*)} \leq 0\end{aligned}$$

в силу условия (12).

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^x g(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} &\leq \Phi(x) + \mathbf{E}^x \left(\int_{T_1} (\mathbb{L}\Phi - \rho\Phi)(X_t) e^{-\rho t} dt + \int_{T_2} (\mathbb{L}\Phi - \rho\Phi)(X_t) e^{-\rho t} dt \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(p^*) [\Phi'(p^*+0) - \Phi'(p^*-0)] \mathbf{E}^x \int_0^{\tau \wedge N} e^{-\rho t} dL_t(p^*) \leq \Phi(x).\end{aligned}$$

Поскольку $g(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} \xrightarrow{p.p.} g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$ при $N \rightarrow \infty$ и $g(x)$ ограничена снизу, то по лемме Фату получим: $\mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \leq \Phi(x)$ для всех $\tau \in \mathfrak{M}$ и $x \in \mathcal{S}$. Из этого неравенства следует, что $U(x) \leq \Phi(x)$.

Следовательно, $U(x) = \Phi(x) = V_{p^*}(x)$, т.е. τ_{p^*} является оптимальным моментом остановки в задаче (2) для всех x .

ii) Заметим, прежде всего, что τ_{p^*} будет также оптимальным моментом остановки и в задаче (3). Поэтому из условия (7) следует оценка $h'(p^*+0) \leq 0$, т.е. (12), а условия (6) и (11) совпадают.

Предположим, что неравенство (13) нарушается в некоторой точке $x_0 > p^*$ и, тем самым (в силу непрерывности), $\mathbb{L}g(x) > \rho g(x)$ на некотором интервале $J \subset (p^*, r)$, содержащем x_0 . Для $\tilde{x} \in J$ и определим $\tau = \inf\{t \geq 0: X_t \notin J, X_0 = \tilde{x}\}$. Тогда для любого $N > 0$

$$\mathbf{E}^{\tilde{x}} g(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} = g(\tilde{x}) + \mathbf{E}^{\tilde{x}} \int_0^{\tau \wedge N} (\mathbb{L}g - \rho g)(X_t) e^{-\rho t} dt > g(\tilde{x}).$$

Следовательно, $U(\tilde{x}) > g(\tilde{x})$ — противоречие с тем, что $\tilde{x} > p^*$, т.е. $\tilde{x}$ принадлежит области остановки.

Теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. i) Как и при доказательстве теоремы 2, показывается, что $U(x) = \Phi(x) = V_{p^*}(x)$. Тем самым, в силу (14)

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{x: U(x) > g(x)\} = \{x: x < p^*, h(p^*)\psi(x) > g(x)\} \\ &= \{x: x < p^*, h(p^*) > h(x)\} = \{x: x < p^*\}.\end{aligned}$$

ii) Из [4, предложение 5.7] вытекает, что τ_{p^*} является оптимальным моментом остановки в задаче (2) и, следовательно, в задаче (3). Таким образом, функции выигрыша $U(x)$ и $V(x)$ в этих задачах совпадают и, значит, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{th}}$. Теперь условия (14) и (12) сразу вытекают из теоремы 1 (аналогично проделанному выше при доказательстве теоремы 2, п. ii)).

Если (13) не выполняется в какой-либо точке $x_0 > p^*$, то, повторяя выкладки, приведенные выше при доказательстве теоремы 2, можно получить, что $U(\tilde{x}) > g(\tilde{x})$ для некоторого $\tilde{x} > p^*$. А это противоречит тому, что $\tilde{x} \in \mathcal{S}$.

Доказательство закончено.

Из теорем 2 и 3 следует, что если функция $h(p)$ имеет строгий максимум в точке p^* и выполняется условие (13), то пороговую структуру будут иметь и оптимальный момент остановки, и область продолжения. Если же функция $h(p)$ имеет, например, два максимума в точках p_1^* и p_2^* (где для определенности $p_1^* < p_2^*$) и $\mathbb{L}g(x) \leq \rho g(x)$ при $x > p_2^*$, то момент остановки $\tau_{p_2^*}$ будет оптимальным, но интервал (l, p_2^*) не будет областью продолжения (в область остановки будет входить точка $p_1^* \notin [p_2^*, r)$).

Следствие 1. i) Для «опционной» функции платы $g(x) = (x - c)^+$, где $c < r$, пороговый момент остановки τ_{p^*} ($p^* \in \mathcal{J}$) будет оптимальным для задачи (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\frac{p - c}{\psi(p)} \leq \frac{p^* - c}{\psi(p^*)} \quad \text{при } p < p^*; \quad (16)$$

$$\psi'(p^*)(p^* - c) = \psi(p^*); \quad (17)$$

$$a(p) \leq \rho(p - c) \quad \text{при } p > p^*, \quad (18)$$

где $a(p)$ есть функция сноса процесса X_t .

ii) Условие

$$\frac{p - c}{\psi(p)} < \frac{p^* - c}{\psi(p^*)} \quad \text{при } p < p^* \quad (19)$$

вместе с (17), (18) будут необходимыми и достаточными для того, чтобы область продолжения в задаче оптимальной остановки (2) с функцией платы $g(x) = (x - c)^+$, где $c < r$, имела пороговый вид $\mathcal{C} = (l, p^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Для применимости теоремы 2 к функции $g(x) = (x - c)^+$ необходимо проверить выполнение соответствующих условий гладкости. Заметим, что из условия (17) вытекает, что $p^* > c$, так как $\psi(p^*) > 0$, $\psi'(p^*) > 0$. С другой стороны, из оптимальности момента τ_{p^*} , формулы (10) и положительности функции выигрыша $U(x)$ следует, что при $x < p^*$

$$0 < U(x) = \mathbf{E}^x g(X_{\tau_{p^*}}) e^{-\rho \tau_{p^*}} \mathbf{1}_{\{\tau_{p^*} < \infty\}} = (p^* - c)^+ \frac{\psi(x)}{\psi(p^*)},$$

т.е. $p^* > c$. Тем самым, функция $g(x) = (x - c)^+$ дифференцируема в точке p^* и дважды дифференцируема при $x > p^*$. Теперь следствие сразу вытекает из замечания 1 к теореме 2.

Утверждение ii) доказывается аналогично, но с использованием теоремы 3 вместо теоремы 2.

Следствие 2. i) Для линейной функции платы $g(x) = x - c$, где $c < r$, пороговый момент остановки τ_{p^*} ($p^* \in \mathcal{J}$) будет оптимальным в задаче (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия (16)–(18).

ii) Условия (17), (18) и (19) будут необходимыми и достаточными для того, чтобы область продолжения в задаче оптимальной остановки (2) с линейной функцией платы $g(x) = x - c$, где $c < r$, имела пороговый вид $\mathcal{C} = (l, p^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку линейная функция платы не ограничена снизу на интервале $(-\infty, r)$, теорема 2 формально не применима. Поэтому наряду с функцией $g(x) = x - c$ рассмотрим функцию $g^+(x) = (x - c)^+$ и обозначим $\hat{U}(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^x g^+(X_\tau) e^{-\rho \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$.

Отметим, прежде всего, что $\hat{U}(x) = U(x)$ для всех $x \in \mathcal{J}$, где $U(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$. В самом деле, неравенство $\hat{U}(x) \geq U(x)$ следует из того, что $g^+(x) \geq g(x)$. Далее, поскольку $U(x) \geq g(x)$ и $U(x) > 0$ (в силу того, что $g(x_0) > 0$ для некоторого $x_0 \in \mathcal{J}$, и регулярности процесса X_t), то $U(x) \geq g^+(x)$. Тем самым, $U(x)$ есть неотрицательная эксцессивная функция (поскольку она есть функция выигрыша), которая является мажорантой функции $g^+(x)$. С другой стороны, $\hat{U}(x)$ есть наименьшая эксцессивная мажоранта $g^+(x)$, поэтому $\hat{U}(x) \leq U(x)$.⁶⁾

Таким образом, задача оптимальной остановки с линейной функцией платы $g(x) = x - c$ эквивалентна задаче с неотрицательной функцией платы $g^+(x) = (x - c)^+$, и для нее можно применить предыдущее следствие.

⁶⁾ Приведенная схема доказательства взята из [8, лемма 1]. Используемые утверждения насчет эксцессивных функций можно найти, например, в [4, раздел 5.2].

Отметим еще, что для классических случаев реальных опционов или американского опциона (покупки), когда процесс X_t является арифметическим или геометрическим броуновским движением, условия (16)–(18) позволяют выписать оптимальный момент остановки в явном виде.

4. Некоторые замечания. 1) Сравнивая приведенные выше теоремы, можно заметить, что в условиях (11) и (14) теорем 2 и 3 отсутствует в явном виде требование невозрастания функции $h(p)$ после точки максимума p^* , которое есть в теореме 1. Однако на самом деле нетрудно показать, что это требование вытекает из условия (13) и того, что $h(p)$ достигает максимума в точке p^* .

Для доказательства возьмем произвольные $x, y \in \mathcal{J}$ такие, что $p^* < x < y$, и процесс X_t , начинающийся в точке x . Определим $\tau = \inf\{t \geq 0: X_t \notin (p^*, y)\}$ и функцию $f(z) = g(z) - h(y)\psi(z)$ для $z \in \mathcal{J}$. Очевидно, что $\mathbb{L}f(z) - \rho f(z) = \mathbb{L}g(z) - \rho g(z)$. Из формулы Дынкина и условия (13) имеем для любого $N > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x f(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} &= f(x) + \mathbf{E}^x \int_0^{\tau \wedge N} (\mathbb{L}f - \rho f)(X_t) e^{-\rho t} dt \\ &= f(x) + \mathbf{E}^x \int_0^{\tau \wedge N} (\mathbb{L}g - \rho g)(X_t) e^{-\rho t} dt \\ &\leq f(x) = \psi(x)[h(x) - h(y)]. \end{aligned} \quad (20)$$

С другой стороны, если $\theta_1 = \inf\{t \geq 0: X_t = p^*\}$ и $\theta_2 = \inf\{t \geq 0: X_t = y\}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x f(X_{\tau \wedge N}) e^{-\rho(\tau \wedge N)} &= \mathbf{E}^x f(X_N) e^{-\rho N} \mathbf{1}_{\{\theta_1, \theta_2 > N\}} + \mathbf{E}^x f(p^*) e^{-\rho \tau_1} \mathbf{1}_{\{\theta_1 < N, \theta_2 > \theta_1\}} \\ &\quad + \mathbf{E}^x f(y) e^{-\rho \tau_2} \mathbf{1}_{\{\theta_2 < N, \theta_1 > \theta_2\}} = E_1 + E_2 + E_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ обозначает индикатор множества $\{\cdot\}$. Далее,

$$\begin{aligned} E_1 &= e^{-\rho N} \mathbf{E}^x f(X_N) \mathbf{1}_{\{\theta_1, \theta_2 > N\}} \geq -e^{-\rho N} \max_{p^* \leq z \leq y} f(z), \\ E_2 &= f(p^*) \mathbf{E}^x e^{-\rho \tau_1} \mathbf{1}_{\{\theta_1 < N, \theta_2 > \tau_1\}} \geq 0 \quad (\text{поскольку } f(p^*) = \psi(p^*)[h(p^*) - h(y)] \geq 0), \\ E_3 &= f(y) \mathbf{E}^x e^{-\rho \theta_2} \mathbf{1}_{\{\theta_2 < N, \theta_1 > \theta_2\}} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из (20) вытекает неравенство

$$\psi(x)[h(x) - h(y)] \geq -e^{-\rho N} \max_{p^* \leq z \leq y} f(z),$$

и, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем $h(x) \geq h(y)$, т.е. функция $h(p)$ не возрастает при $p > p^*$.

Тем самым, невозрастание функции $h(p)$ после достижения точки максимума можно рассматривать как необходимое условие пороговой структуры оптимального момента остановки и множества продолжения.

2) Совершенно аналогично изучается другой класс пороговых моментов остановки вида $\tilde{\tau}_p = \inf\{t \geq 0: X_t \leq p\}$ (момент первого попадания процесса X_t ниже порога p), $p \in \mathcal{J}$, и соответствующая задача оптимальной остановки

$$\mathbf{E}^x g(X_{\tilde{\tau}_p}) e^{-\rho \tilde{\tau}_p} \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_p < \infty\}} \rightarrow \sup_{p \in \mathcal{J}}. \quad (21)$$

В этом случае вместо возрастающей функции $\psi(x)$ необходимо рассматривать убывающую функцию $\varphi(x)$, а вместо функции $h(p)$, определенной в п. 2, функцию $f(p) = g(p)/\varphi(p)$. При этом условие (5) на левой границе значений процесса заменяется на соответствующее условие на правой границе:

$$\lim_{x \uparrow r} \frac{g(x)}{\psi(x)} = 0. \quad (22)$$

В частности, аналогом теоремы 1 будет следующий результат.

Теорема 1'. i) Пороговый момент остановки $\tilde{\tau}_p^*$ является оптимальным в задаче (21) для всех $x \in \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$f(p) \leq f(p^*) \quad \text{при } p > p^*; \quad (23)$$

$$f(p) \quad \text{не убывает при } p < p^*. \quad (24)$$

ii) Область продолжения $\mathcal{C}_{th}$ в задаче (21) является r -интервалом (p^*, r) , где $p^* \in \mathcal{J}$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (24) и справедливо неравенство

$$f(p) < f(p^*) \quad \text{при } p > p^*. \quad (25)$$

Автор признателен Э. Л. Пресману и А. Д. Сластникову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer-Verlag, 1991, 470 p.
2. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000, 639 с.
3. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003, 406 с.
4. Dayanik S., Karatzas I. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions. — Stochastic Process. Appl., 2003, v. 107, № 2, p. 173–212.
5. Villeneuve S. On threshold strategies and smooth-fit principle for optimal stopping problems. — J. Appl. Probab., 2007, v. 44, № 1, p. 181–198.
6. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
7. Lamberton D., Zervos M. On the optimal stopping of a one-dimensional diffusion. — Electron. J. Probab., 2013, v. 18, paper № 34, p. 1–49.
8. Alvarez L. H. R. Reward functionals, salvage values, and optimal stopping. — Math. Methods Oper. Res., 2001, v. 54, № 2, p. 315–337.
9. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики, т. 1, 2. М.: Фазис, 1998, 1017 с.
10. Dixit A. K., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994, 476 p.
11. Arkin V., Slastnikov A., Shevtsova E. Tax incentives for investment projects in the Russian economy. EERC Working paper 99/03, 1999.
12. Arkin V., Slastnikov A. The effect of depreciation allowances on the timing of investment and government tax revenue. — Ann. Oper. Res., 2007, v. 151, № 1, p. 307–323.
13. Jonsson H., Kukush A., Silvestrov D. Threshold structure for optimal stopping strategy for American type options. I. — Theory Probab. Math. Statist., 2005, v. 71, p. 93–103.
14. Guo X., Shepp L. A. Some optimal stopping problems with nontrivial boundaries for pricing exotic options. — J. Appl. Probab., 2001, v. 38, № 3, p. 647–658.
15. Аркин В. И., Сластников А. Д. Пороговые правила остановки диффузионных процессов и задача Стефана. — Докл. РАН, 2012, т. 446, № 3, с. 247–250.
16. Croce F., Mordecki E. Explicit solutions in one-sided optimal stopping problems for one-dimensional diffusions. arXiv:1302.0712v2.
17. Аркин В. И., Сластников А. Д. Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, № 3, с. 516–533.

Поступила в редакцию
16.X.2013

Исправленный вариант
27.III.2014