Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Старцев, Об одном подходе к оценке параметров двумерного процесса линейной диффузии в нестационарном случае, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 2, 386–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:09:30

3. Peszat S., Zabczyk J. Stochastic partial differential equations with Lévy noise: an evolution equation approach. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007, 419 p.
4. Duncan T. E., Pasik-Duncan B., Maslowski B. Fractional Brownian motion and stochastic equations in Hilbert spaces. — Stoch. Dyn., 2002, v. 2, № 2, p. 225–250.
5. Brzeźniak Z., van Neerven J. Stochastic convolution in separable Banach space and the stochastic linear Cauchy problem. — Studia Math., 2000, v. 143, № 1, p. 43–74.
6. van Neerven J. M. A. M., Weis L. Stochastic integration of functions with values in a Banach space. — Studia Math., 2005, v. 166, № 2, p. 131–170.
7. van Neerven J., Veraar M., Weis L. Stochastic evolution equations in UMD Banach spaces. — J. Funct. Anal., 2008, v. 255, № 4, p. 940–993.
8. Dettweiler J., Weis L., van Neerven J. Space-time regularity of solutions of the parabolic stochastic Cauchy problem. — Stoch. Anal. Appl., 2006, v. 24, № 4, p. 843–869.
9. Mémin J., Mishura Yu., Valkeila E. Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 51, № 2, p. 197–206.
10. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable Non-Gaussian Random Processes. Boca Raton: Chapman & Hall, 1994, 632 p.
11. Kwapien S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. Boston: Birkhäuser, 1992, 360 p.
12. Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999, 196 с. (Труды Института математики НАН Украины, т. 27.)
13. Радченко В. Н. Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 594–596.
14. Радченко В. Н. Выборочные функции случайных мер и пространства Бесова. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 158–166.
15. Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III. — Bull. Acad. Pol. Sci., 1972, v. 20, p. 439–445.
16. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
17. Radchenko V. M. Besov regularity of stochastic measures. — Statist. Probab. Lett., 2007, v. 77, № 8, p. 822–825.
18. Drewnowski L. Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v. 91, p. 581–588.
19. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983, 280 p.
20. Kamont A. A discrete characterization of Besov spaces. — Approx. Theory Appl. (N.S.), 1997, v. 13, № 2, p. 63–77.

Поступила в редакцию
24.V.2013

Исправленный вариант
22.X.2013

© 2014 г.

СТАРЦЕВ А. Н.*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНОГО ПРОЦЕССА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрены отличные от оценок максимального правдоподобия оценки параметров двумерного марковского гауссовского нестационарного процесса, заданного системой линейных стохастических уравнений с двумя параметрами. Доказана их асимптотическая нормальность и

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
e-mail: anstartsev@gmail.com

асимптотическая независимость, что позволяет строить доверительные интервалы одновременно для обоих параметров.

Ключевые слова и фразы: двумерный гауссовский процесс, линейная диффузия, нестационарный случай, оценка параметров, асимптотические свойства.

1. Введение. Пусть на интервале $[0, T]$ наблюдается двумерный гауссовский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, удовлетворяющий следующей системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\xi_1(t) = -\lambda\xi_1(t)dt - \omega\xi_2(t)dt + dw_1(t), \quad (1)$$

$$d\xi_2(t) = -\lambda\xi_2(t)dt + \omega\xi_1(t)dt + dw_2(t), \quad (2)$$

где $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ — двумерный винеровский процесс с независимыми компонентами. Предполагается, что $\mathbf{E}\xi_1(t) = \mathbf{E}\xi_2(t) = 0$, а $\xi(0)$ не зависят от $w(t)$, причем $\xi_1(0)$ и $\xi_2(0)$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}\xi_1^2(0) = \mathbf{E}\xi_2^2(0) = \sigma^2$, $0 \leq \sigma^2 < \infty$.

Эта система уравнений была предложена А. Н. Колмогоровым в 1960 г. [1] (см. также [2]) как модель, описывающая колебания мгновенной оси вращения Земли относительно малой оси земного эллипсоида после устранения годовой периодический компоненты (так называемые чендлеровские колебания). В этой же работе в стационарном случае были предложены оценки максимального правдоподобия для параметров ω и λ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \frac{1}{\chi_2(T)} \left[\int_0^T \xi_1(t) d\xi_2(t) - \int_0^T \xi_2(t) d\xi_1(t) \right], \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{2\chi_2(T)} \left[\sqrt{(\chi_1(T) - T)^2 + 4\chi_2(T)} - (\chi_1(T) - T) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\chi_1(T) = (|\xi(0)|^2 + |\xi(T)|^2)/2$, $\chi_2(T) = \int_0^T |\xi(t)|^2 dt$.

Там же отмечалось, что $(\hat{\omega} - \omega)\sqrt{\chi_2(T)}$ имеет стандартное нормальное распределение. Строгое обоснование этого факта можно найти в монографии [3] (см. также [2]). Что касается оценки $\hat{\lambda}$, то в работе [1] были найдены некоторые частные аппроксимации для ее распределения. В [2] был найден явный вид характеристической функции достаточной статистики $(\chi_1(T), \chi_2(T))$, который, однако, имеет довольно сложный вид и зависит от неизвестного параметра λ . В силу этого распределение было табулировано не только по значениям квантилей, но и по значениям параметра λ .

В данной работе предлагается другой подход к получению оценок, основанный на построении уравнений оценивания, исходя из (1) и (2). Например, если умножить уравнение (1) на $\xi_2(t)$, а уравнение (2) на $\xi_1(t)$ и проинтегрировать их по t от 0 до T , то получим систему

$$\begin{aligned} \int_0^T \xi_2(t) d\xi_1(t) &= -\lambda \int_0^T \xi_1(t)\xi_2(t) dt - \omega \int_0^T \xi_2^2(t) dt + \int_0^T \xi_2(t) dw_1(t), \\ \int_0^T \xi_1(t) d\xi_2(t) &= -\lambda \int_0^T \xi_1(t)\xi_2(t) dt + \omega \int_0^T \xi_1^2(t) dt + \int_0^T \xi_1(t) dw_2(t). \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно ω , без учета последних членов, получим оценку (3). Однако оценка для λ при этом оказывается существенно более сложной. С другой стороны, можно получить аналогичную систему, удобную для построения

оценки параметра λ :

$$\begin{aligned}\int_0^T \xi_1(t) d\xi_1(t) &= -\lambda \int_0^T \xi_1^2(t) dt - \omega \int_0^T \xi_1(t) \xi_2(t) dt + \int_0^T \xi_1(t) dw_1(t), \\ \int_0^T \xi_2(t) d\xi_2(t) &= -\lambda \int_0^T \xi_2^2(t) dt + \omega \int_0^T \xi_1(t) \xi_2(t) dt + \int_0^T \xi_2(t) dw_2(t).\end{aligned}\quad (4)$$

Исключая ω , получаем оценку

$$\tilde{\lambda} = -\frac{1}{\chi_2(T)} \left[\int_0^T \xi_1 d\xi_1 + \int_0^T \xi_2 d\xi_2 \right] = -\frac{|\xi(T)|^2 - |\xi(0)|^2 - 2T}{2\chi_2(T)}.$$

Несмотря на то что полученная оценка имеет более простую структуру в сравнении с оценкой максимального правдоподобия $\hat{\lambda}$, ее предельное распределение также будет сложным и зависящим от неизвестного параметра, что легко следует из результатов М. Арато [2] относительно оценки $\hat{\lambda}$.

Ранее аналогичный подход применялся автором в одномерном случае: в [4] для процесса авторегрессии и в [5] для процесса линейной диффузии. Истоки этого метода восходят к работе [6], посвященной оцениванию параметров в регрессионных моделях.

2. Построение оценок и их асимптотические свойства. Нашей основной целью является построение других более простых по структуре оценок, хорошо действующих в нестационарном случае и имеющих простое предельное распределение.

Построим теперь уравнения оценивания простым интегрированием уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned}\xi_1(T) - \xi_1(0) &= -\lambda \int_0^T \xi_1(t) dt - \omega \int_0^T \xi_2(t) dt + w_1(T), \\ \xi_2(T) - \xi_2(0) &= -\lambda \int_0^T \xi_2(t) dt + \omega \int_0^T \xi_1(t) dt + w_2(T).\end{aligned}\quad (5)$$

Обозначая $\xi_j(T) - \xi_j(0) = \xi_j^0(T)$, $I_j(T) = \int_0^T \xi_j(t) dt$, $j = 1, 2$, получим следующую систему (без учета последних членов $w_1(T)$ и $w_2(T)$):

$$\xi_1^0(T) = -\lambda I_1(T) - \omega I_2(T), \quad \xi_2^0(T) = -\lambda I_2(T) + \omega I_1(T).$$

Решая эту систему относительно λ и ω , находим

$$\lambda^* = -\frac{\xi_1^0(T)I_1(T) + \xi_2^0(T)I_2(T)}{I(T)}, \quad \omega^* = \frac{\xi_2^0(T)I_1(T) - \xi_1^0(T)I_2(T)}{I(T)},$$

где $I(T) = I_1^2(T) + I_2^2(T)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. В наших условиях для всех $\lambda < 0$ и $-\infty < \omega < \infty$ величины $(\lambda^* - \lambda)(I(T)/T)^{1/2}$ и $(\omega^* - \omega)(I(T)/T)^{1/2}$ при $T \rightarrow \infty$ являются асимптотически независимыми и имеют в качестве предельного стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Из (5) легко получить и отклонения построенных оценок от оцениваемых параметров:

$$\lambda^* - \lambda = -\frac{w_1(T)I_1(T) + w_2(T)I_2(T)}{I(T)}, \quad \omega^* - \omega = \frac{w_2(T)I_1(T) - w_1(T)I_2(T)}{I(T)}, \quad (6)$$

которые и служат основой для изучения предельного поведения. В частности, из (6) имеем

$$\left(\frac{I(T)}{T} \right)^{1/2} (\lambda^* - \lambda) = - \left[w_1^* \frac{\eta(T)}{\sqrt{1 + \eta^2(T)}} + w_2^* \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(T)}} \right],$$

$$\left(\frac{I(T)}{T}\right)^{1/2} (\omega^* - \omega) = w_2^* \frac{\eta(T)}{\sqrt{1 + \eta^2(T)}} - w_1^* \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(T)}},$$

где $w_1^* = w_1(T)/\sqrt{T}$ и $w_2^* = w_2(T)/\sqrt{T}$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением, а $\eta(T) = I_1(T)/I_2(T)$.

Используя явный вид решения исходной системы стохастических уравнений (см., например, [2]):

$$\xi^*(t) = e^{At} \xi^*(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} dw^*(s),$$

где $A = \begin{pmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{pmatrix}$, $e^{At} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$, а символ $*$ обозначает транспонирование, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \xi_1(0)J_1(T) - \xi_2(0)J_2(T) + \int_0^T J_1(T-s) dw_1(s) - \int_0^T J_2(T-s) dw_2(s), \\ I_2(T) &= \xi_2(0)J_1(T) + \xi_1(0)J_2(T) + \int_0^T J_2(T-s) dw_1(s) - \int_0^T J_1(T-s) dw_2(s), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$J_1(x) = \frac{\lambda + (\omega \sin \omega x - \lambda \cos \omega x)e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad J_2(x) = \frac{\omega - (\lambda \sin \omega x + \omega \cos \omega x)e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (8)$$

Воспользовавшись свойствами стохастических интегралов, легко установить, что $I_1(T)$ и $I_2(T)$ являются независимыми гауссовскими величинами с нулевыми математическими ожиданиями и общей дисперсией $B_T^2 = b_T^2 + \sigma_T^2$, где $b_T^2 = (J_1^2(T) + J_2^2(T))\sigma^2$, $\sigma_T^2 = \int_0^T (J_1^2(t) + J_2^2(t)) dt$.

Далее, из (7) и (8) нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} b_T^2 &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} (1 - 2 \cos \omega T e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}) \sigma^2, \\ \sigma_T^2 &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \left[T - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} - \frac{2e^{-\lambda T}}{\lambda^2 + \omega^2} (\omega \sin \omega T - \lambda \cos \omega T) + \frac{1 - e^{-2\lambda T}}{2\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $T \rightarrow \infty$ и $\lambda < 0$

$$b_T^2 \sim \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \omega^2} e^{-2\lambda T}, \quad \sigma_T^2 \sim \frac{1}{2|\lambda|(\lambda^2 + \omega^2)} e^{-2\lambda T}. \quad (9)$$

Покажем, что случайные величины w_1^* и $I_1^* = I_1(T)/B_T$ асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) независимы.

Так как их совместное распределение является гауссовским, то достаточно установить их асимптотическую некоррелированность. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(w_1^* I_1^*) &= \mathbf{E} \frac{w_1(T)}{\sqrt{T}} \frac{I_1(T)}{B_T} = \frac{1}{\sqrt{T} B_T} \mathbf{E} w_1(T) \int_0^T J_1(T-s) dw_1(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T} B_T} \int_0^T J_1(T-s) \mathbf{E} w_1(T) dw_1(s) = \frac{1}{\sqrt{T} B_T} \int_0^T J_1(s) ds, \end{aligned} \quad (10)$$

так как $\mathbf{E} w_1(T) dw_1(s) = ds$ при $s \leq T$. Используя (8), находим

$$\int_0^T J_1(s) ds = \frac{\lambda T}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{\omega^2 - \lambda^2 - 2\lambda \omega \sin \omega T e^{-\lambda T} + (\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega T e^{-\lambda T}}{(\lambda^2 + \omega^2)^2}.$$

Отсюда, с учетом (9) и (10), имеем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E}(w_1^* \cdot I_1^*) = 0,$$

но при этом сами случайные величины w_1^* и I_1^* имеют стандартное нормальное распределение. Аналогично можно доказать асимптотическую независимость w_1^* от I_2^* , а также w_2^* от I_1^* и I_2^* .

Вспоминая (7) и учитывая сказанное выше, можно заключить, что слабый предел нормированных оценок λ^* и ω^* имеет вид

$$\zeta_1 = - \left[\xi_1 \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} + \xi_2 \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right] \quad \text{и} \quad \zeta_2 = \xi_2 \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} - \xi_1 \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

соответственно, где ξ_1 и ξ_2 — независимые стандартные гауссовские случайные величины, не зависящие от случайной величины η , имеющей стандартное распределение Коши.

Далее, легко показать, что ζ_1 и ζ_2 имеют стандартное нормальное распределение. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_2 < x) &= \mathbf{P}\left(\xi_2 \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} - \xi_1 \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} < x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi_2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \xi_1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} < x\right) d\mathbf{P}(\eta < u) = \Phi(x), \end{aligned}$$

так как случайные величины $\xi = \xi_2 u / \sqrt{1+u^2} - \xi_1 / \sqrt{1+u^2}$ имеют стандартное нормальное распределение. Здесь $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

Теперь докажем некоррелированность ζ_1 и ζ_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\zeta_1 \zeta_2) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\left(\xi_1 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \xi_2 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right) \left(\xi_2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \xi_1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right) d\mathbf{P}(\eta < u) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u}{1+u^2} \mathbf{E}\xi_2^2 - \frac{u}{1+u^2} \mathbf{E}\xi_1^2\right) d\mathbf{P}(\eta < u) = 0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Если T (время наблюдений) является целым числом, не трудно показать, что присутствующий в теореме нормирующий множитель $I(T)/T$ сходится п.н. к ∞ при $T \rightarrow \infty$.

Так как $I(T)/T = (I_1(T)/\sqrt{T})^2 + (I_2(T)/\sqrt{T})^2$, то достаточно установить, что $I_1(T)/\sqrt{T} \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty$. Без ограничения общности можно считать, что T является целым числом, т.е. $T = n \in \mathbf{N}$. Покажем, что имеет место сходимости $\xi_n = I_1(n)/\sqrt{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty$ при $n \rightarrow \infty$, равносильная сходимости $\xi_n^{-1} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. Для этого достаточно доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_n^{-1}| > \varepsilon)$ сходится для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим

$$P_n = \mathbf{P}(|\xi_n^{-1}| > \varepsilon) = \mathbf{P}\left(|\xi_n| < \frac{1}{\varepsilon}\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{I_1(n)}{\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\varepsilon}\right) = \mathbf{P}\left(|I_1^*| < \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon B_n}\right).$$

А так как I_1^* имеет стандартное нормальное распределение, то отсюда получим, что

$$P_n \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon B_n}.$$

В силу (9) имеем

$$B_n^2 \sim \left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{1}{2|\lambda|(\lambda^2 + \omega^2)} \right) e^{-2\lambda n} = c^2(\lambda, \omega, \sigma) e^{-2\lambda n}.$$

Следовательно $\sqrt{n}/B_n \sim \sqrt{n}e^{\lambda n}/c$ и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ сходится при $\lambda < 0$.

Если T не целое число, то можно рассматривать процесс $\xi(t)$ при $t \in [0, [T]]$, теряя информацию в интервале $([T], T)$, что составляет менее одной единицы времени.

З а м е ч а н и е 2. Для одномерной линейной диффузии

$$dX_t = -\theta X_t dt + dw(t)$$

асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия при случайной нормировке $(\int_0^T X_t^2 dt)^{1/2}$ в нестационарном случае ($\theta < 0$) была получена в работе [7], и там же было показано, что указанная нормировка стремится к бесконечности п.н. при $T \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Легко понять, что основной результат работы сохраняет силу и при фиксированных начальных условиях, т.е. если $\xi(0) = (x_0, y_0)$, так как это повлияет только на предельное распределение случайной величины $\eta(T) = I_1(T)/I_2(T)$, явный вид которого не играет никакой роли для асимптотической нормальности оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Арато М., Синай Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. — Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 4, с. 747–750.
2. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1989, 304 с.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
4. Startsev A. N. A new approach to estimation of an autoregressive parameter. — Probability Theory and Mathematical Statistics (Kiev, 1991). River Edge: World Scientific Publ., 1992, p. 377–381.
5. Старцев А. Н. Об одном новом подходе к оценке параметра сноса процесса линейной диффузии. — Узб. матем. журн., 1995, № 4, с. 72–76.
6. Durbin J. Estimation of parameters in time-series regression models. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1960, v. 22, p. 139–153.
7. Feigin P. D. Maximum likelihood estimation for continuous-time stochastic processes. — Adv. Appl. Probab., 1976, v. 8, № 4, с. 712–736.

Поступила в редакцию
5.III.2010

Исправленный вариант
5.XII.2013

© 2014 г.

MODARRESI N.*, REZAKHAH S.*

CERTAIN PERIODICALLY CORRELATED MULTI-COMPONENT LOCALLY STATIONARY PROCESSES¹⁾

Определяя $X^{ls}(t)$ как случайную смесь двух стационарных процессов, где зависящие от времени случайные веса имеют экспоненциально выпуклую ковариацию, мы показываем, что этот процесс имеет многокомпонентную локально стационарную ковариационную функцию в

* Faculty of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran; e-mail: namomath@aut.ac.ir (Modarresi N.); rezakhah@aut.ac.ir (Reza-khah S.).

¹⁾ This work was supported by a grant of IPM (№ 91620034), grant of IPM (№ 91620035).