Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Радченко, Эволюционные уравнения с общими стохастическими мерами в гильбертовом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 375–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:41:06

© 2014 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБЩИМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ МЕРАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

Рассматриваются стохастические эволюционные уравнения в гильбертовом пространстве. На стохастические меры, являющиеся интеграторами в уравнениях, накладывается только условие σ -аддитивности по вероятности. Определены интегралы от неслучайных функций по стохастическим мерам в гильбертовом пространстве. Доказаны существование и непрерывность мягких решений указанных уравнений.

Ключевые слова и фразы: стохастическая мера, стохастическое интегрирование в гильбертовом пространстве, стохастическое эволюционное уравнение, мягкое решение.

1. Введение. В данной работе рассматриваются уравнения

$$dX(t) = AX(t) + \sigma(t) d\mu(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

$$dY(t) = AY(t) + B d\mu_U(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad (2)$$

где A — генератор аналитической C_0 -полугруппы $S(t): \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{U}$ — действительные сепарабельные гильбертовы пространства, $X(t)$ и $Y(t)$ — искомые $\mathbf{H}$ -значные случайные процессы, $0 \leq t \leq T$. На стохастические меры μ (действительнозначную) и μ_U ($\mathbf{U}$ -значную) мы накладываем только условия σ -аддитивности по вероятности. Для этих уравнений мы рассматриваем решения в мягком смысле (см. точные формулировки ниже в (12) и (20)). Исследование мягких решений требует определения $\mathbf{H}$ -значных стохастических интегралов по μ и μ_U , что также сделано в работе. При некоторых условиях мы докажем существование и непрерывность этих решений.

Стохастические эволюционные уравнения в гильбертовом пространстве, ведомые действительнозначным винеровским процессом, были рассмотрены в [1]. Уравнение (2), ведомое цилиндрическим процессом Винера W , было изучено в [2, гл. 4, 5], ведомое процессом Леви — в [3, гл. 8, 11, 12]. В [4] ведущим процессом в уравнении был цилиндрический дробный винеровский процесс. Случай $\mathbf{H}$ -значного W и банаховозначного Y был рассмотрен в [5], [6], [7]. Аналогичные уравнения, ведомые банаховозначным броуновским движением, изучены в [8]. Во всех этих случаях, при некоторых предположениях, Y имеет непрерывную модификацию.

В данной работе мы установим существование и непрерывность мягкого решения при более ограничительных условиях, чем в упомянутых работах, однако мы рассматриваем и более широкий класс интеграторов в уравнениях.

В большинстве работ стохастический интеграл определяется с помощью приближения ступенчатыми функциями и некоторых изометрических равенств. Такой подход сложно применить в нашем случае, поскольку значения μ и μ_U не имеют моментов и это не позволяет найти подходящие нормы для таких равенств. Мы определяем интеграл с помощью некоторых случайных рядов в гильбертовом пространстве.

В п. 2 приводятся основные определения и некоторые предварительные сведения. В п. 3 определяется интеграл от $\mathbf{H}$ -значной функции по действительнозначной

* Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, Киев, Украина; e-mail: vradchenko@univ.kiev.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта (грант № 1074615).

стохастической мере μ и исследуется уравнение (1). В п. 4 определяется интеграл от операторнозначной функции по U -значной стохастической мере μ_U и рассматривается уравнение (2).

2. Предварительные сведения. Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств X , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ обозначим множество всех случайных величин (точнее говоря, их классов $\mathbf{P}$ -эквивалентности). Сходимость в L_0 означает сходимость по вероятности.

О п р е д е л е н и е 1. *Стохастической мерой* (СМ) называется σ -аддитивное отображение $\mu: \mathcal{B} \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Другими словами, μ — это векторнозначная мера со значениями в L_0 . Отметим, что мы не накладываем на μ никаких условий мартингалности или существования моментов. При необходимости отличать данную СМ от случая гильбертовозначных случайных функций множеств, мы можем говорить, что μ — действительнозначная СМ.

Приведем некоторые примеры. Если $N(t)$, $0 \leq t \leq T$, является квадратично интегрируемым мартингалом, то $\mu(A) := \int_{[0,T]} \mathbf{1}_A(t) dN(t)$ будет СМ на борелевских подмножествах $\mathcal{B}([0, T])$. Аналогичным образом определяет СМ дробное броуновское движение $B^H(t)$ при значении параметра Харста $H > 1/2$ (это следует из [9, неравенство (1.5)]). Частным случаем СМ будут определенные на σ -алгебре α -устойчивые меры с независимыми значениями, подробно рассмотренные в [10, гл. 3]. Другие примеры, а также условия того, что приращения случайного процесса с независимыми приращениями порождают случайную меру, можно найти в [11, гл. 7, 8].

В [12] построен и изучен интеграл вида $\int_A f d\mu$, где $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ — измеримая неслучайная функция, $A \in \mathcal{B}$. Его конструкция проводится стандартно с использованием приближения простыми функциями. (Аналогичное построение проведено в [11, гл. 7], см. также [13].) В частности, любая ограниченная измеримая функция f будет интегрируемой по любой μ . Для этого интеграла имеет место аналог теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [12, следствие 1.2] или [11, предложение 7.1.1]).

В дальнейшем мы предполагаем, что СМ μ удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е 1. Существует действительнозначная конечная мера m на $(X, \mathbf{R})$ со следующим свойством: если для измеримой функции $g: X \rightarrow \mathbf{R}$ выполняется $\int_X g^2 dm < +\infty$, то g интегрируема по μ на X .

Данному условию удовлетворяют, например, СМ, порожденные $B^H(t)$ при $H > 3/4$, α -устойчивые меры с независимыми значениями на $\mathcal{B}$ при всех $\alpha \in (0, 2]$ и СМ с ортогональными значениями.

Определение стохастического интеграла в гильбертовом пространстве будет основано на следующем утверждении.

Лемма 1 (см. [14, лемма 3.3]). *Пусть выполнено условие 1 и измеримые функции $f_k: X \rightarrow \mathbf{R}$, $k \geq 1$, таковы, что*

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right) dm < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right)^2 < +\infty \quad \text{п.н.}$$

Пусть U — действительное сепарабельное гильбертово пространство, через $\|\cdot\|_U$ мы обозначим норму в U , $(\cdot, \cdot)_U$ обозначает скалярное произведение в U , $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; U)$ — это пространство всех U -значных случайных элементов (классов $\mathbf{P}$ -эквивалентности), сходимость которых понимается по вероятности.

О п р е д е л е н и е 2. *U-значной стохастической мерой* называется σ -аддитивное отображение $\mu_U: \mathcal{B} \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; U)$.

Если ξ_n — это U-значные случайные элементы такие, что ряд $\sum_{n \geq 1} \xi_n$ сходится по вероятности безусловно, а m_n — это действительнoзначные знакопеременные меры на $\mathcal{B}$, $\sup_{n,A} |m_n(A)| \leq 1$, то $\mu_U(A) := \sum_{n \geq 1} \xi_n m_n(A)$ будет U-значной CM на $\mathcal{B}$. Это следует из [15, теорема 8.6] и [16, теорема V.4.2].

Если $M(t)$, $0 \leq t \leq T$, — U-значный квадратично интегрируемый мартингал, то

$$\mu_U^M(A) := \int_0^T (1_A(s)E) dM(s), \quad A \in \mathcal{B}([0, T]), \quad (3)$$

будет U-значной CM. Это следует из [3, теорема 8.7(i)]. Здесь $E: U \rightarrow U$ обозначает тождественный оператор, и мы используем определение интеграла из [3, п. 8.2].

Следующее утверждение было доказано в лемме работы [17] для действительнoзначных CM.

Лемма 2. Пусть μ_U — это U-значная CM и $a_n \in \mathbf{R}$, $n \geq 1$, таковы, что $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$. Пусть $A_{kn} \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq l_n$, таковы, что для всех n и $k_1 \neq k_2$ множества $A_{k_1 n}$ и $A_{k_2 n}$ не пересекаются. Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \sum_{k=1}^{l_n} \|\mu_U(A_{kn})\|_U^2 < \infty \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что (4) не выполняется. Обозначим

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega: \sum_{n=1}^\infty a_n^2 \sum_{k=1}^{l_n} \|\mu_U(A_{kn})\|_U^2 = +\infty \right\}, \quad \mathbf{P}(\Omega_0) = \alpha_0 > 0.$$

Рассмотрим независимые случайные величины ε_{kn} , $n \geq 1$, $1 \leq k \leq l_n$, определенные на другом вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, $\mathbf{P}'(\varepsilon_{kn} = 1) = \mathbf{P}'(\varepsilon_{kn} = -1) = 1/2$. Имеем:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}'} \left\| \sum_{n=1}^j a_n \sum_{k=1}^{l_n} \varepsilon_{kn} \mu_U(A_{kn}) \right\|_U^2 = \sum_{n=1}^j a_n^2 \sum_{k=1}^{l_n} \|\mu_U(A_{kn})\|_U^2.$$

Значит, для каждого фиксированного $\omega \in \Omega_0$ множество случайных величин

$$\eta_j(\omega', \omega) = \sum_{n=1}^j a_n \sum_{k=1}^{l_n} \varepsilon_{kn}(\omega') \mu_U(A_{kn}, \omega), \quad j \geq 1,$$

не ограничено в $L_2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}'; U)$. По теореме V.5.2(a) [16] множество $\eta_j(\omega', \omega)$, $j \geq 1$, не ограничено в $L_0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}'; U)$. Для некоторого $\alpha_1 > 0$ при каждом $c > 0$ найдется m такое, что

$$\mathbf{P}' \left\{ \omega' \in \Omega': \max_{1 \leq j \leq m} \|\eta_j(\omega', \omega)\|_U \geq c \right\} \geq \alpha_1. \quad (5)$$

Выберем m настолько большим, чтобы (5) выполнялось для всех $\omega \in \Omega_1 \subset \Omega_0$, $\mathbf{P}(\Omega_1) \geq \alpha_0/2$. Из неравенства Леви (см. [16, V.2.2(6)]) следует, что для каждого $\omega \in \Omega_1$

$$\mathbf{P}' \left\{ \omega' \in \Omega': \|\eta_m(\omega', \omega)\|_U \geq c \right\} \geq \frac{\alpha_1}{2},$$

и мы получаем, что

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P}' \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega': \|\eta_m(\omega', \omega)\|_U \geq c \right\} \geq \frac{\alpha_0 \alpha_1}{4}.$$

Поэтому можно выбрать и зафиксировать некоторое $\omega' \in \Omega'$ такое, что

$$\mathbf{P} \left\{ \omega \in \Omega: \left\| \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{l_n} a_n \varepsilon_{kn}(\omega') \mu_U(A_{kn}, \omega) \right\|_U \geq c \right\} \geq \frac{\alpha_0 \alpha_1}{4}. \quad (6)$$

Из алгебры, порожденной набором множеств A_{kn} , $1 \leq k \leq l_n$, $1 \leq m \leq n$, мы можем выбрать такие непересекающиеся множества B_r , $1 \leq r \leq s$, что

$$\sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{l_n} a_n \varepsilon_{kn}(\omega') \mu_U(A_{kn}, \omega) = \sum_{r=1}^s b_r \mu_U(B_r, \omega),$$

при этом $|b_r| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Из [16, лемма V.4.3(в)] имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{r=1}^s b_r \mu_U(B_r) \right\|_U \geq c \right\} &\leq 8 \max_{t_r = \pm 1} \mathbf{P} \left\{ \left\| \sum_{r=1}^s t_r \mu_U(B_r) \right\|_U \geq \frac{c}{8 \max |b_r|} \right\} \\ &= 8 \mathbf{P} \left\{ \left\| \mu_U(C_1) - \mu_U(C_2) \right\|_U \geq \frac{c}{8 \max |b_r|} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

для некоторых множеств $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$. Напомним, что c в (5) можно взять сколь угодно большим. Из (6) и (7) мы получаем противоречие с ограниченностью множества значений U -значной СМ [18, теорема]. Лемма 2 доказана.

3. Уравнения и интегралы с действительными значениями СМ.

3.1. Интегралы по действительным значениям СМ. Всюду в этом пункте μ — действительная СМ, для которой выполняется условие 1.

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство; $\|\cdot\|$ — норма в H ; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H ; e_j , $j \geq 1$, — ортонормированный базис в H ; $f: X \rightarrow H$ — измеримая функция,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j f_j(x), \quad f_j: X \rightarrow \mathbf{R}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x) = \|f(x)\|^2.$$

О п р е д е л е н и е 3. Пусть измеримая функция $f: X \rightarrow H$ такова, что

$$\int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < +\infty. \quad (8)$$

Тогда положим

$$\int_X f d\mu := \sum_{j=1}^{\infty} e_j \int_X f_j d\mu, \quad (9)$$

где ряд (9) сходится безусловно п.н. в H .

Сходимость ряда (9) следует из леммы 1 и (8). Легко проверить, что $\int_X c \mathbf{1}_A d\mu = c\mu(A)$, $c \in H$, $A \in \mathcal{B}$.

Покажем, что значение интеграла не зависит от выбора базиса. Пусть u_r , $r \geq 1$, — другой ортонормированный базис, $c_{rj} = (u_r, e_j)$, $f'_r = (f, u_r)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} u_r \int_X f'_r d\mu &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{rj} e_j \int_X f'_r d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} e_j \sum_{r=1}^{\infty} c_{rj} \int_X f'_r d\mu \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} e_j \int_X \left(\sum_{r=1}^{\infty} c_{rj} f'_r \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} e_j \int_X f_j d\mu. \end{aligned}$$

Для обоснования равенства $(*)$ мы можем использовать оценку

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} |c_{rj} f'_r| \right)^2 \leq \sum_{r=1}^{\infty} c_{rj}^2 \sum_{r=1}^{\infty} f_r'^2 = \|f(x)\|^2.$$

По условию 1 и (8), функция $\sum_{r=1}^{\infty} |c_{rj} f'_r|$ интегрируема по μ , и $(*)$ следует из теоремы о доминируемой сходимости [11, предложение 7.1.1].

Теорема 1. Если измеримые $f^{(n)}: X \rightarrow H$, $n \geq 1$, таковы, что

$$\int_X \|f^{(n)}(x)\|^2 d\mu(x) \rightarrow 0,$$

то

$$\int_X f^{(n)} d\mu \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то найдутся $f^{(n)}: X \rightarrow H$ такие, что

$$\int_X \|f^{(n)}(x)\|^2 d\mu(x) < 2^{-n}, \quad \int_X f^{(n)} d\mu \not\xrightarrow{P} 0.$$

Для $f_j^{(n)} = (f^{(n)}, e_j)$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \|f^{(n)}(x)\|^2 d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j^{(n)}(x)^2 d\mu(x) < +\infty,$$

и из леммы 1 получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_X f^{(n)} d\mu \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f_j^{(n)}(x) d\mu(x) \right)^2 < +\infty \quad \text{п.н.}$$

Это противоречит предположению $\int_X f^{(n)} d\mu \not\xrightarrow{P} 0$. Теорема доказана.

Далее мы рассмотрим случай $X = [0, T]$. Будем использовать обозначения

$$d_{kn} = k \cdot 2^{-n}T, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq 2^n, \\ \Delta_{kn} = (d_{(k-1)n}, d_{kn}], \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

Следующая лемма является ключевой в доказательстве непрерывности траекторий интеграла.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра в $[0, T]$, $A \in \mathcal{B}$, Z — произвольное множество и функция $q(z, s): Z \times [0, T] \rightarrow H$ такова, что все траектории $q(z, \cdot)$ непрерывны на $[0, T]$. Обозначим

$$q_n(z, s) = q(z, 0) \mathbf{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} q(z, d_{(k-1)n}) \mathbf{1}_{\Delta_{kn}}(s).$$

Тогда случайная функция

$$\eta(z) = \int_A q(z, s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

имеет модификацию

$$\tilde{\eta}(z) = \int_A q_0(z, s) d\mu(s) + \sum_{n \geq 1} \left(\int_A q_n(z, s) d\mu(s) - \int_A q_{n-1}(z, s) d\mu(s) \right) \quad (10)$$

такую, что для всех $\beta > 0$, $\omega \in \Omega$, $z \in Z$

$$\|\tilde{\eta}(z)\| \leq \|q(z, 0)\mu(A)\| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \|q(z, d_{kn}) - q(z, d_{(k-1)n})\|^2 \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn} \cap A)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Доказательство. Из непрерывности $q(z, \cdot)$ и теоремы 1 получаем, что

$$\int_{\mathbf{A}} q_n(z, s) d\mu(s) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbf{A}} q(z, s) d\mu(s), \quad n \rightarrow \infty,$$

для каждого z . Значит, $\tilde{\eta}(z)$ является модификацией $\eta(z)$. Для $\beta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \left\| \int_{\mathbf{A}} q_n(z, s) d\mu(s) - \int_{\mathbf{A}} q_{n-1}(z, s) d\mu(s) \right\| \\ & \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| q(z, d_{(k-1)n}) - q(z, d_{(k'-1)(n-1)}) \right\| \left| \mu(\Delta_{kn} \cap \mathbf{A}) \right| \\ & \leq \left\{ \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} 2^{n\beta} \left\| q(z, d_{(k-1)n}) - q(z, d_{(k'-1)(n-1)}) \right\|^2 \right\}^{1/2} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} 2^{-n\beta} \left| \mu(\Delta_{kn} \cap \mathbf{A}) \right|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

(Номер k' выбран так, что $\Delta_{kn} \subset \Delta_{k'(n-1)}$.) Лемма 3 доказана.

Отметим, что по лемме 2 для каждого $\beta > 0$

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} 2^{-n\beta} \left| \mu(\Delta_{kn} \cap \mathbf{A}) \right|^2 < +\infty \quad \text{п. н.} \quad (11)$$

3.2. Эволюционные уравнения, ведомые действительными СМ.

В этом пункте $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра в $\mathbf{X} = [0, T]$, $\sigma(t): [0, T] \rightarrow \mathbf{H}$ — измеримая функция, $X_0 \in \mathbf{H}$, и мы рассмотрим мягкое решение уравнения (1)

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_{(0,t]} S(t-s)\sigma(s) d\mu(s), \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Для существования интеграла в (12) достаточно выполнения условия

$$\int_{[0,T]} \|\sigma(s)\|^2 d\mathbf{m}(s) < +\infty.$$

Условие 2. Функция σ представляется в виде $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s)\mathbf{1}_{\mathbf{B}}(s)$, где $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$, и для некоторого $1/2 < \varepsilon \leq 1$

$$\tilde{\sigma}(s) \in D(A^\varepsilon), \quad \sup_{s \in [0,T]} \|A^\varepsilon \tilde{\sigma}(s)\| < +\infty, \quad \|\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\sigma}(u)\| \leq C|s - u|^\varepsilon.$$

Условие 3. Для множества $\mathbf{B}$ из условия 2 процесс $\mu((0, s] \cap \mathbf{B})$, $0 \leq s \leq T$, имеет непрерывную модификацию.

Всюду в неравенствах C обозначает положительную константу, конкретное значение которой несущественно. Через A^ε мы обозначаем степень соответствующего оператора.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 2 и 3. Тогда процесс $X(t)$, определенный в (12), имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{(0,t]} S(t-s)\sigma(s) d\mu(s) &= \int_{(0,T] \cap \mathbf{B}} S((t-s) \vee 0) \tilde{\sigma}(s) d\mu(s) \\ &\quad - \int_{(t,T] \cap \mathbf{B}} \tilde{\sigma}(s) d\mu(s) =: \eta_1(t) - \eta_2(t). \end{aligned}$$

Для интегралов $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ мы выберем модификации, определенные в (10).

Возьмем $0 \leq t_1 < t_2$ и рассмотрим пределы при $|t_2 - t_1| \rightarrow 0$. Из леммы 3 имеем, что

$$\begin{aligned} \|\eta_1(t_2) - \eta_1(t_1)\| &= \left\| \int_{(0, T] \cap \mathbf{B}} \left(S((t_2 - s) \vee 0) - S((t_1 - s) \vee 0) \right) \tilde{\sigma}(s) d\mu(s) \right\| \\ &\leq \left\| \left(S(t_2) - S(t_1) \right) \tilde{\sigma}(0) \right\| \left| \mu((0, T] \cap \mathbf{B}) \right| \\ &\quad + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| \left(S((t_2 - d_{kn}) \vee 0) - S((t_1 - d_{kn}) \vee 0) \right) \tilde{\sigma}(d_{kn}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(S((t_2 - d_{(k-1)n}) \vee 0) - S((t_1 - d_{(k-1)n}) \vee 0) \right) \tilde{\sigma}(d_{(k-1)n}) \right\|^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu(\Delta_{kn} \cap (0, T] \cap \mathbf{B}) \right|^2 \right\}^{1/2} =: I_1 + I_2^{1/2} \times I_3^{1/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $I_1 \rightarrow 0$. Из [19, теорема 2.6.13(d)] и стандартных свойств полугрупп имеем, что

$$\|S(s)h - S(t)h\| \leq C |s - t|^\varepsilon \|A^\varepsilon h\|, \quad s, t \in [0, T], \quad h \in D(A^\varepsilon). \quad (13)$$

Используя эту оценку и условие 2, для $0 < \beta < 2\varepsilon - 1$ в I_2 получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} &\left(\left\| S((t_2 - d_{kn}) \vee 0) [\tilde{\sigma}(d_{kn}) - \tilde{\sigma}(d_{(k-1)n})] \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \left[S((t_2 - d_{kn}) \vee 0) - S((t_2 - d_{(k-1)n}) \vee 0) \right] \tilde{\sigma}(d_{(k-1)n}) \right\|^2 \right) \\ &\leq C \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} 2^{n(1-2\varepsilon)} < +\infty. \end{aligned}$$

Аналогичные оценки имеют место для слагаемых $S((t_1 - \cdot) \vee 0)$. Условие 2 и неравенство (13) дают нам оценку сверху для I_2 , каждое слагаемое в I_2 стремится к 0, и поэтому $I_2 \rightarrow 0$. Напомним, что $I_3 < \infty$ п.н. по лемме 2. Значит, η_1 непрерывен.

Далее из леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \|\eta_2(t_2) - \eta_2(t_1)\| &= \left\| \int_{(t_1, t_2] \cap \mathbf{B}} \tilde{\sigma}(s) d\mu(s) \right\| \leq \|\tilde{\sigma}(0)\| \left| \mu((t_1, t_2] \cap \mathbf{B}) \right| \\ &\quad + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| \tilde{\sigma}(d_{kn}) - \tilde{\sigma}(d_{(k-1)n}) \right\|^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu(\Delta_{kn} \cap (t_1, t_2] \cap \mathbf{B}) \right|^2 \right\}^{1/2} \\ &=: J_1 + J_2^{1/2} \times J_3^{1/2}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{k: \Delta_{kn} \subset (t_1, t_2]} \left| \mu(\Delta_{kn} \cap \mathbf{B}) \right|^2 + \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \left| \mu(\Delta_{k'n} \cap (t_1, t_2] \cap \mathbf{B}) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \left| \mu(\Delta_{k''n} \cap (t_1, t_2] \cap \mathbf{B}) \right|^2 \\ &=: J_{31} + J_{32} + J_{33}, \quad t_1 \in \Delta_{k'n}, \quad t_2 \in \Delta_{k''n}. \end{aligned}$$

Из условия 3 следует, что $J_1, J_{32}, J_{33} \rightarrow 0$, а $J_{31} \rightarrow 0$ как остатки сходящихся рядов (11). Используя условие 2, для $0 < \beta < 2\varepsilon - 1$ получаем $J_2 < \infty$. Поэтому η_2 непрерывен. Теорема 2 доказана.

Отметим, что условие $\tilde{\sigma}(s) \in D(A^\varepsilon)$ также накладывалось в замечании 4.3 и теореме 2.1 [1], устанавливающих существование непрерывного решения неоднородного эволюционного уравнения, ведомого винеровским процессом.

4. Уравнения и интегралы с U-значными СМ.

4.1. Интегралы по U-значным СМ. Всюду в этом пункте μ_U — это U-значная СМ и $B(x): X \rightarrow L(U, H)$ — функция со значениями в множестве непрерывных линейных операторов из U в H . Предполагаем, что для каждого $\varphi \in U$ функция $B(x)\varphi: X \rightarrow H$ измерима.

Пусть $\varphi_i, i \geq 1$, — ортонормированный базис в U . Очевидно, что $\mu_i(A) = (\mu_U(A), \varphi_i)_U$ будут действительными СМ,

$$\mu_U(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A) \varphi_i.$$

У с л о в и е 4. Для каждого $i \geq 1$ существует действительная конечная мера m_i на $(X, \mathcal{B})$ со следующим свойством: если измеримая функция $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\int_X h^2 dm_i < +\infty$, то h интегрируема по μ_i на X .

О п р е д е л е н и е 4. Пусть выполнено условие 4 и

$$\int_X \|B(x)\varphi_i\|^2 dm_i(x) < +\infty, \quad i \geq 1.$$

Тогда положим

$$\int_X B(x) d\mu_U(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_X (B(x)\varphi_i) d\mu_i(x), \quad (14)$$

если ряд сходится по вероятности безусловно в U , и сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса.

Интегралы по μ_i здесь взяты по определению 3. Легко видеть, что

$$\int_X \mathbf{1}_A B(x) d\mu_U = \int_A B(x) d\mu_U, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Всюду ниже мы предполагаем, что для μ_U выполняется условие 4. Также мы будем использовать операторную норму Гильберта–Шмидта

$$\|B(x)\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|B(x)\varphi_i\|^2.$$

П р и м е р 1. Для $B(x) = \mathbf{1}_A(x)B$ имеем

$$\begin{aligned} \int_X \mathbf{1}_A B d\mu_U &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_A (B\varphi_i) d(\mu_U, \varphi_i)_U = \sum_{i=1}^{\infty} (B\varphi_i)(\mu_U(A), \varphi_i)_U \\ &= B \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\mu_U(A), \varphi_i)_U = B\mu_U(A). \end{aligned}$$

П р и м е р 2. Для U-значного квадратично интегрируемого мартингала Леви M сравним интеграл по M , построенный в [3, гл. 8], и наш интеграл по μ_U^M (см. (3)).

Пусть $M(t), 0 \leq t \leq T$, — U-значный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, у которого распределение $M(t) - M(s)$ зависит только от $t - s$, $\mathbf{E}M(t) = 0$, $\mathbf{E}M(t)^2 < +\infty$. Его предсказуемая характеристическая вариация равна $\langle M, M \rangle_s = s \text{Tr } Q$ для некоторого неотрицательного ядерного оператора $Q: U \rightarrow$

$\mathbf{U}$ (см. [3, п. 8.6.1]). Для случайной неупреждающей операторной функции $\Psi(s, \omega)$ в [3] определен интеграл $I_T^M(\Psi) = \int_0^T \Psi(s, \omega) dM(s)$, если

$$\|\Psi\|_{M,T}^2 = \mathbf{E} \int_0^T \|\Psi(s)Q^{1/2}\|_{\text{HS}}^2 d\langle M, M \rangle_s < +\infty \quad (15)$$

(см. [3, (8.6) и теорема 8.7]). При этом

$$\mathbf{E}|I_T^M(\Psi)|^2 = \|\Psi\|_{M,T}^2. \quad (16)$$

К порожденной данным мартингалом Леви $\mathbf{U}$ -значной СМ $\mu_{\mathbf{U}}^M$ можно применить наше определение 4. Имеем, что $(M(s), \varphi_i)_{\mathbf{U}}$ — это действительнзначный процесс Леви, условие 4 выполняется для $\mu_i^M(\mathbf{A}) = (\mu_{\mathbf{U}}^M(\mathbf{A}), \varphi_i)_{\mathbf{U}}$ и $m_i(ds) = ds$ (мы можем использовать (15) и (16) для $\mathbf{U} = \mathbf{H} = \mathbf{R}$).

Пусть $B(s)$ — неслучайная операторная функция, интегрируемая по $dM(s)$ в смысле [3]. Пусть $\varphi_i, i \geq 1$, — базис из собственных векторов оператора Q . Рассмотрим последовательность операторов

$$B_n(s)u = \sum_{i=1}^n (u, \varphi_i)_{\mathbf{U}} B(s) \varphi_i, \quad u \in \mathbf{U}, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \int_{[0,T]} (B(s) \varphi_i) d\mu_i^M(s) = \int_{[0,T]} B_n(s) dM(s), \quad \|B_n(s)Q^{1/2}\|_{\text{HS}} \leq \|B(s)Q^{1/2}\|_{\text{HS}}.$$

Из (15), (16) и теоремы о мажорируемой сходимости следует, что

$$\int_{[0,T]} B_n(s) dM(s) \rightarrow \int_{[0,T]} B(s) dM(s)$$

в L_2 -норме. Значит, в этом случае для данных φ_i ряд (14) сходится к $\int_{[0,T]} B(s) dM(s)$. (Отметим, что для интеграла по Q -винеровскому процессу W сходимость (14) следует из результатов [2, п. 4.3.2].)

Для указанной $\mu_{\mathbf{U}}^M$ мы не можем гарантировать сходимость (14) для любого базиса, но если оба интеграла $\int_{[0,T]} B(s) dM(s)$ и $\int_{[0,T]} B(s) d\mu_{\mathbf{U}}^M(s)$ существуют, то они равны.

Определение 4 аналогично определению интеграла по цилиндрическому дробному броуновскому движению в [4]. Интеграл в [4] определен как сумма (14) для μ_i , порожденных независимыми действительнзначными дробными броуновскими движениями, и значение интеграла может зависеть от ортонормированного базиса.

Далее мы дадим достаточное условие существования нашего интеграла в случае $\mathbf{X} \subset [0, T]$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра в $[0, T]$, $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$, $B(s)$ — операторы Гильберта–Шмидта, $\mathbf{H}$ -значные функции $B(s)\varphi_i, 0 \leq s \leq T$, непрерывны и

$$\sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \|B(d_{kn}) - B(d_{(k-1)n})\|_{\text{HS}}^2 < +\infty \quad (17)$$

для некоторого $\beta > 0$. Тогда определен $\int_{\mathbf{A}} B(s) d\mu_{\mathbf{U}}(s)$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что сходится ряд (14). Из леммы 3 следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| \int_{\mathbf{A}} B(s) \varphi_i d\mu_i(s) \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\| (B(0)\varphi_i) \mu_i(\mathbf{A}) \right\| \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| B(d_{kn})\varphi_i - B(d_{(k-1)n})\varphi_i \right\|^2 \right\}^{1/2} \\
& \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu_i(\Delta_{kn} \cap A) \right|^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Для первого слагаемого в правой части (18) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \left\| (B(0)\varphi_i)\mu_i(A) \right\| & \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left\| B(0)\varphi_i \right\|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left| \mu_i(A) \right|^2 \right]^{1/2} \\
& = \left\| B(0) \right\|_{\text{HS}} \left\| \mu_{\mathbf{U}}(A) \right\|_{\mathbf{U}} < +\infty.
\end{aligned} \quad (19)$$

Для остальных слагаемых в (18) мы используем неравенство $2\sqrt{ab} \leq a + b$ и получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| B(d_{kn})\varphi_i - B(d_{(k-1)n})\varphi_i \right\|^2 \\
& = \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| B(d_{kn}) - B(d_{(k-1)n}) \right\|_{\text{HS}}^2 \stackrel{(17)}{<} +\infty, \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu_i(\Delta_{kn} \cap A) \right|^2 \\
& = \sum_{n \geq 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| \mu_{\mathbf{U}}(\Delta_{kn} \cap A) \right\|_{\mathbf{U}}^2 \stackrel{(4)}{<} +\infty.
\end{aligned}$$

Значит, сумма (18) конечна.

Далее мы покажем, что сумма (14) не зависит от выбора базиса. Имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \int_A (B(x)\varphi_i) d\mu_i(x) \stackrel{(10)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \left((B(0)\varphi_i)\mu_i(A) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left(B(d_{(k-1)n})\varphi_i - B(d_{(k'-1)(n-1)})\varphi_i \right) \mu_i(\Delta_{kn} \cap A) \right) \\
& = B(0) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \mu_i(A) + \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left(B(d_{(k-1)n}) - B(d_{(k'-1)(n-1)}) \right) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \mu_i(\Delta_{kn} \cap A) \\
& = B(0)\mu_{\mathbf{U}}(A) + \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left(B(d_{(k-1)n}) - B(d_{(k'-1)(n-1)}) \right) \mu_{\mathbf{U}}(\Delta_{kn} \cap A).
\end{aligned}$$

Здесь мы можем поменять порядок слагаемых, поскольку сумма (18) конечна и ряд сходится абсолютно. (Номер k' взят так, что $\Delta_{kn} \subset \Delta_{k'(n-1)}$.) Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Если $B(0)$ — оператор Гильберта–Шмидта, то неравенство (17) эквивалентно следующему условию: все действительныезначные функции $b_{ij}(s) = (B(s)\varphi_i, e_j)$ принадлежат пространству Бесова $B_{22}^{(\beta+1)/2}([0, T])$ и

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \|b_{ij}(s)\|_{B_{22}^{(\beta+1)/2}([0, T])}^2 < +\infty.$$

Это следует из [20, теорема 1.1].

Также для справедливости (17) достаточно выполнения условия Гёльдера

$$\left\| B(s) - B(t) \right\|_{\text{HS}} \leq C|s - t|^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > \frac{\beta + 1}{2}.$$

Следующий пример показывает, что мы не можем убрать условие (17) в теореме 3.

Пример 3. Возьмем $X = [0, \pi]$, $U = H$ и положим

$$B(s)\varphi_i = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{1}{(ij)^{3/4}} \sin is, \quad \|B(s)\varphi_i\|^2 \leq 3i^{-3/2}, \quad \|B(s)\|_{HS} < +\infty.$$

Рассмотрим неслучайную функцию множеств $\mu_U(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \int_A \sin is \, ds$, где μ_U — U -значная мера (это следует из аналога теоремы Никодима [15, теорема 8.6]). Мы можем взять $m_j(ds) = ds$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_X B(s)\varphi_i \, d\mu_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \int_{[0, \pi]} \frac{1}{(ij)^{3/4}} \sin^2 is \, ds = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{1}{j^{3/4}} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/4}} \right),$$

и последняя сумма расходится.

4.2. Эволюционные уравнения, ведомые U -значными СМ. Пусть μ_U определена на борелевской σ -алгебре в $X = [0, T]$, $Y_0 \in H$ и $B: U \rightarrow H$ — непрерывный линейный оператор. Мы рассмотрим мягкое решение уравнения (2)

$$Y(t) = S(t)Y_0 + \int_{(0, t]} S(t-s)B \, d\mu_U(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (20)$$

Условие 5. Для некоторого $\varepsilon > 1/2$ оператор $A^\varepsilon B: U \rightarrow H$ является непрерывным линейным оператором Гильберта–Шмидта.

Теорема 4. Пусть выполняются условия 4 и 5. Тогда мягкое решение (20) корректно определено.

Доказательство. Мы проверим условия теоремы 3 для $A = (0, t]$, $B(s) = S((t-s) \vee 0)B$, $0 \leq s \leq T$. Для $0 < \beta < 2\varepsilon - 1$ в (17) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| S((t-d_{kn}) \vee 0)B\varphi_i - S((t-d_{(k-1)n}) \vee 0)B\varphi_i \right\|^2 \\ & \stackrel{(13)}{\leq} C \sum_{n \geq 1} 2^{n\beta} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \sum_{i \geq 1} 2^{-2n\varepsilon} \|A^\varepsilon B\varphi_i\|^2 \leq C \|A^\varepsilon B\|_{HS}^2 < +\infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Функция $B(s)\varphi_i$ непрерывна, поскольку $S(t)$ есть C_0 -полугруппа. Теорема 4 доказана.

Условие 6. Процесс $\mu_U((0, s])$, $0 \leq s \leq T$, имеет непрерывную модификацию.

Теорема 5. Пусть выполняются условия 4, 5 и 6. Тогда решение $Y(t)$ в (20) имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. Имеем

$$\int_{(0, t]} S(t-s)B \, d\mu_U(s) = \int_{(0, T]} S((t-s) \vee 0)B \, d\mu_U(s) - B\mu_U((t, T]).$$

Процессы

$$\eta^{(i)}(t) = \int_{(0, T]} S((t-s) \vee 0)B\varphi_i \, d\mu_i(s)$$

непрерывны (см. доказательство непрерывности η_1 в теореме 2). Из оценок (18), (19) и (21) следует, что $\sum_{i=1}^{\infty} \eta^{(i)}(t)$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$. Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Da Prato G. Some results on linear stochastic evolution equations in Hilbert spaces by the semigroups method. — Stoch. Anal. Appl., 1983, v. 1, p. 57–88.
2. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p.

3. Peszat S., Zabczyk J. Stochastic partial differential equations with Lévy noise: an evolution equation approach. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007, 419 p.
4. Duncan T. E., Pasik-Duncan B., Maslowski B. Fractional Brownian motion and stochastic equations in Hilbert spaces. — Stoch. Dyn., 2002, v. 2, № 2, p. 225–250.
5. Brzeźniak Z., van Neerven J. Stochastic convolution in separable Banach space and the stochastic linear Cauchy problem. — Studia Math., 2000, v. 143, № 1, p. 43–74.
6. van Neerven J. M. A. M., Weis L. Stochastic integration of functions with values in a Banach space. — Studia Math., 2005, v. 166, № 2, p. 131–170.
7. van Neerven J., Veraar M., Weis L. Stochastic evolution equations in UMD Banach spaces. — J. Funct. Anal., 2008, v. 255, № 4, p. 940–993.
8. Dettweiler J., Weis L., van Neerven J. Space-time regularity of solutions of the parabolic stochastic Cauchy problem. — Stoch. Anal. Appl., 2006, v. 24, № 4, p. 843–869.
9. Mémin J., Mishura Yu., Valkeila E. Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 51, № 2, p. 197–206.
10. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable Non-Gaussian Random Processes. Boca Raton: Chapman & Hall, 1994, 632 p.
11. Kwapien S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. Boston: Birkhäuser, 1992, 360 p.
12. Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999, 196 с. (Труды Института математики НАН Украины, т. 27.)
13. Радченко В. Н. Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 594–596.
14. Радченко В. Н. Выборочные функции случайных мер и пространства Бесова. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 158–166.
15. Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III. — Bull. Acad. Pol. Sci., 1972, v. 20, p. 439–445.
16. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
17. Radchenko V. M. Besov regularity of stochastic measures. — Statist. Probab. Lett., 2007, v. 77, № 8, p. 822–825.
18. Drewnowski L. Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v. 91, p. 581–588.
19. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983, 280 p.
20. Kamont A. A discrete characterization of Besov spaces. — Approx. Theory Appl. (N.S.), 1997, v. 13, № 2, p. 63–77.

Поступила в редакцию
24.V.2013

Исправленный вариант
22.X.2013

© 2014 г.

СТАРЦЕВ А. Н.*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНОГО ПРОЦЕССА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрены отличные от оценок максимального правдоподобия оценки параметров двумерного марковского гауссовского нестационарного процесса, заданного системой линейных стохастических уравнений с двумя параметрами. Доказана их асимптотическая нормальность и

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
e-mail: anstartsev@gmail.com