Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Савинов, Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t -распределения Стьюдента, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 594–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:49:59

2. Ширяев А. Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. М.: МИАН, 2007, 78 с. (Совр. пробл. матем., в. 8.)
3. Watkins J. C. Discrete Time Stochastic Processes. Lecture Notes. 2007, 106 p. <http://math.arizona.edu/~jwatkins/discretetime.pdf>
4. Bochner S. Partial ordering in the theory of martingales. — Ann. Math., 1955, v. 62, № 1, p. 162–169.
5. Kurtz T. G. The optional sampling theorem for martingales indexed by directed sets. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 4, p. 675–681.
6. Washburn R., jr., Willsky A. Optional sampling for submartingales indexed by partially ordered sets. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 6, p. 957–970.
7. Hürzeler H. E. The optional sampling theorem for processes indexed by a partially ordered set. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 4, p. 1224–1235.
8. Grobler J. Doob's optional sampling theorem in Riesz spaces. — Positivity, 2011, v. 15, № 4, p. 617–637.
9. Ald R. A., de Korvin A., Roberts Ch. The optional sampling theorem for convex set valued martingales. — J. Reine Angew. Math., 1979, v. 310, p. 1–6.
10. Buckdahn R., Engelbert H. J. Randomized stopping times: Doob's optional sampling theorem and optimal stopping. — Math. Nachr., 1984, v. 115, p. 237–247.
11. Hu Y., Ma Y., Peng Sh., Yao S. Representation theorems for quadratic $\mathcal{F}$ -consistent nonlinear expectations. — Stochastic Process. Appl., 2008, v. 118, № 9, p. 1518–1551.
12. Coquio A. The optional stopping theorem for quantum martingales. — J. Funct. Anal., 2006, v. 238, № 1, p. 149–180.
13. Назарько О. В., Павлов И. В. Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией. — Вестн. РГУПС, 2012, т. 45, № 1, p. 201–208.

Поступила в редакцию
18.X.2013

© 2014 г.

САВИНОВ Е. А.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ ИТ-КОПУЛАМИ t -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Показано, что асимптотика максимума в треугольной схеме связанных ИТ-копулами Стьюдента случайных величин аналогична асимптотике в схеме серий случайных величин, связанных гауссовскими копулами. Ввиду этого при надлежащем выборе базиса и соответствующей системы проекций, порождающих указанную треугольную схему, имеет место сходимость к максимум-устойчивому двойному экспоненциальному закону.

Ключевые слова и фразы: копулы, преобразование независимости, треугольная схема, максимум-устойчивое распределение.

1. Введение. Изучается последовательность копул, полученных в результате преобразования независимости (independence transformation) случайных векторов, обладающих распределением Стьюдента с расширяющейся недиагональной матрицей точности. Для схемы серий случайных величин, связанных такими стьюдентовскими ИТ-копулами, установлены условия сходимости максимума в каждой серии

* Самарский государственный университет, Самара, Россия; e-mail: henrylee@dxdy.ru

к максимум-устойчивому распределению I типа (двойному экспоненциальному распределению). Заметим, что допредельные функции распределения максимумов случайных величин, связанных ИТ-копулами, имеют весьма сложную структуру даже в случае двумерных собственных проекций меры Коши. Отметим, что ранее в работе [1] был доказан усиленный закон больших чисел для квадратов гауссовских случайных величин, связанных ИТ-копулами устойчивых распределений, а в работах [2] и [3] были доказаны предельные теоремы для нормированных сумм в случае проекций меры Стьюдента и собственных проекций α -устойчивой меры.

Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировки основных результатов: $\mathbf{I} := [0, 1]$; $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{I}^n$; $\Phi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ — соответственно функция и плотность стандартного гауссовского распределения.

Рассмотрим на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P}\}$ случайный вектор $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(x_1, \dots, x_n)$. Введем семейство условных функций распределения

$$F_{i|1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$$

случайной величины X_i относительно системы случайных величин

$$X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n,$$

$\widehat{}$ — знак пропуска элемента. Будем рассматривать «двойственные» случайные величины

$$X_{i,n}^* = F_{i|1\dots i\dots n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n). \quad (1)$$

Говорят, что случайная величина $X_{i,n}^*$ получена в результате *преобразования независимости* случайной величины X_i . Термин *преобразование независимости* объясняется тем, что случайная величина $X_{i,n}^*$ оказывается стохастически независимой относительно системы $\{X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n\}$ (см. [4], [5]).

О п р е д е л е н и е 1. ИТ-копулой случайного вектора $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ с абсолютно непрерывным распределением будем называть функцию

$$\mathbf{C}_{\text{IT}}^{\mathbf{X}_n}(\mathbf{u}) = \mathbf{P}\{X_{1,n}^* \leq u_1, \dots, X_{n,n}^* \leq u_n\}.$$

2. Формулировка основных результатов. Пусть, задано измеримое пространство $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, борелевской σ -алгеброй и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Будем рассматривать на нем счетно-аддитивную меру Стьюдента μ с r степенями свободы и характеристическим функционалом

$$\Psi_\mu(y) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2}\langle By, y \rangle\right\} g_r(t) dt, \quad y \in \mathbb{H}, \quad (2)$$

где B — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ и

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \quad t > 0.$$

Выберем $\{f_k\}$ — произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и будем рассматривать на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$ случайные величины $X_i = \langle \cdot, f_i \rangle$. Заметим, что случайные векторы $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ имеют распределения Стьюдента с характеристическими функциями

$$\psi_{1\dots n}(y_1, \dots, y_n) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \langle B f_i, f_j \rangle\right\} g_r(t) dt.$$

Обозначим $B_n = \pi_n B \pi_n$, где π_n — ортопроектор $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_n = \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

Введем числовые последовательности ($n \geq 2$)

$$\alpha_n = (2 \ln n)^{1/2}, \quad \beta_n = (2 \ln n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 \ln n)^{-1/2}(\ln \ln n + \ln(4\pi)).$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{X}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — семейство студентовских случайных векторов на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, определенное выше, а $F(x)$ — произвольная непрерывная строго монотонная функция распределения. Рассмотрим $\{X_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$, — схему серий случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathbf{P}_0\}$ и имеющих совместные функции распределения

$$\mathbf{P}_0\{X_1^{(n)} \leq x_1, \dots, X_n^{(n)} \leq x_n\} = C_{\text{IT}}^{\mathbf{X}_n}(F(x_1), \dots, F(x_n)).$$

Если базис $\{f_k\}$ таков, что

$$\sup_{n \geq 1} \max_{i \neq j} \left| \frac{\langle B_n^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle B_n^{-1} f_i, f_i \rangle \langle B_n^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} \right| < 1 \quad (3)$$

и для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$\max_{n^\alpha < j-i < n} \left| \frac{\langle B_n^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle B_n^{-1} f_i, f_i \rangle \langle B_n^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} \right| \ln n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

то для любого $x \in \mathbf{R}$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}_0 \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} X_i^{(n)} \leq F^{-1} \left[\Phi \left(\frac{x}{\alpha_n} + \beta_n \right) \right] \right\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

3. Вспомогательные результаты. В дополнение к уже введенному семейству ортопроекторов $\{\pi_n\}$ будем, следуя [1], рассматривать на $\mathbb{H}$ еще одно семейство ортопроекторов $\{\pi_{ni}\}$: для $h = \sum_{k=1}^\infty \langle h, f_k \rangle f_k$ определим

$$\pi_{ni} h := \sum_{k=1, k \neq i}^n \langle h, f_k \rangle f_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Аналогично [1] введем обозначения для следующих квадратичных форм:

$$\begin{aligned} s_n^2 &:= s_n^2(h) = \frac{1}{n} \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \rangle, \\ s_{n,i}^2 &:= s_{n,i}^2(h) = \frac{1}{n-1} \langle (\pi_{n,i} B \pi_{n,i})^{-1} \pi_{n,i} h, \pi_{n,i} h \rangle, \\ s_\infty^2 &:= s_\infty^2(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h), \end{aligned}$$

и пусть

$$\Gamma := \{h \in \mathbb{H}: 0 < s_\infty^2(h) < +\infty\}.$$

Обозначим через μ_2^B гауссовскую меру на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ с ковариационным оператором B . Также введем (не отмечая особо зависимость от r) обозначения

$$\eta := \frac{1}{s_\infty}, \quad (6)$$

$$\zeta_{i,n} := \zeta_{i,n}(h) = \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle}{s_\infty \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle^{1/2}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$A^{(n)} := \sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1, \quad B_i^{(n)} := \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1. \quad (8)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты, полученные в [1].

1°. (См. [1, доказательство леммы 4])

$$ns_n^2 - (n-1)s_{n,i}^2 = \zeta_{i,n}^2 s_\infty^2. \quad (9)$$

2°. (См. [1, лемма 7, п. 1]) μ -п.н.

$$s_n^2 \rightarrow s_\infty^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

3°. (См. [1, доказательство леммы 7]) для всех $s > 0$ $\mu_2^{s^2 B}$ -п.н.

$$s_n^2 \rightarrow s^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Следующая лемма слегка усиливает (10) и использует немного модифицированное доказательство леммы 4 работы [1].

Лемма 1. μ -п.н. при $n \rightarrow \infty$

$$\left| 1 - \frac{s_n^2}{s_\infty^2} \right| \ln n \rightarrow 0.$$

Доказательство. Как отмечено в [1],

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)},$$

где $\xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n)}(h) = \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} f_i, h \rangle$, $i = 1, 2, \dots$, — последовательность линейных функционалов, являющихся относительно гауссовской меры μ_2^B независимыми $(0, 1)$ -гауссовскими случайными величинами. Нетрудно показать, что таковыми же являются относительно меры Стюдента μ (нелинейные) функционалы $\xi_i^{(n)}/s_\infty$. Действительно, для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{R}$

$$\mu \left\{ \frac{\xi_1^{(n)}}{s_\infty} \leq u_1, \dots, \frac{\xi_n^{(n)}}{s_\infty} \leq u_n \right\} = \int_0^\infty \mu_2^{s^2 B} \left\{ \frac{\xi_1^{(n)}}{s_\infty} \leq u_1, \dots, \frac{\xi_n^{(n)}}{s_\infty} \leq u_n \right\} 2s g_r(s^2) ds.$$

Поскольку ввиду (11) выполнено равенство $\mu_2^{s^2 B} \{s_\infty = s\} = 1$, то

$$\mu \left\{ \frac{\xi_1^{(n)}}{s_\infty} \leq u_1, \dots, \frac{\xi_n^{(n)}}{s_\infty} \leq u_n \right\} = \mu_2^B \{ \xi_1^{(n)} \leq u_1, \dots, \xi_n^{(n)} \leq u_n \},$$

что и требовалось.

Теперь, используя признак сходимости почти наверное и неравенство Чебышёва, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left\{ \ln n \cdot \left| \frac{s_n^2}{s_\infty^2} - 1 \right| > \varepsilon \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left\{ \frac{\ln n}{n} \left| \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\xi_i^{(n)}}{s_\infty} \right)^2 - 1 \right] \right| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^4 n}{n^4} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\xi_i^{(n)}}{s_\infty} \right)^2 - 1 \right] \right)^4 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^4 n}{n^4} [60n + 12n(n-1)] < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. μ -п.н. при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\alpha_n \beta_n}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 \rightarrow 0, \\ 2) \quad & \alpha_n \beta_n \max_{1 \leq i \leq n} B_i^{(n)} \rightarrow 0, \\ 3) \quad & \alpha_n \beta_n A^{(n)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Заметим, что для $n \geq 2$

$$0 < \alpha_n \beta_n < 2 \ln n, \quad 1 < 2 \ln n, \quad (12)$$

поэтому достаточно показать, что имеет место следующая сходимость почти наверное:

$$\frac{\ln n}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 \rightarrow 0.$$

Относительно меры μ случайные величины $\zeta_{i,n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются (вообще говоря, зависимыми) $(0, 1)$ -гауссовскими (см. [2]). Воспользуемся признаком сходимости почти наверное. Для $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \mu \left\{ \frac{\ln n}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^n \mu \left\{ \zeta_{i,n}^2 > \frac{\varepsilon n}{\ln n} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon n / \ln n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/2} dt \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n \ln n}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\varepsilon n / \ln n}^{\infty} e^{-t/2} dt \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2n \ln n}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon n}{2 \ln n} \right\} < \infty. \end{aligned}$$

2) В силу равенства (9) имеем представление

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_n B_i^{(n)} &= \alpha_n \beta_n \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \\ &\quad + \alpha_n \beta_n \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Благодаря (10) имеет место следующая сходимость: μ -п.н.

$$\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Используя неравенство Бернулли $\sqrt{1+\alpha} \leq 1+\alpha$ ($\alpha \geq -1/2$), с учетом (12) для $n \geq 2$ находим, что

$$\alpha_n \beta_n \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \leq \frac{\alpha_n \beta_n \zeta_{i,n}^2 / 2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2},$$

откуда, благодаря (9),

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_n \beta_n \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right) &\leq \frac{\alpha_n \beta_n \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 / 2}{(n-1) \min_{1 \leq i \leq n} s_{n,i}^2/s_\infty^2} \\ &= \frac{\alpha_n \beta_n \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 / 2}{n(s_n^2/s_\infty^2 - n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (15)$$

в силу п. 1) и (10). Снова используя неравенство Бернулли, получим

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_n \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right) &= \alpha_n \beta_n \left(\sqrt{1 + \frac{n(1-s_n^2/s_\infty^2) + r(1-\eta^2) - 1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \\ &\leq \frac{\alpha_n \beta_n}{2} \left(\frac{n(1-s_n^2/s_\infty^2) + r(1-\eta^2) - 1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2} \right), \end{aligned}$$

и для μ -п.н. сходимости

$$\alpha_n \beta_n \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

ввиду (12) достаточно μ -п.н. сходимости

$$\left| 1 - \frac{s_n^2}{s_\infty^2} \right| \ln n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

которая установлена в лемме 1. Из (13)–(16) следует утверждение данного пункта.

3) Имеем:

$$\alpha_n \beta_n A^{(n)} = \alpha_n \beta_n \left(\sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right),$$

и доказательство сходимости к нулю полностью аналогично доказательству (16).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Следующие соотношения справедливы μ -п.н.:

$$\begin{aligned} 1) \quad & A^{(n)} + 1 \leq \frac{\Phi^{-1}(X_{i,n}^*)}{\zeta_{i,n}} \leq B_i^{(n)} + 1; \\ 2) \quad & \inf_n \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\Phi^{-1}(X_{i,n}^*)}{\zeta_{i,n}} > 0; \\ 3) \quad & \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\Phi^{-1}(X_{i,n}^*)}{\zeta_{i,n}} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. 1) Из формулы для условной функции многомерного распределения Стюдента, полученной в работе [6], следует, что

$$\begin{aligned} & F_{i|1\dots i\dots n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} B\left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2 + r}{ns_n^2 + r}; \frac{n+r-1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle \geq 0, \\ \frac{1}{2} B\left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2 + r}{ns_n^2 + r}; \frac{n+r-1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где $B(\cdot; \alpha, \beta)$ — бета-распределение.

Воспользуемся известной оценкой (см. [7]) для бета-распределений ($u > 0$):

$$1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{u}}\right) \leq \frac{1}{2} B\left(\frac{nu}{1+nu}; \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \leq 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n-1/2}{1+nu}}\right). \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) с учетом обозначений (1), (6), (7) и (8) получим (17).

2) Имеем:

$$\begin{aligned} A^{(n)} + 1 &= \sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \geq \sqrt{\frac{n/2}{n(r\eta^2 + s_n^2/s_\infty^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(r\eta^2 + s_n^2/s_\infty^2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2(r\eta^2 + \kappa^2)}} > 0, \end{aligned}$$

где $\kappa^2 := \sup_{n \geq 1} s_n^2/s_\infty^2 < \infty$ μ -п.н. ввиду (10). Ввиду оценки (17) утверждение доказано.

3) Из леммы 2 (пп. 2) и 3)) следует, что $A^{(n)} \rightarrow 0$, $\max_{1 \leq i \leq n} B_i^{(n)} \rightarrow 0$ μ -п.н. Ввиду оценки (17) утверждение доказано.

Лемма 3 доказана.

Для конечного набора действительных чисел $\{a_1, \dots, a_n\}$ обозначим

$$a_* := \min_{1 \leq i \leq n} a_i, \quad a^* := \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

Следующее очевидное утверждение приводится без доказательства.

Лемма 4. Пусть конечный набор действительных чисел $\{a_1, \dots, a_n\}$ таков, что $a_* \geq 0$, а набор $\{b_1, \dots, b_n\}$ — произвольный. Тогда

$$\left(a_* \mathbf{1}_{\{b^* \geq 0\}} + a^* \mathbf{1}_{\{b^* < 0\}}\right) b^* \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i b_i \leq \left(a^* \mathbf{1}_{\{b^* \geq 0\}} + a_* \mathbf{1}_{\{b^* < 0\}}\right) b^*. \quad (20)$$

Перейдем теперь к вспомогательным результатам, позволяющим установить утверждение приводимой ниже леммы 7, касающееся асимптотики максимума в схеме серий совместно гауссовских случайных величин. Теория экстремальных значений для нормальных последовательностей достаточно хорошо развита (см., например, [8]), и указанные ниже результаты являются лишь слегка адаптированными для нормальной схемы серий (ввиду этого они приводятся без доказательств). Именно, лемма 5 (как и лемма 4.3.1 в [8]) использует полученную в *нормальной лемме сравнения* (см. [8, теорема 4.2.1]) оценку разности нормальных функций распределения для установления условий сходимости экстремальной функции распределения. Лемма 6 является аналогом леммы Бермана (см. [8, теорема 4.3.2]) для стационарных нормальных последовательностей и устанавливает для треугольной схемы произвольных совместно нормальных случайных величин простые достаточные условия выполнения леммы 5.

Пусть задана треугольная схема $(0, 1)$ -гауссовских случайных величин $\{\xi_{i,n}, i = 1, 2, \dots, n\}_{n=1}^\infty$, причем случайные величины в каждой строке имеют совместное гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $C^{(n)} = (c_{ij}^{(n)})$. Обозначим $M_n^* := \max_{1 \leq i \leq n} \xi_{i,n}$.

Лемма 5. Пусть ковариации $c_{ij}^{(n)}$ удовлетворяют следующему условию: $\delta_n := \max_{i \neq j} |c_{ij}^{(n)}| < 1$. Пусть также $u_n \rightarrow \infty$ — числовая последовательность такая, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \delta_n^2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |c_{ij}^{(n)}| \exp \left\{ - \frac{u_n^2}{1 + |c_{ij}^{(n)}|} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда, если $0 \leq \tau \leq \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{M_n^* \leq u_n\} \rightarrow e^{-\tau} \Leftrightarrow n(1 - \Phi(u_n)) \rightarrow \tau.$$

Лемма 6. Пусть выполнены следующие условия:

(i) справедливо неравенство

$$\sup_{n \geq 1} \max_{i \neq j} |c_{ij}^{(n)}| = \delta < 1;$$

(ii) для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$\delta_{n,\alpha}^* \ln n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\delta_{n,\alpha}^* = \max_{n^\alpha < j-i < n} |c_{ij}^{(n)}|$;

(iii) числовая последовательность $u_n \rightarrow \infty$ такова, что последовательность $n(1 - \Phi(u_n))$ ограничена.

Тогда

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |c_{ij}^{(n)}| \exp \left(- \frac{u_n^2}{1 + |c_{ij}^{(n)}|} \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Лемма 7. Пусть задана треугольная схема $(0, 1)$ -гауссовских случайных величин $\{\xi_{i,n}, i = 1, 2, \dots, n\}_{n=1}^{\infty}$, причем случайные величины в каждой строке имеют совместное гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $C^{(n)} = (c_{ij}^{(n)})$.

Если

$$\sup_{n \geq 1} \max_{i \neq j} |c_{ij}^{(n)}| = \delta < 1, \quad (22)$$

а для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$\delta_{n,\alpha}^* \ln n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\delta_{n,\alpha}^* = \max_{n^\alpha < j-i < n} |c_{ij}^{(n)}|$, то

$$\mu\{\alpha_n(M_n^* - \beta_n) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях леммы имеет место импликация

$$n(1 - \Phi(u_n)) \rightarrow \tau \Rightarrow \mathbf{P}\{M_n^* \leq u_n\} \rightarrow e^{-\tau} \quad (23)$$

(для $0 \leq \tau \leq \infty$ при $n \rightarrow \infty$). Пусть выполняется левая часть импликации (23). Тогда выполнены условия леммы 6, т.е. имеет место сходимости (21). Ввиду (21) и (22) выполнены условия леммы 5, откуда следует правая часть соотношения (23).

Положим $u_n := x/\alpha_n + \beta_n$. Ввиду теоремы о сходимости максимума (обозначим его $\widehat{M}_n$) последовательности независимых гауссовских случайных величин [8, теорема 1.5.3] имеет место сходимости $\mathbf{P}\{\widehat{M}_n \leq u_n\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}$. Отсюда (см. [8, теорема 1.5.1]) следует, что $n(1 - \Phi(u_n)) \rightarrow e^{-x}$. И импликация (23) доказывает утверждение леммы 7.

4. Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что вероятностное пространство $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathbf{P}_0\}$ есть $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$ и

$$X_i^{(n)} = F^{-1}(X_{i,n}^*). \quad (24)$$

Обозначим

$$\widetilde{X}_i^{(n)} := \Phi^{-1}(X_{i,n}^*), \quad M_n := \max_{1 \leq i \leq n} \widetilde{X}_i^{(n)}. \quad (25)$$

Имея в виду использование леммы 4, введем также обозначения

$$\begin{aligned} a_i(n) &:= \frac{\widetilde{X}_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad b_i(n) := \zeta_{i,n}, \\ a_*(n) &:= \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\widetilde{X}_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad a^*(n) := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\widetilde{X}_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad b^*(n) := \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}, \\ d(n) &:= a_*(n) \mathbf{1}_{\{b^*(n) \geq 0\}} + a^*(n) \mathbf{1}_{\{b^*(n) < 0\}}, \\ e(n) &:= a^*(n) \mathbf{1}_{\{b^*(n) \geq 0\}} + a_*(n) \mathbf{1}_{\{b^*(n) < 0\}}. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 (п. 2)) μ -п.н. выполнено неравенство $a_*(n) > 0$ и по лемме 4

$$d(n)b^*(n) \leq M_n \leq e(n)b^*(n) \quad \mu\text{-п.н.},$$

откуда следует, что μ -п.н.

$$\alpha_n[d(n)b^*(n) - \beta_n] \leq \alpha_n(M_n - \beta_n) \leq \alpha_n[e(n)b^*(n) - \beta_n]. \quad (26)$$

Заметим, что в силу леммы 3 (п. 3)) μ -п.н. $a_*(n) \rightarrow 1$, $a^*(n) \rightarrow 1$, поэтому ввиду

$$a_*(n) \leq d(n) \leq a^*(n), \quad a_*(n) \leq e(n) \leq a^*(n)$$

имеем

$$d(n) \rightarrow 1, \quad e(n) \rightarrow 1 \quad \mu\text{-п.н.} \quad (27)$$

Рассмотрим левую часть неравенства (26):

$$\alpha_n[d(n)b^*(n) - \beta_n] = d(n)\alpha_n[b^*(n) - \beta_n] + \alpha_n\beta_n[d(n) - 1]. \quad (28)$$

Как показано в [2], случайные величины $\zeta_{i,n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются совместно гауссовскими с ковариациями

$$c_{ij}^{(n)} := \text{cov}(\zeta_{i,n}, \zeta_{j,n}) = \frac{\langle B_n^{-1}f_i, f_j \rangle}{[\langle B_n^{-1}f_i, f_i \rangle \langle B_n^{-1}f_j, f_j \rangle]^{1/2}}.$$

Поэтому в силу (27) и леммы 7 для всех $x \in \mathbf{R}$

$$\mu\{d(n)\alpha_n[b^*(n) - \beta_n] \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}. \quad (29)$$

Воспользуемся леммой 3 (п. 1)). Замечая, что для $n \geq 2$

$$\alpha_n\beta_n = 2 \ln n - \frac{1}{2}(\ln \ln n + \ln(4\pi)) > 0,$$

получаем, что при $n \geq 2$ следующие неравенства выполнены μ -п.н.:

$$\begin{aligned} \alpha_n\beta_n A^{(n)} &\leq \alpha_n\beta_n[a_*(n) - 1] \\ &\leq \alpha_n\beta_n[d(n) - 1] \leq \alpha_n\beta_n[a^*(n) - 1] \\ &\leq \alpha_n\beta_n \max_{1 \leq i \leq n} B_i^{(n)}. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 (пп. 2) и 3)) μ -п.н. $\alpha_n\beta_n[d(n) - 1] \rightarrow 0$, откуда с учетом (28) и (29)

$$\mu\{d(n)\alpha_n[b^*(n) - \beta_n] \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}.$$

Полностью аналогично доказывается сходимость правой части в (26), откуда с учетом (24) и (25) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шатский С. Я. Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 292–312.
2. Савинов Е. А. Предельная теорема для копул преобразований независимости t -распределения Стьюдента. — Вестн. СамГУ, 2011, т. 89, № 8, с. 69–85.
3. Савинов Е. А., Шатский С. Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями проекций устойчивой меры на гильбертовом пространстве. — Вестн. СамГУ, 2007, № 9/1, с. 121–127.
4. Rosenblatt M. Remarks on multivariate transformation. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 470–472.
5. Шатский С. Я. Об одном варианте преобразования независимости. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 815–816.
6. Шатский С. Я., Кнутова Е. М. Воспроизводимость условных квантилей многомерного распределения Стьюдента. — Изв. РАЕН. Сер. МММИУ, 1997, т. 1, № 1, с. 36–58.
7. Shatskih S. Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution on Hilbert space. — J. Math. Sci. (N. Y.), 1999, v. 93, № 4, p. 574–581.
8. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 392 с.

Поступила в редакцию
25.X.2013