Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Локальные теоремы восстановления при отсутствии математического ожидания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 468–498

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:00:54

© 2014 г.

НАГАЕВ С. В.*

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ¹⁾

Изучается асимптотическое поведение локальных вероятностей восстановления в случае, когда сужение распределения $F(x)$ шага в случайном блуждании является смесью геометрических распределений, причем $F(x)$ не имеет математического ожидания. В отличие от предшествующих работ, в рассматриваемом случае $F(x)$, вообще говоря, не притягивается к устойчивому закону. В доказательстве используется метод, основанный на продолжении характеристической функции распределения $F(x)$ в правую полуплоскость с последующим изменением контура интегрирования в формуле обращения. Окончательный вывод состоит в том, что локальная вероятность восстановления ведет себя асимптотически, как некоторая вполне монотонная последовательность, для которой дается явное выражение.

Ключевые слова и фразы: вполне монотонная функция, интеграл типа Коши, математическое ожидание, смесь геометрических распределений, теоремы восстановления, условие Липшица.

1. Введение. Формулировка основных результатов. Пусть X — случайная величина, принимающая целые значения с вероятностями $p_n = \mathbf{P}(X = n)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Положим $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$, $k \geq 1$, $S_0 = 0$, где X_j — независимые случайные величины, совпадающие по распределению с X . Обозначим $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$. Пусть $u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = n)$ — среднее время пребывания случайного блуждания $\{S_k\}_1^{\infty}$ в состоянии n , $n > 0$. Если X принимает только неотрицательные значения, то случайные величины X_j интерпретируются как промежутки времени между последовательными восстановлениями, а u_n для $n > 0$ — как вероятность восстановления в момент времени n . Заметим, что в случае $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ восстановление может происходить мгновенно.

Как известно (например, [1, гл. XI]), для возвратного блуждания

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

если X не имеет математического ожидания.

*Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00238-а).

Сам по себе факт сходимости u_n к нулю не слишком информативен. Поэтому возникает потребность в оценках скорости сходимости и асимптотических формулах для u_n в зависимости от индивидуальных свойств распределения $F(x)$. На эту тему пока написано не так много работ (см. [2]–[6]). Во всех перечисленных работах предполагается, что $1 - F(x) \sim l(x)x^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, при $x \rightarrow \infty$, где $l(x)$ — медленно меняющаяся функция. Знак эквивалентности $a(x) \sim b(x)$ для $x \rightarrow x_0$ здесь и в дальнейшем означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} (a(x)/b(x)) = 1$. Крайний случай $\alpha = 0$ рассматривается в [6], в остальных работах рассматриваются $\alpha > 0$: $1/2 < \alpha < 1$ в [3], [4] и $0 < \alpha < 1$ в [5]. В [4] для X допускаются отрицательные значения. В связи с этим накладывается дополнительное условие $F(-x) \sim l(x)x^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. $F(x)$ притягивается к устойчивому закону с показателем α . Настоящая работа выходит за эти рамки, а именно, мы предполагаем, что сужение распределения $F(x)$ на неотрицательную полуось равно $\beta G(x)$, $0 < \beta \leq 1$, где $G(x)$ — смесь геометрических распределений. Заметим, что $G(x)$, вообще говоря, не принадлежит области притяжения устойчивого закона.

Приступим теперь к описанию полученных в этом направлении результатов. Сначала рассмотрим случай $\beta = 1$, т.е. случай, когда X принимает только неотрицательные значения.

Итак, пусть $F(x) = G(x)$, где функция распределения $G(x)$, сосредоточенная на решетке неотрицательных целых чисел, задается набором вероятностей

$$g_n = G(n+) - G(n) = \int_0^1 (1-u)u^n p(u) du, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где $p(u) \geq 0$ и $\int_0^1 p(u) du = 1$. Очевидно, $G(x)$ является смесью геометрических распределений. Замена переменной $u = e^{-t}$ приводит к формуле

$$g_n = \int_0^\infty e^{-(n+1)t} (1 - e^{-t}) p(e^{-t}) dt. \quad (1.2)$$

Таким образом, вероятности g_n суть значения в целых точках некоторой вполне монотонной функции (см. по этому поводу, например, [1, гл. XIII, §4]). Можно показать, что распределение $G(x)$ является субэкспоненциальным, если носитель $p(u)$ не отделен от единицы.

Введем обозначение $g(z) = \sum_{n=0}^\infty g_n z^n$. Нетрудно видеть, что

$$g(z) = \int_0^1 \frac{1-u}{1-zu} p(u) du. \quad (1.3)$$

Делая замену переменной $u = 1/y$, имеем

$$g(z) = \int_1^\infty \frac{y-1}{(y-z)y^2} p(y^{-1}) dy. \quad (1.4)$$

Таким образом, $g(z)$ допускает представление в виде интеграла типа Коши.

Нетрудно видеть, что

$$1 - g(z) = (1 - z) \int_0^1 \frac{up(u)}{1 - zu} du. \quad (1.5)$$

Точно так же, как (1.4), выводится формула

$$I(z) := \int_0^1 \frac{up(u)}{1 - zu} du = \int_1^\infty \frac{p(y^{-1})}{y^2(y - z)} dy. \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы будем всюду предполагать, не оговаривая это специально, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ функция $p(u)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, 1 - \varepsilon]$:

$$|p(u_1) - p(u_2)| < K(\varepsilon)|u_1 - u_2|^\mu, \quad 0 \leq u_i \leq 1 - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad (1.7)$$

где $0 < \mu \leq 1$, $K(\varepsilon)$ — некоторая постоянная, зависящая от ε . Кроме того, будем считать, что $p(u)$ положительна на некотором интервале $(a_0, 1]$, $0 \leq a_0 < 1$, и тождественно равна 0 на $[0, a_0]$. Заметим, что $g(z)$ аналитична всюду, за исключением отрезка $[1, a_0^{-1}]$, где $a_0^{-1} = \infty$ при $a_0 = 0$.

Положим

$$P(u) = \begin{cases} \int_u^1 p(x) dx, & u \leq 1, \\ 0, & u > 1. \end{cases}$$

Сформулируем в терминах $P(u)$ два условия, которые участвуют в формулируемой ниже теореме 1:

$$\int_0^1 \frac{dv}{P(v)} < \infty, \quad (1.8)$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \downarrow 0} t \int_{1-\varepsilon}^{1-t} \frac{dv}{(1-v)(P(v) - P(v+t))} = 0. \quad (1.9)$$

Заметим, что условия (1.8) и (1.9) выполняются, например, если

$$p(u) > c(1 - u)^{-\gamma}, \quad a_0 < u < 1,$$

где $c > 0$ и $0 < \gamma < 1$ — некоторые постоянные.

Действительно, в данном случае

$$P(v) - P(v+t) > c \int_v^{v+t} (1-u)^{-\gamma} du > ct(1-\gamma)^{-\gamma}$$

и, следовательно,

$$t \int_{1-\varepsilon}^{1-t} \frac{dv}{(1-v)(P(v) - P(v+t))} < c^{-1} \int_{1-\varepsilon}^{1-t} (1-u)^{\gamma-1} du.$$

Отсюда без труда выводится соотношение (1.9). Что касается условия (1.8), то последнее следует из оценки

$$P(v) > \frac{c}{1-\gamma} (1-v)^{1-\gamma}.$$

Для любого $x \geq 1$ положим

$$A(x) = \int_1^{2x-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - x^{-2}p(x^{-1})}{y-x} dy + \int_{2x-1}^{\infty} \frac{p(y^{-1})}{y^2(y-x)} dy, \quad (1.10)$$

$$I_{\pm}(x) = A(x) \pm \pi i x^{-2} p(x^{-1}). \quad (1.11)$$

В п. 2 мы доказываем, что для любого действительного $x > 0$

$$\lim_{z \uparrow x} I(z) = I_+(x), \quad \lim_{z \downarrow x} I(z) = I_-(x). \quad (1.12)$$

Символ $\uparrow$ означает здесь, что $z \rightarrow x$ так, что $\operatorname{Im} z \uparrow 0$, $\operatorname{Re} z = x$. Аналогично определяется символ $\downarrow$. Из (1.5), (1.6), (1.12) следует, что

$$\lim_{z \uparrow x} (1 - g(z)) = (1 - x)I_+(x), \quad \lim_{z \downarrow x} (1 - g(z)) = (1 - x)I_-(x). \quad (1.13)$$

Теорема 1. Пусть $F(x)$ является смесью геометрических распределений. Предположим, что плотность $p(u)$ в представлении (1.1) удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9). Тогда для любого $n \geq 0$

$$u_n = \int_1^{a_0^{-1}} \frac{p(x^{-1})x^{-n-3}}{|I_+(x)|^2(x-1)} dx. \quad (1.14)$$

После обратной замены переменной $x = 1/u$ мы получаем представление

$$u_n = \int_{a_0}^1 \frac{u^{n+2}p(u)}{|I_+(u^{-1})|^2(1-u)} du. \quad (1.15)$$

Мы видим, что вероятность u_n является смесью геометрических вероятностей со смешивающей мерой, которая определяется функцией

$$Q(x) = \int_0^x \frac{u^2 p(u)}{(1-u)^2 |I_+(u^{-1})|^2} du.$$

Что касается асимптотики u_n при $n \rightarrow \infty$, то она определяется поведением $p(u)$ в сколь угодно малой окрестности 1.

Нетрудно видеть, что

$$Q(1) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{1}{1 - g(1)} = \infty.$$

Таким образом, $Q(x)$ определяет σ -конечную меру. Делая замену переменной $x = e^t$, мы можем записать формулу (1.14) в виде

$$u_n = \int_0^{\infty} e^{-(n+2)t} q(t) dt, \quad (1.16)$$

где

$$q(t) = \frac{p(e^{-t})}{|I_+(e^t)|^2(e^t - 1)}.$$

Таким образом, вероятности u_n являются значениями в целых точках некоторой вполне монотонной функции. Из (1.16) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Поэтому мы можем утверждать, что $\mathbf{E} X = \infty$. Впрочем, этот факт можно установить непосредственно, опираясь только на условие (1.8). Действительно,

$$\mathbf{E} X = g'(1) = \int_0^1 \frac{up(u)}{1 - u} du. \quad (1.17)$$

Далее,

$$\int_u^1 \frac{dv}{P(v)} > \frac{1 - u}{P(u)}.$$

Отсюда следует, что

$$P(u) > \frac{1 - u}{\varepsilon(u)}, \quad (1.18)$$

где $\varepsilon(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 1$.

С другой стороны,

$$\int_0^1 \frac{up(u)}{1 - u} du = \lim_{a \uparrow 1} \int_0^1 \frac{up(u)}{1 - au} du. \quad (1.19)$$

Интегрируя по частям, имеем с учетом оценки (1.18)

$$\int_0^1 \frac{up(u)}{1 - au} du = \int_0^1 \frac{P(u)}{(1 - au)^2} du > \int_0^1 \frac{1 - u}{\varepsilon(u)(1 - au)^2} du \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

при $a \rightarrow 1$.

Из (1.17), (1.19), (1.20) следует, что при условии (1.8)

$$\mathbf{E} X = \infty. \quad (1.21)$$

Перейдем теперь к случаю, когда X может принимать значения разных знаков. Нам понадобятся следующие условия: *существует постоянная $\eta_0 > 0$ такая, что*

$$P(v) - P(v+t) > \eta_0 p(v)t, \quad t > 0, \quad (1.22)$$

причем

$$\lim_{v \uparrow 1} p(v) = \infty \quad (1.23)$$

и

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1-v)p(v)} < \infty. \quad (1.24)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.22)–(1.24) и $F(x) = \beta G(x) + (1-\beta)V(x)$, $0 < \beta < 1$, где $G(x)$ является смесью геометрических распределений, $V(x)$ сосредоточено на решетке отрицательных целых чисел и $m = -\int_{-\infty}^0 x dV(x) < \infty$. Тогда существует $R_0 > 1$ такое, что для $1 < R \leq R_0$

$$u_n \sim \beta \int_1^R \frac{x^{-n-3} p(x^{-1})}{(x-1)|\beta I_+(x) + (1-\beta)w(x)|^2} dx, \quad (1.25)$$

где

$$w(z) = \frac{v(z)-1}{z-1}, \quad v(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} v_k z^k, \quad v_k = V(k+) - V(k).$$

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Если $y^{-1} < 1 - \varepsilon$, $s^{-1} < 1 - \varepsilon$, то

$$|y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})| < K(\varepsilon) \frac{|s-y|^\mu}{y^2(sy)^\mu} + \frac{|s^2-y^2|}{(sy)^2} p(s^{-1}). \quad (2.1)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1}) = y^{-2}(p(y^{-1}) - p(s^{-1})) + (y^{-2} - s^{-2})p(s^{-1}).$$

Согласно условию (1.7)

$$|p(y^{-1}) - p(s^{-1})| < K(\varepsilon) \frac{|s-y|^\mu}{(sy)^\mu}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть предыдущего тождества, мы получаем желаемый результат.

Лемма 2. При $s = \operatorname{Re} z > \max(t + 2, 3)$, $t = \operatorname{Im} z$

$$-\operatorname{Re} I(z) > \frac{1}{2(s-1)} \int_{1/2}^1 p(u) du - 2 \int_0^{s^{-1}} p(u) du - \frac{6K(2^{-1})}{\mu(s-1)^{2(1+\mu)}}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Очевидно, что при $\operatorname{Im} y = 0$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{y-z} = \frac{y-s}{(y-s)^2 + t^2}. \quad (2.3)$$

Отсюда, учитывая, что $p(u) \equiv 0$ для $u > 1$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I(z) &= \left(\int_{s-y>1} + \int_{|s-y|\leq 1} + \int_{y-s>1} \right) \frac{(y-s)y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &\equiv \sum_{i=1}^3 J_i(s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $1 \leq y \leq 2$, $s > 2 + t$

$$\frac{s-y}{(y-s)^2 + t^2} = \frac{1}{(s-y)(1 + (t/(y-s))^2)} > \frac{1}{2(s-1)}.$$

С другой стороны, при $s > 3$ из условия $y \leq 2$ следует, что $s - y > 1$. Таким образом, из условия $s > \max(t + 2, 3)$ следует, что

$$-J_1(s) > \frac{1}{2(s-1)} \int_1^2 \frac{p(y^{-1})}{y^2} dy = \frac{1}{2(s-1)} \int_{1/2}^1 p(u) du. \quad (2.5)$$

Далее, если $y - s > 1$, то

$$\frac{y-s}{(y-s)^2 + t^2} < \frac{1}{y-s} < 1.$$

Отсюда

$$0 < J_3(s) < \int_{y>s+1} y^{-2}p(y^{-1}) dy = \int_{u<1/(s+1)} p(u) du. \quad (2.6)$$

Осталось оценить $J_2(s)$. С этой целью мы воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} J_2(s) &= \int_{|y-s|<1} \frac{(y-s)[y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})]}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &\quad + s^{-2}p(s^{-1}) \int_{|y-s|<1} \frac{y-s}{(y-s)^2 + t^2} dy \equiv J_2^1(s) + J_2^2(s). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, что $J_2^2(s) = 0$. Таким образом, достаточно оценить $J_2^1(s)$.

Заметим, что $s^{-1} < 3^{-1}$, если выполнено условие леммы 2. Кроме того, $y^{-1} < 2^{-1}$, если $y - s > -1$. Это дает возможность применить лемму 1. В результате получаем оценку

$$\begin{aligned} |J_2^1(s)| &< \int_{|y-s|<1} \frac{|y-s||y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})|}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &< \int_{|y-s|<1} \frac{|y-s|}{(y-s)^2 + t^2} \left(K(2^{-1}) \frac{|s-y|^\mu}{y^2(sy)^\mu} + \frac{|s^2-y^2|}{(sy)^2} p(s^{-1}) \right) dy \\ &= \frac{K(2^{-1})}{s^\mu} \int_{|y-s|<1} \frac{|y-s|^{\mu+1}}{y^{2+\mu}((y-s)^2 + t^2)} dy \\ &\quad + \frac{p(s^{-1})}{s^2} \int_{|y-s|<1} \frac{|y-s|^2(y+s)}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy. \end{aligned}$$

Условие $|y-s| < 1$ влечет за собой неравенство $s-1 < y$. Отсюда

$$\frac{y+s}{y^2} = \frac{1}{y} + \frac{s}{y^2} < \frac{1}{s-1} + \frac{s}{(s-1)^2} = \frac{2s-1}{(s-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{|y-s|<1} \frac{|y-s|^2(y+s)}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy < \frac{4s}{(s-1)^2}.$$

Далее,

$$(s-1)^{2+\mu} \int_{|y-s|<1} \frac{|y-s|^{\mu+1}}{y^{2+\mu}((y-s)^2 + t^2)} dy < \int_{|u|<1} \frac{|u|^{\mu+1}}{u^2 + t^2} du.$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$|J_2^1(s)| < \frac{2K(2^{-1})}{\mu s^\mu (s-1)^{2+\mu}} + \frac{4p(s^{-1})}{s(s-1)^2}. \quad (2.8)$$

Очевидно, что

$$xp(x) < \int_0^x p(y) dy + \int_0^x |p(y) - p(x)| dy.$$

Если $x \leq 1/2$, то

$$\int_0^x |p(y) - p(x)| dy < K(2^{-1}) \int_0^x (x-y)^\mu dy = K(2^{-1}) \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

В результате имеем

$$p(x) < \frac{1}{x} \int_0^x p(y) dy + K(2^{-1}) \frac{x^\mu}{\mu+1},$$

т.е.

$$s^{-1}p(s^{-1}) < \int_0^{s^{-1}} p(y) dy + \frac{K(2^{-1})}{\mu + 1} s^{-1-\mu}. \quad (2.9)$$

Из (2.7)–(2.9) следует, что

$$|J_2(s)| < 4(s-1)^{-2} \int_0^{s^{-1}} p(y) dy + \frac{6K(2^{-1})}{\mu} (s-1)^{-2(1+\mu)}. \quad (2.10)$$

Собирая оценки (2.5), (2.6), (2.10) и учитывая тождество (2.4), мы получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Для $s = \operatorname{Re} z > 2$, $t = \operatorname{Im} z > 0$

$$\operatorname{Im} I(z) > \frac{t}{(s-1)^2 + t^2} \int_{1/2}^1 p(u) du. \quad (2.11)$$

Доказательство. Очевидно, что при $\operatorname{Im} y = 0$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{y-z} = \frac{t}{(y-s)^2 + t^2}.$$

Отсюда при $s > 2$

$$\operatorname{Im} I(z) > t \int_1^2 \frac{p(y^{-1})}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy > \frac{t}{(s-1)^2 + t^2} \int_{1/2}^1 p(u) du,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_1^{2s-1} \frac{p(y^{-1})(y-s)}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy = \int_1^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{y-s} dy \quad (2.12)$$

равномерно по $s > 1 + \varepsilon$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_1^{2s-1} \frac{p(y^{-1})(y-s)}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy &= \int_1^{2s-1} \frac{(y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1}))(y-s)}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &+ s^{-2}p(s^{-1}) \int_1^{2s-1} \frac{y-s}{(y-s)^2 + t^2} dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_1^{2s-1} \frac{y-s}{(y-s)^2 + t^2} dy = 0. \quad (2.14)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Delta_s(t) &:= \int_1^{2s-1} \frac{(y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1}))(y-s)}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &\quad - \int_1^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{y-s} dy \\ &= t^2 \int_1^{2s-1} \frac{s^{-2}p(s^{-1}) - y^{-2}p(y^{-1})}{((y-s)^2 + t^2)(y-s)} dy.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Применяя лемму 1 и учитывая, что $(y+s)/y^2 < 2s$, имеем при $s > 1/(1-\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\left| \int_{1/(1-\varepsilon)}^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{((y-s)^2 + t^2)(y-s)} dy \right| &< \frac{K(\varepsilon)}{s^\mu} \int_{1/(1-\varepsilon)}^{2s-1} \frac{|s-y|^{\mu-1}}{y^{2+\mu}((y-s)^2 + t^2)} dy \\ &\quad + \frac{p(s^{-1})}{s^2} \int_{1/(1-\varepsilon)}^{2s-1} \frac{y+s}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy \\ &< \frac{K(\varepsilon)t^{\mu-2}}{s^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{\mu-1}}{1+u^2} du + \frac{2\pi p(s^{-1})}{s|t|}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что при $s > 1/(1-2\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\left| \int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{((y-s)^2 + t^2)(y-s)} dy \right| \\ < \frac{1}{\varepsilon} \max \left[\int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy, \frac{p(s^{-1})}{s^2} \int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{1}{(y-s)^2 + t^2} dy \right].\end{aligned}\quad (2.17)$$

Далее, при $s > 1/(1-2\varepsilon)$

$$\int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy < \varepsilon^{-2} \int_1^{1/(1-\varepsilon)} y^{-2}p(y^{-1}) dy = \varepsilon^{-2}P(1-\varepsilon).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $s-y > \varepsilon$, если $s > 1/(1-2\varepsilon)$, $y < 1/(1-\varepsilon)$. В результате получаем, что при $s > 1/(1-2\varepsilon)$

$$\left| \int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{((y-s)^2 + t^2)(y-s)} dy \right| < \varepsilon^{-3}P(1-\varepsilon) + \frac{\pi p(s^{-1})}{\varepsilon s^2|t|}. \quad (2.18)$$

Собирая оценки (2.15)–(2.18) и используя ограниченность $p(s^{-1})$ в области $s > 1+\varepsilon$, мы заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Delta_s(t) = 0 \quad (2.19)$$

равномерно относительно $s > 1+\varepsilon$.

Возвращаясь теперь к тождеству (2.13), мы получаем с помощью (2.14), (2.15), (2.19) желаемый результат.

Лемма 5. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} t \int_1^{2s-1} \frac{p(y^{-1})}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy = \pi s^{-2} p(s^{-1}) \quad (2.20)$$

равномерно по $s > 1 + \varepsilon$.

Доказательство. Нам понадобится тождество

$$\begin{aligned} & \int_1^{2s-1} \frac{p(y^{-1})}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy \\ &= \int_1^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy + \frac{p(s^{-1})}{s^2} \int_1^{2s-1} \frac{dy}{(y-s)^2 + t^2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/(1-\varepsilon)}^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy \right| &< \frac{K(\varepsilon)}{s^\mu} \int_1^{2s-1} \frac{|y-s|^\mu}{y^{2+\mu}((y-s)^2 + t^2)} dy \\ &+ \frac{p(s^{-1})}{s^2} \int_1^{2s-1} \frac{|y^2 - s^2|}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Очевидно, что

$$\int_1^{2s-1} \frac{|y-s|^\mu}{y^{2+\mu}((y-s)^2 + t^2)} dy < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\mu}{u^2 + t^2} du = t^{\mu-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\mu}{1 + u^2} du. \quad (2.23)$$

Далее, при $y > 1$, $s > 1$

$$\frac{y+s}{y^2} < 1 + s.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1+s} \int_1^{2s-1} \frac{|y^2 - s^2|}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy < \int_{1-s}^{s-1} \frac{|u|}{t^2 + u^2} du = \ln \left(\frac{(s-1)^2 + t^2}{t^2} \right). \quad (2.24)$$

Из (2.22)–(2.24) следует, что при $s > 1/(1-2\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/(1-\varepsilon)}^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy \right| &< K(\varepsilon) s^{-\mu} t^{\mu-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\mu}{1 + u^2} du \\ &+ (1+s) s^{-2} p(s^{-1}) \ln \left(\frac{(s-1)^2 + t^2}{t^2} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если $s > 1/(1 - 2\varepsilon)$, то

$$\int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{p(y^{-1})}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy < \varepsilon^{-2} P(1 - \varepsilon) \quad (2.26)$$

и

$$\int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{dy}{(y-s)^2 + t^2} < \int_1^{1/(1-\varepsilon)} \frac{dy}{(y-s)^2} < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Комбинируя (2.25)–(2.27), получаем, что при $s > 1/(1 - 2\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1}) - s^{-2}p(s^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy \right| &< K(\varepsilon)s^{-\mu}t^{\mu-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\mu}{1+u^2} du \\ &+ \left((1+s) \ln \left(\frac{(s-1)^2 + t^2}{t^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right) \frac{p(s^{-1})}{s^{-2}} + \varepsilon^{-2} P(1 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Нетрудно видеть, что при $t \downarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_1^{2s-1} \frac{dy}{(y-s)^2 + t^2} &= \int_{1-s}^{s-1} \frac{du}{u^2 + t^2} \\ &= \frac{2}{t} \int_0^{(s-1)/t} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{t} + O(1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

равномерно по $s > 1$.

Из (2.21), (2.28) и (2.29) следует утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть $z = s + it$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} I(s + it) &= A(s) + \pi i s^{-2} p(s), \\ \lim_{t \uparrow 0} I(s + it) &= A(s) - \pi i s^{-2} p(s^{-1}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

равномерно по $s, s > 1$.

Доказательство. Нетрудно показать, используя (1.6), что

$$\begin{aligned} I(s + it) &= \int_1^{2s-1} \frac{(y-s)p(y^{-1})}{y^2((y-s)^2 + t^2)} dy + it \int_1^{2s-1} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy \\ &+ \int_{2s-1}^{\infty} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{y-s-it} dy \equiv \sum_{i=1}^3 J_i(s, t). \end{aligned}$$

Нетрудно также видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} J_3(s, t) = \int_{2s-1}^{\infty} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{y-s} dy$$

равномерно относительно $s > 1 + \varepsilon$. В силу лемм 4 и 5 из приведенных соотношений следует желаемый результат.

Лемма 6. Для любых $s > 1 + t$, $t > 0$

$$\int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy > \frac{1}{2t^2} P(s, t), \quad (2.31)$$

где

$$P(s, t) \equiv \int_{s-t}^{s+t} y^{-2}p(y^{-1}) dy = P\left(\frac{1}{s+t}\right) - P\left(\frac{1}{s-t}\right). \quad (2.32)$$

Доказательство. В условиях леммы

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy &> \int_{s-t}^{s+t} \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy \\ &> \frac{1}{2t^2} \int_{s-t}^{s+t} y^{-2}p(y^{-1}) dy \equiv \frac{1}{2t^2} P(s, t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. Для любых $s > 1 + t$, $t > 0$, $\tau > 1$

$$\int_1^\tau \frac{ds}{|(s+it-1)I(s \pm it)|} < 4t \int_1^\tau \frac{ds}{(s+t-1)P(s, t)}. \quad (2.33)$$

Доказательство. По лемме 6

$$|I(s \pm it)| > |\operatorname{Im} I(s \pm it)| = t \int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy > (2t)^{-1} P(s, t).$$

Далее,

$$|s+it-1|^2 = (s-1)^2 + t^2 \geq 2^{-1}(s+t-1)^2. \quad (2.34)$$

Из двух последних неравенств следует (2.33).

Лемма 7. Если $1 - t/2 < s < 1 + t$, $0 < t < 1$, то

$$\int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy > \frac{P(1-t/4)}{2t^2}. \quad (2.35)$$

Доказательство. В условиях леммы при $1 \leq y < s+t$

$$\frac{1}{(y-s)^2+t^2} > \frac{1}{2t^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2+t^2} dy &> \frac{1}{2t^2} \int_1^{t+s} y^{-2}p(y^{-1}) dy > \frac{1}{2t^2} \int_1^{1+t/2} y^{-2}p(y^{-1}) dy \\ &= \frac{1}{2t^2} \int_{1/(1+t/2)}^1 p(y) dy > \frac{1}{2t^2} \int_{1-t/4}^1 p(y) dy \\ &= \frac{1}{2t^2} P\left(1 - \frac{t}{4}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если $1 - t/2 < s \leq 1 + t$, $0 < t < 1$, то

$$\left| \frac{1}{(1 - s \pm it)I(s \mp it)} \right| < \frac{4}{P(1 - t/4)}. \quad (2.36)$$

Доказательство. Так как

$$\operatorname{Im} I(z) = \operatorname{Im} \int_1^\infty \frac{p(y^{-1})}{y^2(y - z)} dy = t \int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{(y - s)^2 + t^2} dy,$$

то согласно лемме 7 при $t > 0$

$$\frac{1}{|\operatorname{Im} I(s \mp it)|} < \frac{2t}{P(1 - t/4)}.$$

Чтобы завершить доказательство, остается применить оценку (2.34).

Лемма 8. Если $s \leq 1 - t/2$, то

$$\int_1^\infty \frac{(y - s)y^{-2}p(y^{-1})}{(y - s)^2 + t^2} dy > 10^{-1}(1 - s)^{-1}P\left(\frac{1}{2 - s}\right). \quad (2.37)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{y - s}{(y - s)^2 + t^2} \geq \frac{1}{5(y - s)},$$

если $y - s \geq t/2$. Поэтому при $1 - s \geq t/2$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{(y - s)y^{-2}p(y^{-1})}{(y - s)^2 + t^2} dy &> \frac{1}{5} \int_1^\infty \frac{y^{-2}p(y^{-1})}{y - s} dy \\ &> \frac{1}{10(1 - s)} \int_1^{2-s} y^{-2}p(y^{-1}) dy = 10^{-1}(1 - s)^{-1}P\left(\frac{1}{2 - s}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. Если $s \leq 1 - t/2$, то

$$\left| \frac{1}{(1 - s \pm it)I^\pm(s \pm it)} \right| < \frac{10\sqrt{2}}{P(1/(2 - s))}. \quad (2.38)$$

Доказательство. В силу (1.6)

$$\operatorname{Re} I(s \pm it) = \int_1^\infty \frac{(y - s)y^{-2}p(y^{-1})}{(y - s)^2 + t^2} dy.$$

Отсюда согласно (2.37)

$$\frac{1}{|I(s \pm it)|} < \frac{10(1 - s)}{P(1/(2 - s))}.$$

Комбинируя эту оценку с (2.34), мы получим желаемый результат.

Лемма 9. Если $1 + t < \tau < \sqrt{2}$ и $0 < t < 1/2$, то

$$\int_{1+t}^{\tau} \left| \frac{1}{1 - g(s \pm it)} \right| ds < 4t \int_{(t+\tau)^{-1}}^{1-t} \frac{v^{-1} dv}{(1-v)(P(v) - P(v+t))}. \quad (2.39)$$

Доказательство. Согласно (1.5) и (1.6)

$$1 - g(s \pm it) = (1 - s \mp it)I(s \pm it).$$

Отсюда в силу следствия 2 при $\tau > 1 + t$

$$\int_{1+t}^{\tau} \left| \frac{1}{1 - g(s \pm it)} \right| ds < 4t \int_{1+t}^{\tau} \frac{ds}{(s+t-1)P(s,t)}, \quad (2.40)$$

где $P(s,t) = P(1/(s+t)) - P(1/(s-t))$. Произведем теперь замену переменной $s+t = 1/v$. Нетрудно видеть, что при $1+t < s < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{s-t} - \frac{1}{s+t} = \frac{2t}{s^2 - t^2} > t. \quad (2.41)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{s-t} > v+t.$$

Таким образом, при $1+t < s < \sqrt{2}$

$$P(s,t) > P(v) - P(v+t). \quad (2.42)$$

Далее, если $1+t < s < \tau$, то при $0 < t < 1/2$

$$(\tau+t)^{-1} < v < \frac{1}{1+2t} < 1-t. \quad (2.43)$$

Из (2.40), (2.42), (2.43) следует утверждение леммы.

Лемма 10. Если $a_0 > 0$, то при $\operatorname{Re} z \geq a_0^{-1}$

$$\operatorname{Re} I(z) < 0. \quad (2.44)$$

Доказательство. В силу (2.3)

$$\operatorname{Re} I(z) = \int_1^{a_0^{-1}} \frac{(y-s)y^{-2}p(y^{-1})}{(y-s)^2 + t^2} dy,$$

где $s = \operatorname{Re} z$, $t = \operatorname{Im} z$. Отсюда при $s \geq a_0^{-1}$

$$\operatorname{Re} I(z) < 0,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 1. В рассматриваемом случае для любого $r < 1$

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}}{1-g(z)} dz. \quad (3.1)$$

Очевидно, что $g(z) \rightarrow g(z_0)$ при $z \rightarrow z_0$ для любой точки на единичной окружности. В силу следствий 3, 4 и равенства (1.5)

$$\left| \frac{1}{1-g(z)} \right| < \begin{cases} \frac{4}{P(1-t/4)}, & \text{если } 1 - \frac{t}{2} < s < 1, \quad 0 < t < 1, \\ \frac{20}{P(1/(2-s))}, & \text{если } s < 1 - \frac{t}{2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $s = \operatorname{Re} z$, $t = |\operatorname{Im} z|$.

Условимся, что $-\pi \leq \arg z \leq \pi$. Пусть $r > 2/\sqrt{5}$. В этом случае окружность $|z| = r$ пересекается с прямой $s + t/2 = 1$ в двух точках $z_1(r)$ и $z_2(r)$. Будем считать, что

$$s_1(r) := \operatorname{Re} z_1(r) > s_2(r) := \operatorname{Re} z_2(r).$$

Пусть z_0 — любая точка на окружности $|z| = 1$ такая, что $0 < \arg z < \pi/2$. Обозначим $C(rz_0)$ дугу окружности $|z| = r$ с концами в точках rz_0 и $-rz_0$, не содержащую точку $z = r$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{C(rz_0)} \frac{z^{-n-1}}{1-g(z)} dz = \int_{C(z_0)} \frac{z^{-n-1}}{1-g(z)} dz. \quad (3.3)$$

Пусть $\arg z_0 > \arg z_1(r)$. Поскольку $dz = (-t/\sqrt{r^2 - t^2} + i) dt$ на окружности $|z| = r$, то вследствие (3.2) и (1.8)

$$\begin{aligned} \left| \int_{z_1(r)}^{rz_0} \frac{dz}{1-g(z)} \right| &< 4r \int_{t_1(r)}^{\operatorname{Im} z_0} \frac{dt}{P(1-t/4)\sqrt{r^2 - t^2}} \\ &< \frac{4}{\cos \varphi_0} \int_0^{\operatorname{Im} z_0} \frac{dt}{P(1-t/4)} < \infty, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $t_1(r) = \operatorname{Im} z_1$, $\varphi_0 = \arg z_0$.

Далее,

$$\left| \int_{C_1(r)} \frac{dz}{1-g(z)} \right| < 2r \arg z_1(r) \max_{z \in C_1(r)} \left| \frac{1}{1-g(z)} \right|,$$

где $C_1(r)$ — дуга окружности $|z| = r$, соединяющая точки $z_1(r)$ и $\bar{z}_1(r)$ и не содержащая $z = -1$. Нетрудно видеть, что $s_1(r)$ является большим корнем квадратного уравнения $5s^2 - 8s + 4 - r^2 = 0$, т.е. $s_1(r) = 0.8 + 0.2\sqrt{5r^2 - 4}$. Отсюда $1 - s_1(r) = 0.2(1 - \sqrt{5r^2 - 4})$.

Очевидно, что $s'_1(1) = 1$. Следовательно, $1 - s_1(r) = O(1 - r)$. Отсюда $\operatorname{Im} z_1(r) = 2(1 - s_1(r)) = O(1 - r)$. Это означает, что $\arg z_1(r) = O(1 - r)$. С другой стороны, согласно (3.2) для $z \in C_1(r)$

$$\left| \frac{1}{1 - g(z)} \right| < \frac{20}{P(1/(2 - r))}.$$

В результате с учетом (1.18) получаем, что при $r \uparrow 1$

$$\left| \int_{C_1(r)} \frac{dz}{1 - g(z)} \right| = o(1). \quad (3.5)$$

Из (3.3)–(3.5) следует, что функция $1/(1 - g(z))$ абсолютно интегрируема на единичной окружности и

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}}{1 - g(z)} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^{-n-1}}{1 - g(z)} dz.$$

Отсюда в силу (3.1) следует, что

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{-n-1} dz}{1 - g(z)}. \quad (3.6)$$

Пусть контур $C(\varepsilon, R)$, $R > 1$, состоит из дуги окружности $\{z: |z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| \leq \varepsilon\}$, отрезка прямой $\{z: \operatorname{Im} z = \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} < \operatorname{Re} z < \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\}$, дуги окружности $\{|z| = R > 1, |\arg z| \geq \arcsin(\varepsilon/R)\}$ и отрезка прямой $\{z: \operatorname{Im} z = -\varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} < \operatorname{Re} z < \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\}$.

Заменяя контур $|z| = 1$ в (3.6) на $C(\varepsilon, R)$, мы можем написать, что

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\varepsilon, R)} \frac{z^{-n-1}}{1 - g(z)} dz, \quad (3.7)$$

где контур $C(\varepsilon, R)$ проходится против часовой стрелки. Согласно (1.13) и следствию 1 существует

$$\lim_{z \downarrow s} g(z) = g^+(s) = 1 + (s - 1)I_+(s), \quad (3.8)$$

причем сходимость равномерна по $s > 1 + \varepsilon$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$. Аналогично,

$$\lim_{z \uparrow s} g(z) = g^-(s) = 1 + (s - 1)I_-(s). \quad (3.9)$$

Пусть $a_0 = 0$. Тогда в силу леммы 2

$$-A(s) > \frac{1}{4(s - 1)} \int_{1/2}^1 p(y) dy > 0$$

для достаточно больших $s > s_0$. С другой стороны, $\inf_{1+\varepsilon < s \leq s_0} p(s^{-1}) > 0$. Следовательно,

$$\sup_{s > 1+\varepsilon} |1 - g^+(s)| > 0.$$

В результате, комбинируя (1.5) и следствие 1, получаем, что равномерно относительно $s > 1 + \varepsilon$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{1 - g(s + it)} = \frac{1}{1 - g^+(s)} = \frac{1}{A(s) + \pi i s^{-2} p(s^{-1})}. \quad (3.10)$$

Аналогично, равномерно по $s > 1 + \varepsilon$

$$\lim_{t \uparrow 0} \frac{1}{1 - g(s + it)} = \frac{1}{1 - g^-(s)} = \frac{1}{1 - g^+(s)} = \frac{1}{A(s) - \pi i s^{-2} p(s^{-1})}. \quad (3.11)$$

Комбинируя (3.8)–(3.11) и (2.30), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^R \left(\frac{(s + it)^{-n-1}}{1 - g(s + it)} - \frac{(s - it)^{-n-1}}{1 - g(s - it)} \right) ds \\ = \int_{1+\varepsilon}^R s^{-n-1} \left(\frac{1}{1 - g^+(s)} - \frac{1}{1 - g^-(s)} \right) ds \\ = 2\pi i \int_{1+\varepsilon}^R \frac{s^{-n-3} p(s^{-1})}{(1 - s)|I_+(s)|^2} ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Согласно лемме 9 при $t < \varepsilon \wedge 2^{-1}$

$$\int_{1+t}^{1+\varepsilon} \frac{ds}{|1 - g(s \pm it)|} < 4t \int_{1/(1+\varepsilon+t)}^{1-t} \frac{v^{-1} dv}{(1 - v)(P(v) - P(v + t))}.$$

С другой стороны, в силу (2.36) и (1.18) при $t \downarrow 0$

$$\int_{1-t/2}^{1+t} \frac{ds}{|1 - g^\pm(s + it)|} < \frac{6t}{P(1 - t/4)} \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Из этих соотношений и условия (1.9) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \downarrow 0} \int_1^{1+\varepsilon} \frac{ds}{|1 - g^\pm(s + it)|} = 0. \quad (3.14)$$

Соотношения (3.12)–(3.14) позволяют сделать вывод, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_1^R \left(\frac{(s + it)^{-n-1}}{1 - g(s + it)} - \frac{(s - it)^{-n-1}}{1 - g(s - it)} \right) ds = 2\pi i \int_1^R \frac{s^{-n-3} p(s^{-1})}{(1 - s)|I_+(s)|^2} ds. \quad (3.15)$$

Далее, в силу (3.13)

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\sqrt{1-t^2}}^1 \frac{|s + it|^{-n-1}}{|1 - g(s \pm it)|} ds = 0.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\sqrt{1-t^2}}^R \left(\frac{(s+it)^{-n-1}}{1-g(s+it)} - \frac{(s-it)^{-n-1}}{1-g(s-it)} \right) ds = 2\pi i \int_1^R \frac{s^{-n-3}p(s^{-1})}{(s-1)|I_+(s)|^2} ds. \quad (3.16)$$

Оценим теперь интеграл по окружности $|z| = R$. Из леммы 2 вытекает, что при $t > 0$

$$\frac{1}{|(s \pm it - 1)I(s \pm it)|} < \frac{3}{\int_{1/2}^1 p(u) du}, \quad (3.17)$$

если s больше $\max(t+2, 3)$ и, кроме того, достаточно велико. С другой стороны, в силу леммы 3 при $t > s-2$

$$\frac{1}{|(s \pm it - 1)I(s \pm it)|} < \frac{2}{\int_{1/2}^1 p(u) du}. \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) следует, что при достаточно больших R

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{z^{-n-1}}{1-g(z)} dz \right| < 6\pi \left(\int_{1/2}^1 p(u) du \right)^{-1} R^{-n}. \quad (3.19)$$

В силу (3.17) при достаточно больших s

$$\frac{1}{(s-1)|I_+(s)|^2} \leq 9 \left(\int_{1/2}^1 p(u) du \right)^{-2} (s-1).$$

Поэтому при любом $n \geq 0$

$$\int_1^R \frac{s^{-n-3}p(s)}{(s-1)|I_+(s)|^2} ds < \int_1^\infty s^{-2}p(s^{-1}) ds = 1. \quad (3.20)$$

Из (3.7), (3.16), (3.19), (3.20) следует утверждение теоремы для $a_0 = 0$.

Если $a_0 > 0$, то согласно лемме 10 функция $1-g(z)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} z > a_0^{-1}$. Следовательно, существует $\lim_{t \rightarrow 0} (1/g(s+it))$ для $s > a_0^{-1}$. Это означает, что при любом $R > a_0^{-1}$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\sqrt{1-t^2}}^R \left(\frac{(s+it)^{-n-1}}{1-g(s+it)} - \frac{(s-it)^{-n-1}}{1-g(s-it)} \right) ds = 2\pi i \int_1^{a_0^{-1}} \frac{s^{-n-3}p(s^{-1})}{(s-1)|I_+(s)|^2} ds.$$

В этом единственное отличие от случая $a_0 = 0$. На этом доказательство теоремы 1 заканчивается.

4. Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы для любого z такого, что $|z| > 1$, имеем

$$f(z) = \beta g(z) + (1 - \beta)v(z), \quad (4.1)$$

где $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k$, $v(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} p_k z^k$. Вследствие (1.21)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{1 - g(e^{i\theta})} = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - v(e^{i\theta})}{i\theta} = -v'(1) < \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - v(e^{i\theta})}{1 - g(e^{i\theta})} = 0.$$

Поскольку функция $1/(1 - g(z))$ интегрируема на единичной окружности (см. доказательство теоремы 1), это означает, что $1/(1 - f(z))$ также на ней интегрируема. В результате мы можем утверждать, что

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{-n-1}}{1 - f(z)} dz. \quad (4.2)$$

В силу леммы 6 и условия (1.22) для $s > 1 + t$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} I(s \pm it) &> (2t)^{-1} P(s, t) = (2t)^{-1} \left(P\left(\frac{1}{s+t}\right) - P\left(\frac{1}{s-t}\right) \right) \\ &> (2t)^{-1} \eta_0 p\left(\frac{1}{s+t}\right) \left(\frac{1}{s-t} - \frac{1}{s+t} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда, вследствие (2.41), для $1 + t < s < \sqrt{2}$

$$|1 - g(s \pm it)| > \frac{\eta_0}{2} p\left(\frac{1}{s+t}\right) |s \pm it - 1|. \quad (4.4)$$

С другой стороны,

$$|1 - v(z)| < m|1 - z|. \quad (4.5)$$

Очевидно, что

$$\beta(1 - g(z)) + (1 - \beta)(1 - v(z)) = \beta(1 - g(z)) \left(1 + \frac{(1 - \beta)(1 - v(z))}{\beta(1 - g(z))} \right). \quad (4.6)$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что при $1 + t < s < \sqrt{2}$

$$\left| \frac{1 - v(z)}{1 - g(z)} \right| < \frac{2m}{\eta_0 p(1/(s+t))}, \quad (4.7)$$

где $s = \operatorname{Re} z$, $t = |\operatorname{Im} z|$. Комбинируя (4.1), (4.6), (4.7) и учитывая условие (1.23), находим, что существуют $s_0 > 0$, $t_0 > 0$ такие, что в области $\{z: \operatorname{Re} z < s_0, |\operatorname{Im} z| < t_0, \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z| + 1\}$ выполняется неравенство

$$|1 - f(z)| > \frac{\beta}{2} |1 - g(z)|. \quad (4.8)$$

Отсюда, в силу (4.4), следует, что $1 - f(z)$ не имеет нулей в указанной области значений z за исключением $z = 1$. Пусть теперь $1 - 2^{-1}|\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z < |\operatorname{Im} z| + 1$. В данном случае согласно лемме 7

$$|\operatorname{Im} I(z)| > \frac{P(1 - t/4)}{2t}, \quad 0 < t < 1,$$

где $t = |\operatorname{Im} z|$. Отсюда для $0 < t < 1$

$$|1 - g(z)| > t^{-1} P\left(1 - \frac{t}{4}\right) |1 - z|. \quad (4.9)$$

Из (4.6), (4.7), (4.9) следует, что существует t_1 такое, что в области $\{z: 1 - 2^{-1}|\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z < |\operatorname{Im} z| + 1, |\operatorname{Im} z| < t_1\}$ имеет место неравенство

$$|1 - f(z)| > \frac{\beta}{2} |1 - g(z)|, \quad (4.10)$$

и, следовательно, $1 - f(z)$ не имеет нулей в рассматриваемой области, исключая точку $z = 1$. Поскольку распределение F является арифметическим, то $|1 - f(z)| > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ в области $\{z: 1 \leq |z| \leq R, |\arg z| > \varepsilon\}$, лишь только R достаточно близко к 1.

Из сказанного выше вытекает, что для R , достаточно близких к 1, функция $1 - f(z)$ имеет единственный нуль $z = 1$ в кольце $1 \leq |z| \leq R$. Учитывая этот факт, мы можем выбрать $R = R_0$ так, что

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\varepsilon, R_0)} \frac{z^{-n-1}}{1 - f(z)} dz, \quad (4.11)$$

причем $\inf_{|z|=R_0} |1 - f(z)| > 0$ (см. определение $C(\varepsilon, R)$ в п. 3).

В силу (4.1) и следствия 1 для любого x на положительной полупрямой имеем

$$\begin{aligned} \lim_{z \uparrow x} \frac{1}{1 - f(z)} - \lim_{z \downarrow x} \frac{1}{1 - f(z)} &= \frac{1}{(1 - x)(\beta I_+(x) + (1 - \beta)w(x))} \\ &\quad - \frac{1}{(1 - x)(\beta I_-(x) + (1 - \beta)w(x))} \\ &= \frac{2\pi i \beta p(x^{-1})}{x^2(x - 1)} |\beta I_+(x) + (1 - \beta)w(x)|^{-2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Применяя последовательно (4.8), (2.39) и (1.22), находим, что при $\varepsilon < \min(s_0 - 1, 2^{-1})$, $0 < t < \min(t_0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \int_{1+t}^{1+\varepsilon} \frac{ds}{|1 - f(s \pm it)|} &< \frac{2}{\beta} \int_{1+t}^{1+\varepsilon} \frac{ds}{|1 - g(s \pm it)|} \\ &< \frac{8t}{\beta} \int_{1/(1+\varepsilon+t)}^{1-t} \frac{dv}{(1-v)(P(v) - P(v+t))} < \frac{8}{\beta\eta_0} \int_{1-\varepsilon-t}^{1-t} \frac{dv}{(1-v)p(v)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

С другой стороны, из (4.9), (3.13) и (1.22) следует, что при $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \int_{1-t/2}^{1+t} \frac{ds}{|1 - f(s \pm it)|} &< \frac{2}{\beta} \int_{1-t/4}^{1+t} \frac{ds}{|1 - g(s \pm it)|} \\ &< \frac{12}{\beta} \frac{t}{P(1-t/4)} < \frac{48}{\beta\eta_0 p(1-t/4)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В силу (4.13), (4.14) и условий (1.23) и (1.24)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{t \downarrow 0} \int_{1-t/2}^{1+\varepsilon} \frac{ds}{|1 - f(s \pm it)|} = 0. \quad (4.15)$$

Опираясь на (4.12) и (4.15), находим с учетом (4.14), что

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \int_{\sqrt{1-t^2}}^{R_0} \left(\frac{1}{1 - f(s+it)} - \frac{1}{1 - f(s-it)} \right) (s+it)^{-n-1} ds \\ = 2\pi i \beta \int_1^{R_0} \frac{p(x^{-1})x^{-n-3}}{(x-1)|\beta I_+(x) + (1-\beta)w(x)|^2} dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Очевидно, что

$$\int_{|z|=R_0} \frac{z^{-n-1}}{1 - f(z)} dz = O(R_0^{-n}). \quad (4.17)$$

Комбинируя (4.11), (4.16), (4.17), получаем желаемый результат.

5. Примеры. В настоящем пункте мы дадим примеры применения теоремы 1. Сначала мы рассмотрим случай, когда $p(x)$ возрастает степенным образом при $x \uparrow 1$, а именно

$$p(x) \sim (1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5.1)$$

Предварительно мы докажем две леммы. Нам понадобится обозначение $\bar{p}(x) = x^{-2}p(x^{-1})$.

Лемма 11. Пусть при $x \downarrow 1$ выполняется условие

$$\bar{p}'(x) \sim -(x-1)^{-\beta}, \quad 1 < \beta < 2. \quad (5.2)$$

Тогда

$$\int_1^x \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x-y} dy \sim \frac{(x-1)^{1-\beta}}{\beta-1} \int_0^1 \frac{u^{1-\beta} - 1}{1-u} du. \quad (5.3)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy &= \int_0^{x-1} \frac{\bar{p}(y+1) - \bar{p}(x)}{x - y - 1} dy \\ &= \int_0^{x-1} \frac{p_0(y) - p_0(x-1)}{x - y - 1} dy, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $p_0(y) = \bar{p}(y+1)$.

Рассмотрим интеграл

$$J_1(s) = \int_0^s \frac{p_0(y) - p_0(s)}{s - y} dy. \quad (5.5)$$

Производя замену переменной $y = us$, получаем

$$J_1(s) = \int_0^1 \frac{p_0(us) - p_0(s)}{1 - u} du.$$

Очевидно, что

$$p_0(us) - p_0(s) = -s \int_u^1 p'_0(vs) dv.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_1(s) &= s \int_0^1 \frac{du}{1 - u} \int_1^u p'_0(vs) dv \\ &= s \int_0^1 p'_0(vs) dv \int_v^0 \frac{du}{1 - u} = s \int_0^1 p'_0(vs) \ln(1 - v) dv. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (5.2) при $s \downarrow 0$

$$J_1(s) \sim -s^{1-\beta} \int_0^1 v^{-\beta} \ln(1 - v) dv.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^{-\beta} \ln(1 - v) dv &= \int_0^1 v^{-\beta} dv \int_v^0 \frac{du}{1 - u} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{1 - u} \int_1^u v^{-\beta} dv = \frac{1}{1 - \beta} \int_0^1 \frac{u^{1-\beta} - 1}{1 - u} du. \end{aligned}$$

Таким образом, при $s \downarrow 0$

$$J_1(s) \sim \frac{s^{1-\beta}}{\beta - 1} \int_0^1 \frac{u^{1-\beta} - 1}{1 - u} du. \quad (5.6)$$

Из (5.4)–(5.6) следует (5.3), что и требовалось доказать.

Следствие 5. Если при $x \uparrow 1$

$$p'(x) \sim (\alpha - 1)(1 - x)^{\alpha-2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5.7)$$

то при $x \downarrow 1$

$$\int_1^x \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy \sim (x - 1)^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} - 1}{1 - u} du. \quad (5.8)$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \downarrow 1$

$$\begin{aligned} \bar{p}'(x) &= -x^{-4}p'(x^{-1}) - 2x^{-3}p(x^{-1}) \\ &\sim (\alpha - 1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\alpha-2} \sim (\alpha - 1)(x - 1)^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Заметим, что если при $x \downarrow 1$

$$\bar{p}'(x) \sim -c(x - 1)^{-\beta}, \quad 1 < \beta < 2, \quad c > 0,$$

то согласно лемме 11

$$\int_1^x \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy \sim \frac{c(x - 1)^{1-\beta}}{\beta - 1} \int_0^1 \frac{u^{1-\beta} - 1}{1 - u} du.$$

Полагая теперь $\beta = 2 - \alpha$, $c = 1 - \alpha$, получаем желаемый результат.

Лемма 12. Пусть выполнено условие (5.2). Тогда при $x \downarrow 1$

$$\int_x^2 \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy + \frac{(x - 1)^{1-\beta}}{\beta - 1} \ln(x - 1) \sim \frac{(x - 1)^{1-\beta}}{\beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - v^{\beta-2}}{1 - v} dv. \quad (5.10)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\int_x^2 \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy = \int_{x-1}^1 \frac{p_0(y) - p_0(x - 1)}{x - y - 1} dy. \quad (5.11)$$

Положим

$$J_2(s) = \int_s^1 \frac{p_0(y) - p_0(s)}{s - y} dy, \quad 0 < s < 1.$$

Производя замену переменной $y = us$ и действуя так же, как при выводе (5.6), получаем

$$\begin{aligned} J_2(s) &= \int_1^{s^{-1}} \frac{p_0(us) - p_0(s)}{1 - u} du \\ &= s \int_1^{s^{-1}} \frac{du}{1 - u} \int_1^u p'_0(vs) dv \sim -s^{1-\beta} \int_v^{s^{-1}} \frac{du}{1 - u} \int_1^u v^{-\beta} dv \\ &= \frac{s^{1-\beta}}{\beta - 1} \int_1^{s^{-1}} \frac{1 - u^{1-\beta}}{u - 1} du. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Делая замену переменной $u = 1/v$, имеем

$$\int_1^{s^{-1}} \frac{1 - u^{1-\beta}}{u - 1} du = \int_s^1 \frac{1 - v^{\beta-1}}{1 - v} v^{-1} dv. \quad (5.13)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_s^1 \frac{1 - v^{\beta-1}}{1 - v} v^{-1} dv + \ln s &= \int_s^1 \left(\frac{1 - v^{\beta-1}}{1 - v} - 1 \right) v^{-1} dv \\ &= \int_0^1 \frac{1 - v^{\beta-2}}{1 - v} dv + O(s). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Комбинируя (5.12)–(5.14), получаем

$$J_2(s) + \frac{s^{1-\beta}}{\beta - 1} \ln s \sim \frac{s^{1-\beta}}{\beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - v^{\beta-2}}{1 - v} dv. \quad (5.15)$$

Заметим, что в силу (5.11)

$$\int_x^2 \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy = J_2(x - 1). \quad (5.16)$$

Из (5.15), (5.16) следует утверждение леммы.

Следствие 6. В условиях следствия 5 при $x \downarrow 1$

$$\int_x^2 \frac{\bar{p}(y) - \bar{p}(x)}{x - y} dy + (x - 1)^{\alpha-1} \ln(x - 1) \sim (x - 1)^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1 - v^{-\alpha}}{1 - v} dv. \quad (5.17)$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 5. Теперь мы в состоянии найти асимптотику u_n при $n \rightarrow \infty$. С этой целью подчиним $p(x)$ более сильному, чем (5.1), условию (5.7).

Считая, что $2x - 1 < 2$, запишем $A(x)$ в виде

$$A(x) = \int_1^2 \frac{\bar{p}(x) - \bar{p}(y)}{x - y} dy + \bar{p}(x) \int_{2x-1}^2 \frac{dy}{y - x} + \int_2^\infty \frac{\bar{p}(y)}{y - x} dy. \quad (5.18)$$

Применяя следствия 5 и 6, имеем при $x \downarrow 1$

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{\bar{p}(x) - \bar{p}(y)}{x - y} dy - (x - 1)^{\alpha-1} \ln(x - 1) \\ &\sim (x - 1)^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1 - u^{\alpha-1}}{1 - u} du + (x - 1)^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{u^{-\alpha} - 1}{1 - u} du \\ &= (x - 1)^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{u^{-\alpha} - u^{\alpha-1}}{1 - u} du = -(x - 1)^{\alpha-1} \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Мы воспользовались здесь формулой

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi$$

(см. [7, с. 238, подраздел 2.2.4, п. 21]). В силу (5.9) при $x \downarrow 1$

$$\bar{p}(x) \sim (x-1)^{\alpha-1}. \quad (5.20)$$

Следовательно,

$$\bar{p}(x) \int_{2x-1}^2 \frac{dy}{y-x} = \bar{p}(x) \ln \frac{2-x}{x-1} \sim -(x-1)^{\alpha-1} \ln(x-1). \quad (5.21)$$

Из (5.19)–(5.21) следует, что

$$A(x) \sim -(x-1)^{\alpha-1} \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi.$$

Отсюда

$$|I_+(x)|^2 \sim (x-1)^{2(\alpha-1)} \pi^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha \pi + 1). \quad (5.22)$$

В результате получаем при $x \downarrow 1$

$$\frac{p(x^{-1})}{(x-1)|I_+(x)|^2} \sim \frac{\sin^2 \alpha \pi}{\pi^2} (x-1)^{-\alpha}. \quad (5.23)$$

Как уже отмечалось в п. 1, (5.20) влечет выполнение условий (1.8) и (1.9). Кроме того, мы предположим, что функция $p(x)$ положительна и удовлетворяет условию (1.7).

Применяя теперь теорему 1, получаем с учетом соотношения (5.23), что при $n \rightarrow \infty$

$$u_n \sim \frac{\sin^2 \alpha \pi}{\pi^2} \int_1^\infty x^{-n} (x-1)^{-\alpha} dx. \quad (5.24)$$

Очевидно, что

$$\int_1^\infty x^{-n} (x-1)^{-\alpha} dx = \int_0^1 y^{n-2+\alpha} (1-y)^{-\alpha} dy = \frac{\Gamma(n-1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n)}.$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma(n-1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n)} \sim n^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

Возвращаясь теперь к (5.24), заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$u_n \sim \frac{\sin^2 \alpha \pi}{\pi^2} \Gamma(1-\alpha) n^{\alpha-1}. \quad (5.25)$$

Нетрудно показать, используя (5.20), что в рассматриваемом случае

$$1 - F(n) = \int_0^1 p(u)u^n du \sim \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^n du \sim \Gamma(\alpha)n^{-\alpha}. \quad (5.26)$$

Отсюда согласно [3]–[5]

$$u_n \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1}. \quad (5.27)$$

Из формулы $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin \alpha\pi$ следует, что

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi \Gamma(\alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha \pi}{\pi^2} \Gamma(1-\alpha).$$

Таким образом, асимптотические формулы (5.25) и (5.27) совпадают, что подтверждает правильность формулы (1.14).

Отметим один простой частный случай. Если $\alpha = 1/2$, то в силу (5.22) при $x \downarrow 1$

$$I_+(x) \sim \pi(x-1)^{\alpha-1} \sim \bar{p}(x).$$

Отсюда согласно (1.14) при $n \rightarrow \infty$

$$u_n \sim \frac{1}{\pi} \int_1^{a_0^{-1}} \frac{x^{-n+1}}{p(x^{-1})(x-1)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{a_0}^1 \frac{u^{n-2}}{p(u)(1-u)} du.$$

Построим теперь пример распределения, которое удовлетворяет всем условиям теоремы 1, однако не является правильно меняющимся на бесконечности в смысле Караматы.

Положим $y_n = 1 - 1/n!$. Нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$, $k = o((n!)^2)$ имеет место соотношение

$$y_n^k \sim \exp \left\{ -\frac{k}{n!} \right\}. \quad (5.28)$$

Обозначим $k_n = n!$. Очевидно, что

$$y_n^{k_n} \sim e^{-1}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим арифметическое распределение F на неотрицательной полуоси, определяемое равенствами

$$1 - F(k) := \bar{F}(k) = \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n^k p_n, \quad (5.30)$$

где при $n > n_0$

$$p_n = \begin{cases} k_n^{-\alpha}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ k_n^{-\beta}, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

$0 < \alpha < \beta < 1$, и $p_{n_0} = 1 - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} p_n$, причем n_0 выбирается так, что $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} p_n \leq 1$.

В силу (5.28) для любого $k > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$y_{n-k}^{k_n} \sim \exp\{-n(n-1) \cdots (n-k+1)\}.$$

Отсюда вследствие (5.29) для $n = 2m + 1$

$$\sum_{k=1}^{n-n_0} y_{n-k}^{k_n} p_{n-k} \sim k_{n-1}^{-\beta} \exp\{-n\} = o(y_n^{k_n} p_n). \quad (5.31)$$

Далее, для любого $k > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+k} = 1.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} = o(p_n).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} y_{n+k}^{k_0} = o(y_n^{k_n} p_n). \quad (5.32)$$

Из (5.29)–(5.31) следует, что

$$\bar{F}(k_n) = \sum_{k=n_0-n}^{\infty} y_{n+k}^{k_n} p_{n+k} \sim y_n^{k_n} p_n \sim e^{-1} k_n^{-\alpha}, \quad (5.33)$$

если $n = 2m + 1$.

Аналогично, для $n = 2m$

$$\bar{F}(k_n) = \sum_{k=n_0-n}^{\infty} y_{n+k}^{k_n} p_{n+k} \sim e^{-n} k_{n+1}^{-\alpha}. \quad (5.34)$$

Из (5.30), (5.33) и (5.34) вытекает, что последовательность $\bar{F}(k)$ не является правильно меняющейся.

Положим $\varepsilon_n = 1/(n+1)!$. Пусть последовательность интервалов Δ_n , $n \geq n_0$, определяется равенствами $\Delta_n = (y_n - \varepsilon_n, y_n + \varepsilon_n)$. Нетрудно видеть, что $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} < y_{n+1} - y_n$ при $n \geq 2$. Следовательно, интервалы Δ_n и Δ_{n+1} не перекрываются, если $n \geq 2$.

Пусть для любого $n \geq n_0$

$$q(y) = \begin{cases} l_n(y + \varepsilon_n - y_n), & \text{если } y_n - \varepsilon_n \leq y \leq y_n, \\ -l_n(y - \varepsilon_n - y_n), & \text{если } y_n \leq y \leq y_n + \varepsilon_n, \end{cases}$$

где l_n находится из условия

$$\int_{\Delta_n} q(y) dy = p_n.$$

В остальных точках отрезка $(0, 1)$ положим $q(y) = 0$. Очевидно, что

$$\int_{\Delta_{n+1}} y^{k_n} q(y) dy = y_{n+1}^{k_n} p_{n+1} + \int_{\Delta_{n+1}} (y^{k_n} - y_{n+1}^{k_n}) q(y) dy. \quad (5.35)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} y^{k_n} - y_{n+1}^{k_n} &= y_{n+1}^{k_n} \left(\left(\frac{y}{y_{n+1}} \right)^{k_n} - 1 \right) = O \left(y_{n+1}^{k_n} \left(\frac{y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}}{y_{n+1}} \right)^{k_n} - 1 \right) \\ &= O \left(k_n \varepsilon_{n+1} y_{n+1}^{k_n} \right) = O \left(\frac{y_{n+1}^{k_n}}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

равномерно относительно $y_{n+1} \leq y \leq y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$.

Аналогично, для $y_{n+1} - \varepsilon_{n+1} \leq y < y_{n+1}$

$$y_{n+1}^{k_n} - y^{k_n} = O \left(\frac{y_{n+1}^{k_n}}{(n+1)(n+2)} \right). \quad (5.37)$$

Из (5.35)–(5.37) следует, что

$$\int_{\Delta_{n+1}} y^{k_n} q(y) dy = y_{n+1}^{k_n} p_{n+1} \left(1 + O \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right). \quad (5.38)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что при $k > 1$

$$\int_{\Delta_{n+k}} y^{k_n} q(y) dy = y_{n+k}^{k_n} p_{n+k} \left(1 + O \left(\frac{(n-k-1)!}{n!} \right) \right). \quad (5.39)$$

Далее, для $k \geq 1$

$$\int_{\Delta_{n-k}} y^{k_n} q(y) dy < (y_{n-k} + \varepsilon_{n-k})^{k_n} p_{n-k}.$$

Нетрудно видеть, что

$$(y_{n-k} + \varepsilon_{n-k})^{k_n} p_{n-k} \sim \exp \left\{ -n! \left(\frac{1}{(n-k)!} + \frac{1}{(n-k+1)!} \right) \right\}. \quad (5.40)$$

Следовательно, при $k \geq 1$

$$\int_{\Delta_{n-k}} y^{k_n} q(y) dy = o \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} n(n-1)(n-k+1) \right\} \right). \quad (5.41)$$

Точно так же, как (5.38), выводится соотношение

$$\int_{\Delta_n} y^{k_n} q(y) dy = y_n^{k_n} p_n \left(1 + O\left(\frac{1}{n+1}\right) \right). \quad (5.42)$$

Собирая оценки (5.38), (5.41), (5.42) и учитывая (5.33), получаем для $n = 2m + 1$ (5.29)

$$\int_0^1 y^{k_n} q(y) dy \sim \sum_{k=n_0-n}^{\infty} y_{n+k} p_{n+k} \sim y_n^{k_n} p_n \sim e^{-1} p_n. \quad (5.43)$$

Пусть $Q(x)$ — смесь геометрических распределений со смешивающей плотностью $q(y)$. Согласно (5.30) и (5.43) при $x \rightarrow \infty$

$$1 - Q(x) \sim \bar{F}(x). \quad (5.44)$$

Положим $q_1(y) = \gamma(1-y)^{\gamma-1}$, $0 \leq y < 1$. Пусть арифметическое распределение $Q_1(x)$ определяется равенством

$$1 - Q_1(n) = \int_0^1 y^n q_1(y) dy.$$

Обозначим

$$q_2(y) = \frac{1}{2}(q(y) + q_1(y)), \quad Q_2(x) = \frac{1}{2}(Q(x) + Q_1(x)).$$

Как было показано в п. 1, $q_1(y)$ удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9). Следовательно, $q_2(y)$ также удовлетворяет этим условиям.

С другой стороны, согласно (5.26)

$$1 - Q_1(x) \sim c(\gamma)x^{-\gamma}. \quad (5.45)$$

Сравнивая (5.44) и (5.45), мы видим, что при $n \rightarrow \infty$

$$1 - Q_2(k_n) \sim \bar{F}(k_n), \quad (5.46)$$

если $\alpha < \beta < \gamma$.

Нетрудно доказать, что $p(y) = q_2(y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В то же время в силу (5.33), (5.34) и (5.46) $1 - Q_2(x)$ не является правильно меняющейся функцией.

Что касается вероятности восстановления u_n в рассматриваемом случае, то последнюю можно вычислять сколь угодно точно по формуле (1.14) для любого значения n .

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. И. Чеботарёву, который оказал очень большую помощь в редактировании рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. *de Bruijn N. G., Erdős P.* On a recursion formula and some Tauberian theorems. — J. Res. Nat. Bur. Stand., 1953, v. 50, p. 161–164.
3. *Garsia A., Lamperti J.* A discrete renewal theorem with infinite mean. — Comment. Math. Helv., 1963, v. 37, p. 221–234.
4. *Williamson J. A.* Random walks and Riesz kernels. — Pacific J. Math., 1968, v. 25, № 2, p. 393–415.
5. *Doney R. A.* One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. — Probab. Theory Related Fields, 1997, v. 107, № 4, p. 451–465.
6. Нагаев С. В. Теорема восстановления при отсутствии степенных моментов. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 1, с. 188–197.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2003, 632 с.

Поступила в редакцию
9.VII.2012