Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Саханенко, Асимптотика супремума взвешенных гауссовских полей с приложениями к ядерным оценкам плотностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 499–541

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:11:15

© 2014 г.

САХАНЕНКО Л. А.*

АСИМПТОТИКА СУПРЕМУМА ВЗВЕШЕННЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЯДЕРНЫМ ОЦЕНКАМ ПЛОТНОСТЕЙ¹⁾

Для центрированных стационарных гауссовских полей $X(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, $d > 1$, мы показываем, что специальным образом центрированный и нормированный супремум $\sup_{s \in \mathbf{R}^d} w(s/T)|X(s)|$ с неотрицательной весовой функцией w при $T \rightarrow \infty$ сходится по распределению к двойному экспоненциальному закону, если w и ковариационная функция процесса X удовлетворяют определенным условиям гладкости и регулярности. Эта предельная теорема обобщает результаты для компактных множеств без весовой функции, полученные ранее в [11].

Затем этот новый результат для гауссовских полей применяется для нахождения необходимых и достаточных условий для сходимости по распределению к двойному экспоненциальному закону специальным образом центрированной и нормированной последовательности $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E}\hat{f}_n(x))|$ при естественных условиях гладкости (здесь $\hat{f}_n$ обозначает ядерную оценку ограниченной непрерывной плотности f на $\mathbf{R}^d$, построенную по выборке размера n , а Ψ — положительная непрерывная функция такая, что $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\Psi(x)f(x)^\beta| < \infty$ для некоторого $\beta \in (0, 1/2)$).

Данная статья обобщает результаты недавней работы [4] на случай $d > 1$. Она также обобщает результаты работы [12] для $\Psi(\cdot) = f^{-1/2}(\cdot)I_S(\cdot)$ с некоторым компактным множеством S из $\mathbf{R}^d$ на общий класс функций Ψ . Пример практического применения завершает данную работу.

Ключевые слова и фразы: ядерные оценки плотностей, гауссовские процессы, взвешенная равномерная норма, локальный принцип инвариантности.

1. Введение. Пусть $X(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, — центрированное стационарное гауссовское поле с ковариацией $\mathbf{E}[X(s_1)X(s_2)] = r(s_1 - s_2)$, удовлетворяющей следующим условиям:

(R1) $r(s) = 1 - C_r\|s\|^\alpha + o(\|s\|^\alpha)$ при $\|s\| \rightarrow 0$ для некоторого $\alpha \in (0, 2]$ и некоторого $C_r > 0$;

(R2) $r(s) = 0$ для всех s таких, что $\|s\| > 1$.

*Department of Statistics and Probability, Michigan State University, East Lansing, MI, USA; e-mail: luda@stt.msu.edu

¹⁾ Работа выполнена при поддержке NSF (грант DMS-0806176).

Здесь и всюду ниже $\|x\|^p := \sum_{i=1}^d |x_i|^p$ для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ при некотором фиксированном действительном $p \geq 1$.

Заметим, что из однородности этого гауссовского поля и условия (R1) вытекает, что функция $r(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, непрерывна всюду. Кроме того условия (R1) и (R2) влекут, что для всех $\varepsilon > 0$ мы имеем $\sup_{\|s\| > \varepsilon} |r(s)| < 1$. Заметим также, что по теореме 5 в [2, гл. IV.5] поле $X(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, имеет сепарабельную версию с непрерывными траекториями, которую мы и будем использовать.

Для $d \geq 1$ и любого компактного множества S из $\mathbf{R}^d$ В.И. Питербарг [11] получил точную асимптотику вероятностей $\mathbf{P}(\max_{s \in S} X(s) > u)$ и $\mathbf{P}(\max_{s \in S} |X(s)| > u)$ при $u \rightarrow \infty$. Результат для $d = 1$ имеет длинную историю, начатую Дж. Пикандсом [10]. Все детали и полную библиографию см. в [11] и [9].

Нас интересует изучение супремума взвешенного гауссовского поля по всему пространству $\mathbf{R}^d$. На интуитивном уровне понятно, что по существу весовая функция контролирует поведение вне компактного множества. Обозначим весовую функцию через $w: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$. Она удовлетворяет следующим трем условиям.

(w1) Носитель W функции $w(x)$ состоит из конечного числа замкнутых прямоугольных параллелепипедов или квадрантов. Функция $w(x)$ непрерывна на W и стремится к нулю при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Для того чтобы сформулировать оставшиеся два условия, нам нужны дополнительные определения. Пусть

$$\Phi_{d,\alpha}(u) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} H_\alpha C_r^{1/\alpha} u^{2d/\alpha-1} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}, \quad u > 0, \quad \Phi_{d,\alpha}(\infty) := 0,$$

где H_α — константа Пикандса. Она может быть определена как предел

$$H_\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-d} \mathbf{E} \exp\left\{\max_{x \in [0, M]^d} \chi(x)\right\},$$

где $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, — гауссовское поле с непрерывными траекториями, с функцией математического ожидания $\mathbf{E}\chi(x) = -\|x\|^\alpha$ и ковариационной функцией $r_\chi(x, y) = \|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha - \|x - y\|^\alpha$. Также определим

$$\Lambda_{d,\alpha}(u) := \int_W \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u}{w(y)}\right) dy, \quad u > 0.$$

Тогда весовая функция w удовлетворяет также следующим условиям:

(w2) существует $u_0 \in (0, \infty)$ такое, что $\Lambda_{d,\alpha}(u_0) < \infty$;

(w3) при $T \rightarrow \infty$

$$\sup_{s, s+\tau \in W, \|\tau\| \leq 1/T} \left| \frac{w(s+\tau)}{w(s)} - 1 \right| = o\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Заметим, что из условий (w1) и (w2) следует, что $\Lambda_{d,\alpha}(u)$ — монотонно убывающая к 0 функция при $u \rightarrow \infty$, начиная с достаточно большого $u > 0$.

Пусть A_T — решение уравнения

$$T^d \Lambda_{d,\alpha}(A_T) = 1.$$

Из условий (w1) и (w2) следует, что последовательность A_T существует и единственна для всех достаточно больших T . Отметим также, что $A_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Более того, по лемме 5 в [4] мы имеем

$$0 < \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{A_T}{\sqrt{\ln T}} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{A_T}{\sqrt{\ln T}} < \infty. \quad (1)$$

На самом деле верно более сильное утверждение.

Предложение 1. Пусть выполнены условия (w1)–(w3). Тогда при $T \rightarrow \infty$

$$A_T = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) \sqrt{2d \ln T} + \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) \frac{\ln \ln T}{\sqrt{2d \ln T}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}} \right).$$

Теперь мы можем сформулировать главный результат для супремума взвешенного стационарного гауссовского поля.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (R1), (R2) и (w1)–(w3). Для всех $t \in \mathbf{R}$ мы имеем при $T \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(A_T \left(\sup_{s \in \mathbf{R}^d} w\left(\frac{s}{T}\right) |X(s)| - A_T \right) \leq t\right) \rightarrow \exp\{-e^{-t}\}.$$

Данная работа о гауссовских полях мотивирована следующей задачей оценивания плотности. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные наблюдения с неизвестной плотностью $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, где $d > 1$. Определим ядерную оценку для плотности f на основе данных $(X_1, \dots, X_n)$ с ядром K формулой

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

где ширина окна h_n удовлетворяет условиям $h_n \rightarrow 0$ и $nh_n^d \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, которые влекут за собой состоятельность оценки $\hat{f}_n$.

Пусть $\Psi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ — положительная непрерывная функция. Э. Жине, В. Колчинский и Дж. Зинн в [5] показали, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность

$$\sqrt{\frac{nh_n^d}{2|\ln h_n^d|}} \|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E} \hat{f}_n(\cdot))\|_\infty \quad (2)$$

сходится почти наверное к константе, если выполнены определенные условия гладкости и регулярности на f, Ψ, K и функцию ширины окна h_t , $t \geq 1$, включающие в себя, в частности, предположения $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\Psi(x) f^\beta(x)| = \|\Psi f^\beta\|_\infty < \infty$ для некоторого $\beta \in (0, 1/2)$ и $\int_1^\infty \mathbf{P}(\Psi(X_1) > (th_t^d |\ln h_t|)^{1/2}) dt < \infty$.

Одна из целей данной работы — изучить сходимость по распределению последовательности (2) при надлежащих центрировании и нормировке. Эта статья продолжает линию исследований, начатую В. Д. Бикелем и М. Розенблаттом [1], которые рассмотрели задачи подобного характера с $\Psi = f^{-1/2}$ на ограниченном интервале действительной прямой. Позже В. Д. Конаков и В. И. Питербарг [7] изучали сходимость по распределению взвешенной равномерной нормы разности между ядерной оценкой регрессионной функции и ее математическим ожиданием на компактном множестве. Используя некоторые их результаты для гауссовских полей и новый локальный принцип инвариантности, Э. Рио [12] доказал сходимость по распределению взвешенной равномерной нормы разности между ядерной оценкой плотности и ее математическим ожиданием для случая $\Psi = f^{-1/2}$ на компактном множестве в многомерной ситуации $d > 1$. Недавно Э. Жине, В. Колчинский и Л. Саханенко [4] доказали сходимость по распределению последовательности (2) к повторному экспоненциальному закону в одномерной ситуации $d = 1$.

Но их доказательство специфично для одномерного случая. Для многомерного случая нужен иной подход. В настоящей статье мы отвечаем на эту потребность. Мы также раздвигаем рамки исследований скоростей сходимости взвешенных равномерных норм разности между ядерной оценкой плотности и ее математическим ожиданием. Мы получаем скорости сходимости по распределению, тогда как в [5] получены скорости сходимости по вероятности и почти наверное. При определенных условиях гладкости и регулярности на f, Ψ, K и h_n мы показываем, что, в зависимости от выбранных ширины окна h_n , центрирующей и нормирующей последовательностей, возможен один из следующих трех случаев:

(I) последовательность

$$\sqrt{\frac{0.5nh_n^d}{|\ln h_n|}} \|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E} \hat{f}_n(\cdot))\|_\infty$$

сходится по распределению к обрезанной неотрицательной случайной величине с кумулятивной функцией распределения типа $\exp\{-t^\delta\}$ для конкретного $\delta > 0$;

(II) для конкретной регулярно меняющейся функции d_t последовательность

$$\frac{nh_n^d}{d_n} \|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E} \hat{f}_n(\cdot))\|_\infty$$

сходится по распределению к неотрицательной случайной величине с кумулятивной функцией распределения типа $\exp\{-t^\delta\}$ для конкретного $\delta > 0$;

(III) для последовательности A_{1/h_n} , являющейся A_T с $T = 1/h_n$, и $w = \Psi f^{1/2}$ последовательность

$$A_{1/h_n} \left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E} \hat{f}_n(\cdot))\|_\infty - A_{1/h_n} \right),$$

где $\|K\|_2^2 = \int_{\mathbf{R}^d} K^2(x) dx$, сходится по распределению к двойной экспоненциальной случайной величине.

Сходимость (III) — изящная, она связана с теоремой 1 через локальное сильное приближение в смысле [12]. Точнее, для центрированного стационарного гауссовского поля $X(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, с ковариационной функцией $r(y) = \int_{\mathbf{R}^d} K(y+s)K(s) ds / \|K\|_2$ мы покажем (см. теорему 4), что последовательности

$$\left\{ A_{1/h_n} \left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \sup_{t \in D_a} |\Psi(t)(\hat{f}_n(t) - \mathbf{E} \hat{f}_n(t))| - A_{1/h_n} \right) \right\}$$

и

$$\left\{ A_{1/h_n} \left(\sup_{t \in D_a} \left| \Psi(t) \sqrt{f(t)} X\left(\frac{t}{h_n}\right) \right| - A_{1/h_n} \right) \right\}$$

сходятся или расходятся по распределению вместе при $n \rightarrow \infty$ для любых достаточно больших $a > 0$, где $D_a = \{x \in \mathbf{R}^d: \|x\| \leq a, f(x) \geq 1/a\}$. Теорема 1 применяется к процессу $X(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, из чего вытекает сходимость специальным образом центрированной и нормированной последовательности (2) к двойному экспоненциальному распределению.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Раздел 2 посвящен обозначениям, условиям и основным результатам для оценок плотностей. Раздел 3 связывает наш асимптотический результат для супремума взвешенных стационарных гауссовских полей с нашей задачей оценивания плотности через локальное сильное приближение в смысле Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади [6] (КМТ), используя подход [12].

Доказательство теоремы 1 приведено в разделе 4. В разделе 5 доказываются теоремы 2 и 3 о скорости сходимости по распределению для специальным образом нормированной и центрированной последовательности (2). Пример практического применения в разделе 6 завершает эту работу.

2. Условия и основные результаты для оценок плотностей.

Мы используем условия, требующиеся в [5]. По-видимому, они являются необходимыми, когда мы имеем дело с взвешенными равномерными нормами по всему пространству $\mathbf{R}^d$. См. упомянутую выше статью, где

обсуждаются эти условия и приведен ряд примеров, иллюстрирующих их необходимость. Мы формулируем эти условия ниже для полноты.

(K1) K — ограниченная измеримая функция плотности вероятностей с носителем, лежащим в $[-1/2, 1/2]^d$, которая принадлежит линейной оболочке, натянутой на функции $\kappa \geq 0$, обладающие следующим свойством: подграф κ (т.е. множество вида $\{(s, u): \kappa(s) \geq u\}$) может быть представлен как результат применения конечного числа булевых операций к множествам вида $\{(s, u): p(s, u) \geq q(u)\}$, где p — полином на $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$, а q — произвольная действительная функция. В частности, отсюда следует, что у K ограниченная вариация.

(K2) Функция

$$r(x) = \frac{1}{\|K\|_2} \int_{\mathbf{R}^d} K(x+s)K(s) ds, \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

удовлетворяет условиям (R1), (R2) из введения.

(K3) K — дифференцируемая функция такая, что

$$\int \left| \sum_{i=1}^d \frac{\partial K}{\partial z_i}(z) \right| dz = C_K < \infty.$$

Условие (K2) на K не требовалось в [5], но требуется в [4]. Условие (K3) ново и специфично для нашего подхода.

Плотность f и весовая функция Ψ удовлетворяют приведенным в [5] условиям (D.a)–(D.c), (W.a)–(W.c), (WD.a) $_{\beta}$ для некоторого $0 < \beta < 2$ и условиям (H₁), (H₂). Мы формулируем их ниже для полноты.

(D.a) f — ограниченная плотность на $\mathbf{R}^d$, непрерывная на множестве $B_f := \{x \in \mathbf{R}^d: f(x) > 0\}$, где она положительна; предполагается также, что B_f есть замыкание открытого множества и $\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| > a} f(x) = 0$.

(D.b) Для любого $\delta > 0$ существуют $c > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при всех $\|y\| \leq h_0$ и $x \in B_f$, для которых $x+y \in B_f$, выполнены неравенства

$$\frac{1}{c} f^{\delta}(x) \leq \frac{f(x+y)}{f(x)} \leq c f^{-\delta}(x).$$

(D.c) Для всех $\rho > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x, y: f(x) \geq h^{\rho}, x+y \in B_f, \|y\| \leq h} \left| \frac{f(x+y)}{f(x)} - 1 \right| = 0.$$

(W.a) $\Psi: B_f \rightarrow \mathbf{R}_+$ — положительная непрерывная функция на B_f .

(W.b) Для любого $\delta > 0$ существуют $c > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при всех $\|y\| \leq h_0$ и $x \in B_f$, для которых $x+y \in B_f$, выполнены неравенства

$$\frac{1}{c} \Psi^{-\delta}(x) \leq \frac{\Psi(x+y)}{\Psi(x)} \leq c \Psi^{\delta}(x).$$

(W.c) Для всех $\rho > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x, y: \Psi(x) \leq h^{-\rho}, x+y \in B_f, \|y\| \leq h} \left| \frac{\Psi(x+y)}{\Psi(x)} - 1 \right| = 0.$$

(WD.a) $_{\beta}$ $\sup_{x \in B_f} |\Psi(x)f^{\beta}(x)| < \infty$, где $\beta \in (0, 2)$.

(H1) Функция ширины окна $h_t = h(t)$, $t \geq 1$, монотонно убывает к 0, а функция th_t^d — строго возрастает к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

(H2) h_t^d регулярно меняется на бесконечности с показателем $-\eta$ для некоторого $\eta \in (0, 1)$.

Нам также требуются следующие условия из [4].

(F1) Множество B_f является конечным объединением замкнутых прямоугольных параллелепипедов и квадрантов. Более того, f удовлетворяет на B_f условию Гёльдера с некоторым показателем $\gamma > 0$.

(F2) Функция $w = \Psi^{1/2}$ удовлетворяет приведенным во введении условиям (w1)–(w3).

Теперь мы готовы сформулировать главный результат этого раздела.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (K1)–(K3), (D.a)–(D.c), (W.a)–(W.c), (H1)–(H2), (WD.a) $_{\beta}$, (F1)–(F2). Предположим, что либо $B_f = \mathbf{R}^d$, либо $K(0) = \|K\|_{\infty}$ и $\beta \in (0, 1/2)$. Тогда для всех $t \in \mathbf{R}$ мы имеем

$$\mathbf{P}\left(A_{1/h_n}\left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E}\hat{f}_n(\cdot))\|_{\infty} - A_{1/h_n}\right) \leq t\right) \rightarrow \exp\{-e^{-t}\}$$

при $n \rightarrow \infty$ в том и только том случае, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\mathbf{P}\left(\Psi(X_1) > (th_t^d |\ln h_t|)^{1/2}\right) = 0.$$

Для случая $\Psi(\cdot) = \|f\|_{\infty}^{-1/2} I(\cdot \in B_f)$ мы имеем следующим результат.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (K1)–(K3), (F1). Предположим, что $K(0) = \|K\|_{\infty}$, если $B_f \neq \mathbf{R}^d$. Пусть $h_n \searrow 0$, $nh_n^d \nearrow \infty$, $nh_n^d / (|\ln h_n|(\ln n)^2) \rightarrow \infty$ и $|\ln h_n| / \ln \ln n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Также предположим, что для каждого $a > 0$ и всех достаточно больших $T > 0$

$$\sup_{x, y \in D_a, \|x-y\| < 1/T} \left| 1 - \sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}} \right| = o\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Тогда для всех $t \in \mathbf{R}$ мы имеем

$$\mathbf{P}\left(A_{1/h_n}\left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2 \|f\|_{\infty}^{1/2}} \|\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E}\hat{f}_n(\cdot)\|_{\infty} - A_{1/h_n}\right) \leq t\right) \rightarrow \exp\{-e^{-t}\},$$

где $h_n^{-d} \Lambda_{d,\alpha}(A_{1/h_n}) = 1$ и $w(\cdot) = f^{1/2}(\cdot) \|f\|_{\infty}^{-1/2} I(\cdot \in B_f)$.

Это многомерная версия теоремы 7 в [4]. Следующая теорема — это многомерная версия теорем 8 и 9 в [4]. Напомним, что η — показатель регулярно меняющейся функции h_t .

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Если $\beta \in (0, 1/2)$, то существование предела*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\mathbf{P}\left(\Psi(X_1) > (th_t^d |\ln h_t|)^{1/2}\right) = L \in [0, \infty)$$

является необходимым и достаточным условием для сходимости

$$\sqrt{\frac{0.5nh_n^d}{|\ln h_n|}} \left\| \Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E}\hat{f}_n(\cdot)) \right\|_{\infty} \xrightarrow{d} (2^{-1/2} \|K\|_{\infty} Z_{\eta, L}) \vee (\|K\|_2 \|\Psi f^{1/2}\|_{\infty});$$

если же $\beta \in (0, 1]$, то существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\mathbf{P}(\Psi(X_1) > d_t) = L \in [0, \infty)$$

для некоторой строго возрастающей регулярно меняющейся функции d_t с показателем η_1 таким, что $d_t/(th_t^d |\ln h_t|)^{1/2} \rightarrow \infty$ и $d_t \geq ct^{\beta}$ для некоторого $c > 0$, является необходимым и достаточным условием для сходимости:

$$\frac{nh_n^d}{d_n} \left\| \Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E}\hat{f}_n(\cdot)) \right\|_{\infty} \xrightarrow{d} \|K\|_{\infty} Z_{\eta_1, L},$$

где кумулятивная функция распределения неотрицательной случайной величины $Z_{\eta, L}$ равна $\exp\{-Lt^{-2/(1-\eta)}\}$ при $t > 0$ и $Z_{\eta, 0} = 0$.

Теоремы 2 и 3 описывают единственные случаи, когда специальным образом центрированная и нормированная норма $\|\Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \mathbf{E}\hat{f}_n(\cdot))\|_{\infty}$ сходится к невырожденному распределению.

3. Гауссовское приближение. В этом разделе $X(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, будет стационарным центрированным гауссовским полем с ковариационной функцией

$$r(y) = \frac{1}{\|K\|_2} \int_{\mathbf{R}^d} K(y+s)K(s) ds, \quad y \in \mathbf{R}^d.$$

Напомним, что $D_a = \{x \in \mathbf{R}^d: \|x\| \leq a, f(x) \geq 1/a\}$ для $a > 0$. В этом случае мы имеем следующий результат о сильном приближении.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия (K1)–(K3), (H1)–(H2), (D.a), (D.c), (F1) и (W.a). Также будем считать, что Ψ ограничена на B_f . Предположим, что $\alpha_n \nearrow \infty$, $nh_n^{d+1} \nearrow C > 0$ или $nh_n^{d+1} \nearrow \infty$ и*

$$\alpha_n = o\left(h_n^{-\gamma/2} |\ln h_n|^{-1/2} \wedge (nh_n^{d+1})^{1/2} \ln n \wedge (n^{1/d} h_n \ln n)^{1/2} \wedge h_n^{-d/2} \wedge \frac{n^{1/2}}{\ln n} \wedge \frac{(nh_n^d)^{1/2}}{\ln n} \wedge \sqrt{\frac{nh_n^{-d/2}}{\ln n}}\right).$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого достаточно большого $a > 0$ две последовательности

$$\left\{ \alpha_n \left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \sup_{x \in D_a} \left| \Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E}\hat{f}_n(x)) \right| - \alpha_n \right) \right\}$$

и

$$\left\{ \alpha_n \left(\sup_{y \in D_a} \left| \Psi(y) \sqrt{f(y)} X\left(\frac{y}{h_n}\right) \right| - \alpha_n \right) \right\}$$

одновременно сходятся или расходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Из условий (H1)–(H2) и (1) очевидно, что теорема 4 работает с $\alpha_n = A_{1/h_n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы комбинируем результаты работы [12] о локальном принципе инвариантности с подходом, похожим на доказательство в [4, п. 2].

Мы начнем с формулировки леммы, которая слегка модифицирует теорему 1.1 в [12]. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностное распределение Q_0 с плотностью, непрерывной и строго положительной на замкнутом прямоугольном параллелепипеде $\mathcal{R}$ из $\mathbf{R}^d$. Обозначим

$$\nu_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\delta_{Y_i} - Q_0).$$

Пусть $\mathcal{S}$ — это класс функций, отображающих $\mathcal{R}$ в $[-1, 1]$. Для вероятностного закона Q на $\mathcal{R}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ обозначим наибольшую мощность ε -разделенной сети для $\mathcal{S}$ в $L_1(Q)$ через $N(\varepsilon, \mathcal{S}, Q)$. Теперь обозначим $N(\varepsilon, \mathcal{S}) = \sup_Q N(\varepsilon, \mathcal{S}, Q)$, где супремум берется по всем вероятностным законам Q на $\mathcal{R}$ с конечным носителем. Если

$$N(\varepsilon, \mathcal{S}) \leq C(\mathcal{S}) \varepsilon^{-d(\mathcal{S})} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1) \quad (3)$$

с некоторыми положительными константами $C(\mathcal{S})$ и $d(\mathcal{S})$, то $\mathcal{S}$ называется классом функций Вапника–Червоненкиса. Подробности об энтропийных числах, классах Вапника–Червоненкиса и их свойствах см. [13].

Для функции $g \in \mathcal{S}$ обозначим

$$K(g, \mathcal{R}) = \sup_v \frac{1}{\|v\|_\infty} \left| \int_{\mathbf{R}^d} g(x) \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right|,$$

где супремум берется по всем бесконечно дифференцируемым функциям $v: \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ с компактным носителем в $\mathcal{R}$ и $\|v\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|v(x)\|_2$. Класс $\mathcal{S}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(\text{UBV}) \quad K(\mathcal{S}) := \sup_{g \in \mathcal{S}} K(g, \mathcal{R}) < \infty;$$

(LUBV) для любого $a \in (0, 1)$, любого прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$, a раз пропорционального $\mathcal{R}$ с ребрами, параллельными ребрам $\mathcal{R}$, и любой $g \in \mathcal{S}$ выполнено неравенство $K(g, \mathcal{C}) \leq K_{\text{loc}}(\mathcal{S})a^{d-1}$ для некоторой константы $K_{\text{loc}}(\mathcal{S}) \geq 1$, зависящей только от $\mathcal{S}$;

(М) существуют пространство Суслина V и отображение $\mathcal{T}$ из V на $\mathcal{S}$ такие, что $(x, y) \mapsto \mathcal{T}(y)x$ измеримо на $\mathbf{R}^d \times V$.

Говорят, что у $\mathcal{S}$ равномерно ограниченная вариация, если выполнено (UBV). Исходя из таких же соображений, говорят, что у $\mathcal{S}$ локально равномерно ограниченная вариация, если выполнено (LUBV).

Всюду далее B_{n, Q_0} обозначает броуновский мост, индексированный функциями из $\mathcal{S}$, с почти наверное непрерывными траекториями на $(\mathcal{S}, P)$, т.е. центрированное гауссовское поле с ковариационной функцией

$$(g_1, g_2) \rightarrow \mathbf{E}_{Q_0}(g_1(Y_1)g_2(Y_1)) - \mathbf{E}_{Q_0}(g_1(Y_1))\mathbf{E}_{Q_0}(g_2(Y_1)).$$

Предполагается, что вероятностное пространство достаточно богато.

Лемма 1. Пусть $d \geq 2$ и Q_0 — сосредоточенное на замкнутом прямоугольном параллелепипеде $\mathcal{R}$ вероятностное распределение с непрерывной строго положительной плотностью. Пусть $\mathcal{S}$ будет классом функций Вайника–Червоненкиса из $\mathcal{R}$ в $[-1, 1]$, удовлетворяющим условию измеримости (М), условию (UBV) с некоторой константой $K(\mathcal{S})$ и энтропийному условию (3) с некоторыми положительными константами $C(\mathcal{S})$ и $d(\mathcal{S})$. Тогда для каждого $n \geq 1$ существует броуновский мост B_{n, Q_0} , индексированный функциями из $\mathcal{S}$, с почти наверное непрерывными траекториями на $(\mathcal{S}, P)$ такой, что для любых $t \geq C \ln n$

$$\mathbf{P} \left(\sqrt{n} \sup_{g \in \mathcal{S}} |\nu_n(g) - B_{n, Q_0}(g)| \geq C \sqrt{n^{(d-1)/d} K(\mathcal{S}) t} + C c_n t \right) \leq e^{-t},$$

где $c_n = \sqrt{\ln n}$ в общем случае, $c_n = \sqrt{K_{\text{loc}}(\mathcal{S})}$ при условии (LUBV), а C — положительная константа, зависящая от d , $d(\mathcal{S})$ и $C(\mathcal{S})$.

Доказательство. Заметим, что любое аффинное преобразование $\mathcal{T}: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, переводящее $\mathcal{R}$ в $[0, 1]^d$, является диффеоморфизмом. Следовательно, $\mathcal{T}(Y_1), \dots, \mathcal{T}(Y_n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение с непрерывной строго положительной на $[0, 1]^d$ плотностью. Применение теоремы 1.1 из [12] дает требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е. Лемма 1 остается верной, если вместо замкнутого прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{R}$ использовать замкнутое множество в $\mathbf{R}^d$, диффеоморфное кубу $[0, 1]^d$.

Приведенная лемма лежит в основе доказательства теоремы 4. Однако по условию (F1) множество B_f , где плотность f положительна,

является объединением замкнутых прямоугольных параллелепипедов и квадрантов, что не позволяет нам применить лемму напрямую. Естественно, мы обрезаем B_f на бесконечностях и разбиваем то, что осталось, на прямоугольные параллелепипеды, где лемма 1 применима. Мы сталкиваемся с дополнительными трудностями, которые преодолеваем с помощью классического результата Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади и стандартных неравенств на хвосты эмпирических и гауссовских процессов. Далее следуют технические детали. Для простоты изложения они поделены на несколько шагов.

1. Для фиксированного $a > 0$ определим классы функций

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}}_{b_1, b_2} &= \left\{ \Psi(x) K\left(\frac{x - \cdot}{h}\right) : x \in D_a, b_1 \leq h \leq b_2 \right\}, \quad b_2 \geq b_1 > 0, \\ \widetilde{\mathcal{F}}_n &:= \widetilde{\mathcal{F}}_{h_n/2, 2h_n} = \left\{ \Psi(x) K\left(\frac{x - \cdot}{h}\right) : x \in D_a, \frac{h_n}{2} \leq h \leq 2h_n \right\}.\end{aligned}$$

Пусть $x \in D_a$, тогда функция $K((x - t)/h)$, $t \in \mathbf{R}^d$, может быть отлична от нуля только для таких t , что $|x_i - t_i| \leq 1/2$, $i = 1, \dots, d$. Таким образом, носитель любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ вкладывается в $\{t \in \mathbf{R}^d : \|t\|^2 \leq 2a^2 + 2dh_n^2\}$. В силу условия (D.b) при данном $\delta = 1$ существуют $c > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что $f(t)/f(x) \geq f(x)/c$, если $\sqrt{d}h_n \leq h_0$, и $f(t) \geq 1/(ca^2)$. Таким образом, если $c^2a^4 \geq 2a^2 + 2h_0$ и n достаточно большое, то носитель любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ вкладывается в множество D_{ca^2} .

Заметим, что из-за условия (F1) множество D_{ca^2} можно покрыть объединением конечного числа непересекающихся прямоугольных параллелепипедов, лежащих в B_f , которые мы обозначим через B_m , $m = 1, \dots, M$. Пусть $B_0 = D_{ca^2}$.

2. Для $m = 0, \dots, M$ определим n_m как число попавших в B_m случайных величин $X_1, \dots, X_n$, которые перенумерованы и переобозначены как $Y_i^m \in B_m$, $i = 1, \dots, n_m$, $m = 0, \dots, M$. Пусть $p_m = P(B_m)$, $m = 0, \dots, M$. Введем случайную величину $Z := (n_0, \dots, n_M)$. Заметим, что она имеет полиномиальное распределение с параметрами $(n, p_0, \dots, p_M)$. Более того, отметим, что для каждого $m = 0, \dots, M$ случайные величины Y_i^m , $i = 1, \dots, n_m$, — независимы и одинаково распределены на B_m с распределением P_m . Кроме того векторы $(Y_1^m, \dots, Y_{n_m}^m)$, $m = 0, \dots, M$, независимы. По построению для любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ мы имеем

$$P_m g = \int g(y) dP_m(y) = \frac{1}{p_m} \int_{B_m} g(y) dP(y), \quad m = 0, \dots, M.$$

Определим

$$\nu_{n,P} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\delta_{X_i} - P),$$

$$\tilde{\nu}_{n_m, P_m} = n_m^{-1/2} \sum_{i=1}^{n_m} (\delta_{Y_i^m} - P_m), \quad m = 0, \dots, M.$$

Тогда условно на $Z = (n_0, \dots, n_M)$ для любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ мы имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \nu_{n, P}(g) &= \sum_{i=1}^n g(X_i) - nPg = \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^M g(X_i) I_{B_m}(X_i) - \sum_{m=0}^M nP(g I_{B_m}) \\ &= \sum_{m=0}^M \left(\sum_{i=1}^n g(X_i) I_{B_m}(X_i) - np_m P_m g \right) + \sum_{m=0}^M (n_m - np_m) P_m g \\ &= \sum_{m=0}^M [\sqrt{n_m} \nu_{n_m, P_m}(g) + (n_m - np_m) P_m g]. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Для $m = 1, \dots, M$ мы можем применить лемму 1, поскольку плотность f строго положительна на замыкании B_m и класс $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ удовлетворяет условиям (M), (UBV) и (LUBV). То, что $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ удовлетворяет условию измеримости (M), очевидно. Более того, он является классом Вапника–Червоненкиса в силу условия (K) и равномерной ограниченности функции Ψ на D_a . Тогда для всех вероятностных мер Q (см. в [5, с. 2573])

$$N(\varepsilon, \widetilde{\mathcal{F}}_n, L_2(Q)) \leq C \varepsilon^{-V} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

где $C > 0$ — константа. Для любого $\varepsilon > 0$, любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_{0,1}$ и куба $\mathcal{C} \subset D_a$ с ребрами длины ε мы имеем

$$\begin{aligned} K(g, \mathcal{C}) &= \sup_v \frac{1}{\|v\|_\infty} \left| \int_{\mathcal{C}} g(x) \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sup_v \frac{1}{\|v\|_\infty} \left| \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i(x) dx \right| \\ &\leq \sup_v \frac{1}{\|v\|_\infty} h^{d-1} \Psi(s) \left| \int \sum_{i=1}^d \frac{\partial K}{\partial z_i} v_i(s + zh) dz \right| \\ &\leq \sup_v \Psi(s) h^{d-1} \int \left| \sum_{i=1}^d \frac{\partial K(z)}{\partial z_i} \right| dz \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^d \leq \sup_v C_K \Psi(s) h^{-1} \varepsilon^d \\ &\leq C_K \Psi(s) h^{-1} \varepsilon^{d-1} \varepsilon \leq C_K \Psi(s) \varepsilon^{d-1} S_0 \\ &\leq C_K S_0 \sup_{t \in D_a} |\Psi(t) f^\beta(t)| a^\beta \varepsilon^{d-1} = K_{\text{loc}}(\widetilde{\mathcal{F}}_{0,1}) \varepsilon^{d-1} \end{aligned} \quad (5)$$

для достаточно больших n , где супремум берется по всем бесконечно дифференцируемым функциям $v: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}^d$ с компактным носителем в $\mathcal{C}$ и S_0 — максимальная длина ребра для куба, помещающегося внутри носителя K (в третьей строке (5) мы воспользовались условием $\int_{\mathbf{R}^d} |\sum_{i=1}^d \partial K(z)/\partial z_i| dz \leq C_K$). Заметим, что $K_{\text{loc}}(\widetilde{\mathcal{F}}_{0,1}) = C_K S_0 \|\Psi f^\beta\|_{D_a} a^\beta > 1$ для достаточно больших a . Таким образом, у $\widetilde{\mathcal{F}}_{0,1}$ локально равномерно ограниченная вариация. Более того, условие

(LUBV) выполнено с константой $K_{\text{loc}}(\widetilde{\mathcal{F}}_{0,1})$. Используя рассуждения, подобные (5), можно показать, что

$$K_{\text{loc}}(\widetilde{\mathcal{F}}_n) = C_K S_0 \sup_{t \in D_a} |\Psi(t) f^\beta(t)| a^\beta \cdot 2h_n^{-1},$$

$$K(\widetilde{\mathcal{F}}_n) \leq C_K \sup_{t \in D_a} |\Psi(t) f^\beta(t)| a^\beta (2h_n)^{d-1}.$$

4. Условно на события $Z = (n_0, \dots, n_M)$ эмпирические процессы $\widetilde{v}_{n_m, P_m}$, $m = 0, \dots, M$, независимы и P_m , $m = 1, \dots, M$, удовлетворяют лемме 1. Тогда условно на события $Z = (n_0, \dots, n_M)$ мы построим независимые броуновские мосты G_{n_m, P_m} , $m = 1, \dots, M$, индексированные функциями из $\widetilde{\mathcal{F}}_n$. Они являются центрированными гауссовскими полями с соответствующими ковариационными функциями

$$(g_1, g_2) \rightarrow \mathbf{E}_{P_m}(g_1(Y_1^m)g_2(Y_1^m)) - \mathbf{E}_{P_m}(g_1(Y_1^m))\mathbf{E}_{P_m}(g_2(Y_1^m)),$$

где $m = 1, \dots, M$. Условно на события $Z = (n_0, \dots, n_M)$ определим B_{n_m, P_m} , $m = 1, \dots, M$, — независимые броуновские движения, индексированные функциями из $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ — из соотношения $G_{n_m, P_m} = B_{n_m, P_m} - P_m g B_{n_m, P_m}(1)$, $m = 1, \dots, M$. Они являются центрированными гауссовскими полями с соответствующими ковариационными функциями

$$(g_1, g_2) \rightarrow \mathbf{E}_{P_m}(g_1(Y_1^m)g_2(Y_1^m)), \quad m = 1, \dots, M.$$

При $m = 0$ мы не можем применить лемму 1, поскольку f обращается в нуль на B_0 . Мы определим броуновский мост, индексированный функциями из $\widetilde{\mathcal{F}}_n$, как $G_{n_0, P_0} = 0$, тогда формально его ковариационная функция удовлетворяет выражению выше с $m = 0$. Он также независим от всех G_{n_m, P_m} , $m = 1, \dots, M$.

Пусть γ_m , $m = 0, \dots, M$, — гауссовские случайные величины с нулевыми средними значениями и ковариационной матрицей $\text{Cov}(\gamma_m, \gamma_{m'}) = p_m(I(m = m') - p_{m'})$, $m, m' = 0, \dots, M$, независимые от последовательности процессов G_{n_m, P_m} и B_{n_m, P_m} , $m = 0, \dots, M$. Затем мы определим броуновский мост, индексированный функциями из $\widetilde{\mathcal{F}}_n$, формулой

$$G_{n, P} = \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} G_{n_m, P_m} + \sum_{m=0}^M \gamma_m P_m. \quad (6)$$

Заметим, что $G_{n, P}$ — центрированное гауссовское поле с ковариационной функцией

$$(g_1, g_2) \rightarrow \mathbf{E}_P(g_1(X_1)g_2(X_1)) - \mathbf{E}_P(g_1(X_1))\mathbf{E}_P(g_2(X_1)).$$

Введем также броуновское движение, индексированное функциями из $\widetilde{\mathcal{F}}_n$, формулой

$$B_{n, P} = \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}.$$

Оно является центрированным гауссовским полем с ковариационной функцией

$$(g_1, g_2) \rightarrow \mathbf{E}_P(g_1(X_1)g_2(X_1)).$$

Естественно, имеем $G_{n,P} \stackrel{d}{=} B_{n,P} - PgB_{n,P}(1)$.

Тогда для любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$

$$\begin{aligned} G_{n,P}(g) &\stackrel{d}{=} B_{n,P}(g) - PgB_{n,P}(1) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}(g) - \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}(1) \sum_{m'=0}^M p_{m'} P_{m'} g \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} [B_{n_m, P_m}(g) - P_m g B_{n_m, P_m}(1)] + \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}(1) (P_m g - P g) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{m=0}^M \sqrt{p_m} G_{n_m, P_m} + \sum_{m=0}^M P_m g \left[\sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}(1) - p_m \sum_{m'=0}^M \sqrt{p_{m'}} B_{n_{m'}, P_{m'}}(1) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\sqrt{p_m} B_{n_m, P_m}(1) - p_m \sum_{m'=0}^M \sqrt{p_{m'}} B_{n_{m'}, P_{m'}}(1), \right. \\ \left. \sqrt{p_l} B_{n_l, P_l}(1) - p_l \sum_{l'=0}^M \sqrt{p_{l'}} B_{n_{l'}, P_{l'}}(1) \right) = p_m (I(m=l) - p_l) \end{aligned}$$

для $m, l = 0, \dots, M$.

5. При фиксированном $Z = (n_0, \dots, n_M)$ для любых положительных чисел $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{M+2}$ мы имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left(\sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |\sqrt{n} \nu_{n,P}(g) - \sqrt{n} G_{n,P}(g)| \geq \sum_{m=0}^{M+2} \tau_m \mid Z = z \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\sum_{m=0}^M \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |\sqrt{n_m} \nu_{n_m, P_m}(g) - \sqrt{n_m} G_{n_m, P_m}(g)| \right. \\ &\quad + \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M [\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}] G_{n_m, P_m}(g) \right| \\ &\quad + \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M [n_m - np_m - \sqrt{n} \gamma_m] P_m g \right| \geq \sum_{m=0}^{M+2} \tau_m \mid Z = z \right) \\ &\leq \sum_{m=0}^M \mathbf{P} \left(\sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |\sqrt{n_m} \nu_{n_m, P_m}(g) - \sqrt{n_m} G_{n_m, P_m}(g)| \geq \tau_m \mid Z = z \right) \\ &\quad + \mathbf{P} \left(\sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M [\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}] G_{n_m, P_m}(g) \right| \geq \tau_{M+1} \mid Z = z \right) \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M [n_m - np_m - \sqrt{n}\gamma_m] P_m g \right| \geq \tau_{M+2} \mid Z = z \right). \quad (7)$$

Далее мы рассмотрим слагаемые в правой части (7) по отдельности.

Используя лемму 1 при заданном $Z = (n_0, \dots, n_M)$ для любого $t_m \geq C \ln n_m$, мы получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |\sqrt{n_m} \nu_{n_m, P_m}(g) - \sqrt{n_m} G_{n_m, P_m}(g)| \right. \\ & \quad \left. \geq C n_m^{(d-1)/(2d)} h_n^{(d-1)/2} \sqrt{t_m} + C t_m h_n^{-1/2} \mid Z = z \right) \leq e^{-t_m}, \end{aligned} \quad (8)$$

где C — положительная константа. Мы берем $t_m = C_1 \ln n$ для достаточно большого $C_1 > 0$, что превращает $\tau_m = C n^{(d-1)/(2d)} h_n^{(d-1)/2} \sqrt{\ln n} + C \ln n h_n^{-1/2}$ для $m = 1, \dots, M$ в (7).

Для процесса ν_{n_0, P_0} мы можем применить оценку хвоста (2.14.9) в [13] для эмпирических процессов, так что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |\nu_{n_0, P_0}(g)| \geq t \mid Z = z \right) \leq C t^V \exp\{-2t^2\} \quad \forall t > 0,$$

где $C > 0$ — произвольная константа. Положим $t = h_n^d$. Тогда

$$\mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |\nu_{n_0, P_0}(g)| \geq \frac{\tau_0}{\sqrt{n_0}} \mid Z = z \right) \leq C h_n^{dV} \exp\{-2h_n^{2d}\},$$

где $\tau_0 = \sqrt{n} h_n^d$.

6. Оценим последнее слагаемое в правой части (7):

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M [n_m - np_m - \sqrt{n}\gamma_m] P_m g \right| \geq \tau_{M+2} \mid Z = z \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{m=0, \dots, M} |n_m - np_m - \sqrt{n}\gamma_m| \sum_{m'=0}^M \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} P_{m'} g \geq \tau_{M+2} \mid Z = z \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{m=0, \dots, M} |n_m - np_m - \sqrt{n}\gamma_m| \sum_{m'=0}^M C p_{m'}^{-1} \geq \tau_{M+2} \mid Z = z \right) \\ & \leq \sum_{m=0}^M \mathbf{P}(|n_m - np_m - \sqrt{n}\gamma_m| \geq C_5 \tau_{M+2} \mid Z = z) \end{aligned} \quad (9)$$

для некоторых положительных констант C, C_5 .

Пусть $U_1, \dots, U_n$ — независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины, и пусть W_n , $n \geq 1$, — стандартные броуновские мосты на $[0, 1]$. Определим соответствующий эмпирический процесс

$$\zeta_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n [I(U_i \in [0, t]) - t], \quad t \in [0, 1].$$

Классический результат Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади утверждает, что существует версия W_n , определенная на том же вероятностном пространстве, такая, что для любого $u > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{n} \sup_{t \in [0,1]} |\zeta_n(t) - W_n(t)| > u + C_{kmt} \ln n\right) \leq L \exp\{-\theta u\},$$

где C_{kmt}, L, θ — абсолютные положительные константы. Заметим, что для любого $m = 0, \dots, M$

$$\sqrt{n} \zeta_n\left(\sum_{k=0}^m p_k\right) - \sqrt{n} \alpha_n\left(\sum_{k=0}^{m-1} p_k\right) \stackrel{d}{=} n_m - np_m$$

и

$$W_n\left(\sum_{k=0}^m p_k\right) - W_n\left(\sum_{k=0}^{m-1} p_k\right) \stackrel{d}{=} \gamma_m,$$

где $p_{-1} = 0$, т.е. мы можем продолжить цепочку оценок (9) следующим образом

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \mathbf{P}\left(|n_m - np_m - \sqrt{n} \gamma_m| \geq C_5 \tau_{M+2} \mid Z = z\right) \\ & \leq \sum_{m=0}^M \mathbf{P}\left(2\sqrt{n} \sup_{t \in [0,1]} |\zeta_n(t) - W_n(t)| \geq C_5 \tau_{M+2} \mid Z = z\right) \\ & \leq ML \exp\left\{-\frac{\theta C_5 \tau_{M+2}}{2}\right\} n^{-C_{kmt}} \end{aligned}$$

для любого $\tau_{M+2} > 2C_{kmt} \ln n$.

7. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (7). Оно может быть ограничено сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} \left| \sum_{m=0}^M (\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}) G_{n_m, P_m}(g) \right| \geq \tau_{M+1} \mid Z = z\right) \\ & \leq \mathbf{P}\left(\sup_{m'=0, \dots, M} \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_{m'}, P_{m'}}(g)| \sum_{m=0}^M |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}| \geq \tau_{M+1} \mid Z = z\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Надо рассмотреть супремум и сумму по отдельности.

Чтобы разобраться с супремумом в (10), мы применяем неравенство Бореля–Цирельсона–Судакова в форме (3.2) в [8] к G_{n_m, P_m} , $m = 0, \dots, M$, и получаем для любого $t > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_m, P_m}(g)| \geq t \mid Z = z\right) \leq \exp\left\{-\frac{2(t - E_{n_m})^2}{\pi^2 \sigma_{n_m}^2}\right\},$$

где $\mathbf{E} \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_m, P_m}(g)| \leq E_{n_m}$ и $\sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} \mathbf{D}(G_{n_m, P_m}(g)) \leq \sigma_{n_m}^2$.

Заметим, что для любой функции $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ и любого $m = 0, \dots, M$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(G_{n_m}(g)) &= p_m^{-1} \int_{B_m} g^2(t) f(t) dt - \left(p_m^{-1} \int_{B_m} g(t) f(t) dt \right)^2 \\ &= p_m^{-1} \Psi^2(x) \left[\int_{(x-B_m)/h} K^2(y) f(x-hy) h^d dy \right. \\ &\quad \left. - p_m^{-1} \left(\int_{(x-B_m)/h} K(y) f(x-hy) h^d dy \right)^2 \right] \\ &\leq p_m^{-1} h^d \sup_{t \in D_a} |\Psi(t)|^2 [\|K\|_2^2 \|f\|_\infty + p_m^{-1} h^{2d} \|K\|_1^2 \|f\|_\infty^2] \\ &\leq 2p_m^{-1} \sup_{t \in D_a} |\Psi(t)|^2 \|K\|_2^2 \|f\|_\infty h^d \end{aligned}$$

для любых $x \in D_a$ и $h \in [h_n/2, 2h_n]$. Тогда

$$\sigma_m^2 = 2^{d+1} p_m^{-1} \sup_{t \in D_a} |\Psi(t)|^2 \|K\|_2^2 \|f\|_\infty h_n^d = C_\sigma p_m^{-1} h_n^d.$$

Для нахождения E_{n_m} мы воспользуемся простым наблюдением

$$\mathbf{E} \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_m}(g)| \leq \mathbf{E} \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |B_{n_m}(g)| + p_m^{-1} \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} \left| \int_{B_m} g(x) f(x) dx \right| \mathbf{E} |B_{n_m}(1)|$$

в сочетании с неравенством в духе Дадли

$$\mathbf{E} \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{F}}_n} |B_{n_m}(g)| \leq \mathbf{E} |B_{n_m}(g_0)| + C \int_0^\infty \sqrt{\ln D(\varepsilon, d_{B_{n_m}})} d\varepsilon,$$

где $D(\varepsilon, d_{B_{n_m}})$ — максимальное число ε -разделенных точек по метрике

$$d_{B_{n_m}}(g_1, g_2) = \mathbf{D}^{1/2}(B_{n_m}(g_1) - B_{n_m}(g_2)), \quad g_{1,2} \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$$

(см. [13, с. 101]). Поскольку

$$d_{B_{n_m}}^2(g_1, g_2) = p_m^{-1} \int_{B_m} f(x) \left(\Psi(s_1) K\left(\frac{s_1 - x}{h_1}\right) - \Psi(s_2) K\left(\frac{s_2 - x}{h_2}\right) \right)^2 dx$$

для соответствующих $s_{1,2} \in D_a$ и $h_{1,2} \in [h_n/2, 2h_n]$ и выполнены неравенства $N(\varepsilon, d) \leq D(\varepsilon, d) \leq N(\varepsilon/2, d)$, мы имеем

$$D(\varepsilon, d_{B_{n_m}}) \leq C\varepsilon^{-V} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad D(\varepsilon, d_{B_{n_m}}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sqrt{\ln D(\varepsilon, d_{B_{n_m}})} d\varepsilon &\leq C \int_0^{h_n^{-1}} \sqrt{\ln C - V \ln \varepsilon} d\varepsilon \\ &\leq C \int_{\ln(Ch_n^V)/V}^\infty \sqrt{Vt} e^{-t} dt \leq C\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $m = 0, \dots, M$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |B_{n_m}(g)| &\leq \mathbf{E} |B_{n_m}(g_0)| + C_0 \\ &\leq p_m^{-1/2} \Psi(s_0) \left(\int_{B_m} K^2 \left(\frac{s_0 - x}{h_0} \right) f(x) dx \right)^{1/2} + C_0 \\ &= E < \infty. \end{aligned}$$

В результате мы получаем оценку хвоста распределения

$$\mathbf{P} \left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_m, P_m}(g)| \geq t \mid Z = z \right) \leq \exp \left\{ - \frac{2(t - E)^2 p_m}{\pi^2 C_\sigma h_n^d} \right\} \quad (11)$$

для любого $t > 0$ и любого $m = 0, \dots, M$.

Чтобы разобраться с суммой в (10), мы используем результат шага 6. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}| &\leq M \sup_{m=0, \dots, M} |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m} - \sqrt{n} \gamma_m| \\ &\quad + M \sqrt{n} \sup_{m=0, \dots, M} |\gamma_m|, \end{aligned}$$

так что из шага 6 мы имеем для любых $t_1, t_2 > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left(\sum_{m=0}^M |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}| \geq t_1 + t_2 \mid Z = z \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{m=0, \dots, M} |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m} - \sqrt{n} \gamma_m| \geq \frac{t_1}{M} \mid Z = z \right) \\ &\quad + \mathbf{P} \left(\sqrt{n} \sup_{m=0, \dots, M} |\gamma_m| \geq \frac{t_2}{M} \mid Z = z \right) \\ &\leq L \exp \left\{ - \frac{\theta t_1}{M} \right\} n^{-C_{kmt}} \\ &\quad + \mathbf{P} \left(\sup_{m=0, \dots, M} \left| W_n \left(\sum_{k=0}^m p_k \right) - W_n \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_k \right) \right| \geq n^{-1/2} \frac{t_2}{M} \mid Z = z \right) \\ &\leq L \exp \left\{ - \frac{\theta t_1}{M} \right\} n^{-C_{kmt}} + \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |W_n(t)| \geq 2n^{-1/2} \frac{t_2}{M} \mid Z = z \right) \\ &\leq L \exp \left\{ - \frac{\theta t_1}{M} \right\} n^{-C_{kmt}} + C \exp \left\{ - \frac{8t_2^2}{M^2} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $t_1 = h_n^{d/2}$ и $t_2 = C\sqrt{\ln n}$ для некоторого $C > 0$. Положим $\tau_{M+1} = (h_n^{d/2} + C\sqrt{\ln n})(E + \sqrt{h_n^d \ln n})$, тогда

$$\mathbf{P} \left(\sup_{m'=0, \dots, M} \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_{m'}, P_{m'}}(g)| \sum_{m=0}^M |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}| \geq \tau_{M+1} \mid Z = z \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^M |\sqrt{n_m} - \sqrt{np_m}| \geq h_n^{d/2} + C\sqrt{\ln n} \mid Z = z\right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left(\sup_{m'=0,\dots,M} \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |G_{n_{m'}, P_{m'}}(g)| \geq E + \sqrt{h_n^d \ln n} \mid Z = z\right) \\
&\leq L \exp\left\{-\frac{\theta h_n^{d/2}}{M}\right\} n^{-C_{kmt}} + Cn^{-8C^2/M^2} + n^{-C}
\end{aligned}$$

для некоторой положительной конечной константы C .

8. Складывая все части воедино и полагая $\tau_0 = \sqrt{n} h_n^d$,

$$\begin{aligned}
\tau_m &= Cn^{(d-1)/(2d)} h_n^{(d-1)/2} \sqrt{\ln n} + Ch_n^{-1/2} \ln n, \quad m = 1, \dots, M, \\
\tau_{M+1} &= (h_n^{d/2} + \sqrt{\ln n})(E + Ch_n^{d/2} \sqrt{\ln n}), \quad \tau_{M+2} = 3C_{kmt} \ln n,
\end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |\sqrt{n} \nu_{n,P}(g) - \sqrt{n} G_{n,P}(g)| \geq \sum_{m=0}^{M+2} \tau_m\right) \\
&\leq Ch_n^{dV} \exp\{-2h_n^{2d}\} + Mn^{-C_1} + n^{-C} + L \exp\left\{-\frac{\theta h_n^C}{M}\right\} n^{-C_{kmt}} \\
&\quad + n^{-(1+1.5\theta C_5)C_{kmt}} \leq n^{-C_8}
\end{aligned}$$

для некоторого достаточно большого $C_8 > 0$, поскольку $n^{-\eta_1/d} \leq h_n \leq n^{-\eta_0/d}$ из условия (H2). Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\alpha_n h_n^{-d/2} \sup_{g \in \tilde{\mathcal{F}}_n} |\nu_{n,P}(g) - G_{n,P}(g)| \geq \alpha_n h_n^{d/2} + MC\alpha_n h_n^{-1/2} n^{-1/(2d)} \sqrt{\ln n}\right. \\
&\quad + MC\alpha_n h_n^{-(d+1)/2} n^{-1/2} \ln n + E\alpha_n n^{-1/2} + E\alpha_n h_n^{-d/2} n^{-1/2} \sqrt{\ln n} \\
&\quad \left.+ C\alpha_n h_n^{d/2} n^{-1/2} \sqrt{\ln n} + C\alpha_n n^{-1/2} \ln n + 3C_{kmt} \alpha_n h_n^{-d/2} n^{-1/2} \ln n\right) \leq n^{-C_8}.
\end{aligned}$$

Далее следует, что последовательности

$$\alpha_n(h_n^{-d/2} \|\nu_{n,P}\|_{\tilde{\mathcal{F}}_n} - \alpha_n) \quad \text{и} \quad \alpha_n(h_n^{-d/2} \|G_{n,P}\|_{\tilde{\mathcal{F}}_n} - \alpha_n)$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся или расходятся по распределению одновременно, если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= o(h_n^{-d/2}), \quad \alpha_n = o(\sqrt{n^{1/d} h_n \ln n}), \quad \alpha_n = o(\sqrt{n h_n^{d+1} \ln n}), \\
\alpha_n &= o\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right), \quad \alpha_n = o\left(\frac{\sqrt{n h_n^d}}{\ln n}\right), \quad \alpha_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{h_n^{d/2} \ln n}}\right).
\end{aligned}$$

9. Оставшаяся часть доказательства похожа на рассуждения в [4], где можно найти подробности. Мы имеем

$$\mathbf{E} \|\alpha_n h_n^{-d/2} (G_{n,P} - B_{n,P})\|_{\mathcal{F}_n} \leq \alpha_n h_n^{d/2} \|K\|_1 \|f\|_\infty \sup_{t \in D_a} |\Psi(t)|,$$

откуда вытекает, что если $\alpha_n = o(h_n^{-d/2})$, то последовательности

$$\alpha_n(h_n^{-d/2}\|G_{n,P}\|_{\mathcal{F}_n} - \alpha_n) \quad \text{и} \quad \alpha_n(h_n^{-d/2}\|B_{n,P}\|_{\mathcal{F}_n} - \alpha_n)$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся или расходятся по распределению одновременно.

10. Для любого $x \in D_a$ определим процесс

$$Y_n(\Psi(x)\sqrt{f(x)}K\left(\frac{x-\cdot}{h_n}\right)) = h_n^{-d/2}\Psi(x)\sqrt{f(x)}\int_{\mathbf{R}^d} K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)dB(s),$$

где B — это стандартное броуновское движение на $\mathbf{R}^d$. Заметим, что для любого $x \in D_a$

$$h_n^{-d/2}B_{n,P}(\Psi(x)K\left(\frac{x-\cdot}{h_n}\right)) = h_n^{-d/2}\Psi(x)\int_{\mathbf{R}^d} K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\sqrt{f(s)}dB(s).$$

Применяя неравенство Бореля–Цирельсона–Судакова и энтропийную оценку Дадли для различных функциональных классов Вапника–Червоненкиса, нетрудно показать, что если $\alpha_n = o(h_n^{-\gamma/2}|\ln h_n|^{-1/2})$, то последовательности

$$\alpha_n(h_n^{-d/2}\|B_{n,P}\|_{\mathcal{F}_n} - \alpha_n) \quad \text{и} \quad \alpha_n(\|Y_n\|_{\mathcal{F}_n} - \alpha_n)$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся или расходятся по распределению одновременно. Напомним, что γ — показатель из условия Гёльдера функции f , введенный в предположении (F1). См. подробности в [4].

Наконец, легко видеть, что для любого $x \in D_a$

$$Y_n(\Psi(x)\sqrt{f(x)}K\left(\frac{x-\cdot}{h_n}\right)) \stackrel{d}{=} \Psi(x)\sqrt{f(x)}X\left(\frac{x}{h_n}\right),$$

где $X(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, — центрированное гауссовское поле с ковариационной функцией

$$r(y) = \int_{\mathbf{R}^d} K(y+s)K(s)ds, \quad y \in \mathbf{R}^d.$$

И поскольку $\sup_{g \in \mathcal{F}_n} |Y_n(g)| = \sup_{y \in D_a} |\Psi(y)\sqrt{f(y)}X(y/h_n)|$, то доказательство теоремы 4 завершено.

4. Доказательство теоремы 1. Данная теорема обобщает результаты В. И. Питербарга [11] для супремумов стационарных гауссовских полей на компактных множествах до всего пространства $\mathbf{R}^d$. Специальным образом выбранная весовая функция необходима, чтобы обеспечить сходимость. В доказательстве мы собираемся эксплуатировать результат для компактных множеств, который мы формулируем ниже для полноты. Но сначала введем некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $k \in \mathbf{N}$ и пусть $l = (l_1, \dots, l_{k+1})$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ — мульти-индексы такие, что $1 = l_1 < \dots < l_{k+1} = d+1$ и $\tau_1, \dots, \tau_k \in (0, 2]$. Для $x \in \mathbf{R}^d$ обозначим

$$\|x\|_\tau := \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=l_i}^{l_{i+1}-1} x_j^2 \right)^{\tau_i/2}.$$

Пусть $\varphi(u)$, $u \in \mathbf{R}$, — плотность стандартной нормальной величины.

Следующее утверждение — это лемма 7.1 в сочетании со следствием 7.3 в [5]. См. также теорему 8 в [9, гл. 14].

Лемма 2. Пусть ковариационная функция $\rho(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, центрального гауссовского однородного поля $Y(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, ведет себя около 0 как

$$\rho(x) = 1 - \|x\|_\tau + o(\|x\|_\tau), \quad \|x\|_\tau \rightarrow 0,$$

для некоторых k, τ, l . Также предположим, что $\sup_{\|x\| > \varepsilon} |\rho(x)| < 1$ для всех $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого замкнутого измеримого по Жордану множества S ненулевой меры с диаметром, не превышающим δ_0 , мы имеем при $u \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in S} |Y(x)| > u \right\} = 2H_{\tau, l} \text{meas}(S) u^2 \sum_{i=1}^k (l_{i+1} - l_i)^{\tau_i - 1} \varphi(u)(1 + o(1)),$$

где $H_{\tau, l} > 0$ — это константа, зависящая только от τ и l .

Заметим, что для $k = 1$ мы имеем $l = (1, d+1)$, $\|x\|_\tau = \|x\|^\tau$ и $H_{\tau, l} = H_\tau$ — константа Пикандса, определенная в разделе 1. Мы воспользуемся леммой 2 для случая $k = 1$ на этапах 4 и 5 и для случая $k = 2$ на этапе 6.

Доказательство теоремы 1 весьма техническое и замысловатое, поэтому мы разделили его на несколько этапов для лучшего изложения.

1. Для фиксированного $t \in \mathbf{R}$ обозначим $u_T = t/A_T + A_T$. Тогда при $T \rightarrow \infty$

$$T^d \Lambda_{d, \alpha}(u_T) \rightarrow e^{-t}.$$

Доказательство почти идентично шагу 1 в [4].

2. Мы можем заменить функции $w(s/T)$, $s \in \mathbf{R}^d$, в теореме 1 на следующие:

$$w_T(s) := w\left(\frac{k}{T}\right) \quad \text{для } k_i \leq s_i < k_i + 1, \quad k_i \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, d,$$

$$\left[\frac{k_1}{T}, \frac{k_1 + 1}{T} \right) \times \dots \times \left[\frac{k_d}{T}, \frac{k_d + 1}{T} \right) \subset W,$$

в противном случае $w_T(s) = 0$. Доказательство почти идентично шагу 2 в [4].

3. Определим

$$P_0 = \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in \mathbf{R}^d} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\}.$$

Пусть $h > 0$, обозначим

$$S_1 = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}^d} \{(h+1)m + [0, h]^d\} = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}^d} \Delta_m(h), \quad S_2 = \mathbf{R}^d \setminus S_1.$$

Затем определим

$$P_i = \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in S_i} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, что

$$P_1 \leq P_0 \leq P_1 + P_2,$$

$$\ln(1 - P_1) - \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2} \leq \ln(1 - P_1 - P_2) \leq \ln(1 - P_0) \leq \ln(1 - P_1) \leq -P_1.$$

4. Мы покажем, что для положительной константы C мы имеем при $T \rightarrow \infty$

$$P_2 \leq Ce^{-t}h^{-1}(1 + o_T(1)).$$

Определим

$$L_k(h) = ((h+1)k + [0, h+1]^d - [0, h]^d) \cap W, \quad k \in \mathbf{Z}^d.$$

Тогда $S_2 = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^d} L_k(h)$ и мы подразбиваем каждое $L_k(h)$ на маленькие кубики со стороной δ такие, что их диаметры не превышают δ_0 из леммы 2. Точнее, для каждого $[0, h+1]^d$ -куба мы разделим каждую сторону длины $h+1$ на $(h+1)/\delta$ подынтервалов таким образом, что соответствующая сторона длины h у $[0, h]^d$ -подкубика состоит из целого числа подынтервалов длины δ . Затем мы берем только те δ^d -кубики, которые лежат внутри $L_k(h)$. Обозначим их $Q_{k,m}(h, \delta)$; таким образом,

$$L_k(h) = \bigcup_{m \in M_k(h, \delta)} Q_{k,m}(h, \delta), \quad Q_{k,m_1}(h, \delta) \cap Q_{k,m_2}(h, \delta) = \emptyset, \quad m_1 \neq m_2.$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$w\left(\frac{m_k^{(h,\delta)}}{T}\right) = \max_{l \in \mathbf{Z}^d \cap Q_{k,m}(h,\delta)} w\left(\frac{l}{T}\right)$$

положительно, поскольку мы работаем на носителе W функции w . По лемме 2 для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших h выражение в (12) допускает оценку

$$\begin{aligned} P_2 &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h,\delta)} \text{meas}(Q_{k,m}(h,\delta)) \\ &\quad \times 2H_\alpha\left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h,\delta)})/T}\right)^{2d/\alpha-1} \varphi\left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h,\delta)})/T}\right) \\ &= (1 + \varepsilon) \delta^d \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h,\delta)} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h,\delta)})/T}\right) \\ &\leq C(1 + \varepsilon) \int_{S_2} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(y/T)}\right) dy \\ &\stackrel{(a)}{\leq} C(1 + \varepsilon) h^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(y/T)}\right) dy \stackrel{(b)}{\leq} C(1 + \varepsilon) h^{-1} e^{-x} (1 + o_T(1)), \end{aligned} \tag{13}$$

где C — положительная константа. Мы воспользовались условиями (w1) и (w3) в $\stackrel{(a)}{\leq}$ и результатом этапа 1 в $\stackrel{(b)}{\leq}$.

5. Покажем, что $P_1 \leq e^{-t}(1 + o_T(1))$ при $T \rightarrow \infty$.

Подобно доказательству этапа 4 мы разделим S_1 на маленькие кубики со стороной δ такие, что их диаметры не превышают δ_0 из леммы 2. Точнее,

$$\begin{aligned} S_1 &= \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^d} \Delta_k(h) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^d} \bigcup_{m \in M_k(h,\delta)} Q_{k,m}(h,\delta), \\ Q_{k,m_1}(h,\delta) \cap Q_{k,m_2}(h,\delta) &= \emptyset, \quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_1 &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h,\delta)} \mathbf{P}\left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h,\delta)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h,\delta)} \mathbf{P}\left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h,\delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h,\delta)})/T} \right\} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h,\delta)} \text{meas}(Q_{k,m}(h,\delta)) \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h,\delta)})/T}\right) \\ &\leq (1 + \varepsilon) \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(y/T)}\right) dy = (1 + \varepsilon) T^d \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(z)}\right) dz \\ &= (1 + \varepsilon) e^{-t} (1 + o_T(1)), \end{aligned}$$

где $w(m_k^{(h,\delta)})/T = \max_{l \in \mathbf{Z}^d \cap Q_{k,m}(h,\delta)} w(l/T)$.

6. Покажем, что при $T \rightarrow \infty$

$$P_1 \geq e^{-t}(1 + o_T(1)).$$

Используя неравенство двойной суммы, мы имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^d} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \right\} \\ &\geq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\ &\quad - \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

6а. Покажем, что при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\ \leq e^{-t} o_T(1). \end{aligned}$$

Чтобы разобраться с двойной суммой, мы будем следовать доказательствам леммы 6.3 и общей версии леммы 7.1 в [11]. Используя обозначения из предыдущих шагов для $w(m_k^{(h,\delta)}/T) = \max_{l \in \mathbf{Z}^d \cap Q_{k,m}(h,\delta)} w(l/T)$, двойную сумму можно ограничить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\ \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{i \in M_k(h,\delta)} \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} \sum_{j \in M_m(h,\delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,i}(h,\delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(i_k^{(h,\delta)}/T)}, \right. \\ \left. \sup_{s \in Q_{m,j}(h,\delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(j_m^{(h,\delta)}/T)} \right\} \\ \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{i \in M_k(h,\delta)} \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} \sum_{j \in M_m(h,\delta)} 2\mathbf{P} \left\{ \sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h,\delta) \times Q_{m,j}(h,\delta)} Y(s_1, s_2) \right. \\ \left. > \frac{u_T}{w(i_k^{(h,\delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h,\delta)}/T)} \right\}, \end{aligned}$$

где $Y(s_1, s_2) = X(s_1) + X(s_2)$, $(s_1, s_2) \in \mathbf{R}^{2d}$, — гауссовское поле с дисперсией

$$\sigma_Y^2(s_1, s_2) = 2 + 2r(s_1 - s_2),$$

которая равна 2 на $Q_{k,i}(h,\delta) \times Q_{m,j}(h,\delta)$ в силу условия (R2). Последнее неравенство вытекает из того, что $X(\cdot)$ обладает тем же распределением, что и $-X(\cdot)$ всюду в $\mathbf{R}^d$.

Рассмотрим нормированное поле

$$Y^*(s_1, s_2) = \frac{Y(s_1, s_2)}{\sigma_Y(s_1, s_2)} = \frac{Y(s_1, s_2)}{\sqrt{2}}, \quad (s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta).$$

Мы видим, что при любых $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y^*(s_1, s_2)Y^*(s'_1, s'_2)) &= \frac{1}{2}(r(s_1 - s'_1) + r(s_1 - s'_2) + r(s'_1 - s_2) + r(s_2 - s'_2)) \\ &= \frac{1}{2}(r(s_1 - s'_1) + r(s_2 - s'_2)) \\ &\geq 1 - 2\|s_1 - s'_1\|^\alpha + 4\|s_1 - s'_1\|^{2\alpha} \\ &\quad - 2\|s_2 - s'_2\|^\alpha + 4\|s_2 - s'_2\|^{2\alpha} \end{aligned}$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$.

А теперь пусть $Z_1(s), Z_2(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, — два независимых центрированных однородных гауссовских поля с ковариационными функциями $r_Z(s, s_1) = \exp\{-4\|s - s_1\|^\alpha\}$. Тогда однородное гауссовское поле

$$Z^*(s_1, s_2) = \frac{Z_1(s_1) + Z_2(s_2)}{\sqrt{2}}, \quad (s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta),$$

имеет ковариацию

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\exp\{-\|s_1 - s'_1\|^\alpha\} + \exp\{-\|s_2 - s'_2\|^\alpha\}) \\ &\leq 1 - 2\|s_1 - s'_1\|^\alpha + 4\|s_1 - s'_1\|^{2\alpha} - 2\|s_2 - s'_2\|^\alpha + 4\|s_2 - s'_2\|^{2\alpha} \\ &\leq \mathbf{E}(Y^*(s_1, s_2)Y^*(s'_1, s'_2)) \end{aligned}$$

для всех $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)$, поскольку $e^{-u} \leq 1 - u + u^2/2$ для любого $u \geq 0$. Тогда из неравенства Слэпьяна (см. [11, теорема С.1]) следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)} Y(s_1, s_2) > \frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)}/T)}\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)} Z^*(s_1, s_2) > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)}/T)}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем применить лемму 2 с $k = 2$, $\tau = (\alpha, \alpha)$, чтобы получить

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)} Z^*(s_1, s_2) > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)}/T)}\right)\right\} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \cdot 2^{2d/\alpha} \text{meas}(Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)) \\ &\quad \times H_{\alpha, \alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)}/T)}\right)\right)^{4d/\alpha-1} \\ &\quad \times \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)}/T)}\right)\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\
& \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{i \in M_k(h, \delta)} \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} \sum_{j \in M_m(h, \delta)} 2(1 + \varepsilon) 2^{2d/\alpha} \delta^{2d} \\
& \quad \times H_{\alpha, \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)})/T} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)})/T} \right) \right)^{4d/\alpha - 1} \\
& \quad \times \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(i_k^{(h, \delta)})/T} + \frac{u_T}{w(j_m^{(h, \delta)})/T} \right) \right)
\end{aligned}$$

где $H_{\alpha, \alpha} = \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-2d} \mathbf{E} \exp \{ \max_{(s_1, s_2) \in [0, M]^{2d}} \chi(s_1, s_2) \}$ и $\chi(s_1, s_2)$, $(t, s) \in \mathbf{R}^{2d}$, — гауссовское поле с непрерывными траекториями, функцией математического ожидания $\mathbf{E} \chi(s_1, s_2) = -4\|s_1\|^\alpha - 4\|s_2\|^\alpha$ и ковариационной функцией $r_\chi(s_1, s_2, s'_1, s'_2) = 4\|s_1\|^\alpha + 4\|s_2\|^\alpha + 4\|s'_1\|^\alpha + 4\|s'_2\|^\alpha - 4\|s_1 - s'_1\|^\alpha - 4\|s_2 - s'_2\|^\alpha$.

Более того, рассуждая аналогично этапам 4 и 5, получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \\
& \leq \frac{(1 + \varepsilon) H_{\alpha, \alpha}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2d/\alpha + 1} \int_{S_1} \int_{S_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(y_1/T)} + \frac{u_T}{w(y_2/T)} \right) \right)^{4d/\alpha - 1} \\
& \quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{u_T}{w(y_1/T)} + \frac{u_T}{w(y_2/T)} \right)^2 \right\} dy_1 dy_2 \\
& \leq \frac{(1 + \varepsilon) H_{\alpha, \alpha}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{5/2} T^{2d} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{u_T}{w(z_1)} \right)^{2d/\alpha - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{u_T}{w(z_1)} \right)^2 \right\} \\
& \quad \times \left(\int_{\{z_2: w(z_2) > w(z_1)\}} \left(1 + \frac{w(z_1)}{w(z_2)} \right)^{2d/\alpha - 1} \left(1 + \frac{w(z_2)}{w(z_1)} \right)^{2d/\alpha} \left(\frac{u_T}{w(z_2)} \right)^{2d/\alpha} \right. \\
& \quad \left. \times \exp \left\{ -\frac{u_T^2}{2w(z_1)w(z_2)} \right\} dz_2 \right) dz_1 \\
& \leq \frac{(1 + \varepsilon) H_{\alpha, \alpha}}{H_\alpha^2 \sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2d/\alpha + 3/2} T^{2d} \\
& \quad \times \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_{d, \alpha} \left(\frac{u_T}{w(z_1)} \right) \left(\int_{\{z_2: w(z_2) > w(z_1)\}} \left(1 + \frac{w(z_2)}{w(z_1)} \right)^{2d/\alpha} \Phi_{d, \alpha} \left(\frac{u_T}{w(z_2)} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \frac{u_T}{w(z_2)} \exp \left\{ -\frac{u_T^2}{2w^2(z_2)} \left(\frac{w(z_2)}{w(z_1)} - 1 \right) \right\} dz_2 \right) dz_1, \tag{15}
\end{aligned}$$

где мы воспользовались симметрией выражения по отношению к z_1, z_2 в (15).

Заметим, что, подобно шагу 1 в [4], можно показать, что главный вклад в интегралы дают множества $\{z_i: w(z_i) > c\}$ для любых $0 < c < 1$,

$i = 1, 2$ при $T \rightarrow \infty$; точнее, интегралы по множествам $\{z_i: w(z_i) \leq c\}$ для любых $0 < c < 1$, $i = 1, 2$ имеют меньший порядок при $T \rightarrow \infty$. Рассмотрим более подробно внутренний интеграл в (15) в случае, когда $w(z_1) > c$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\{z_2: w(z_2) > w(z_1)\}} \left(1 + \frac{w(z_2)}{w(z_1)}\right)^{2d/\alpha} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(z_2)}\right) \frac{u_T}{w(z_2)} \\
 & \quad \times \exp\left\{-\frac{u_T^2}{2w^2(z_2)}\left(\frac{w(z_2)}{w(z_1)} - 1\right)\right\} dz_2 \\
 & \leq \int_{\{z_2: w(z_2) > (1+\varepsilon_1)w(z_1)\}} \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{2d/\alpha} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(z_2)}\right) \frac{u_T}{c} \exp\left\{-\frac{u_T^2\varepsilon_1}{2}\right\} dz_2 \\
 & \quad + \int_{\{z_2: (1+\varepsilon_1)w(z_1) \geq w(z_2) > w(z_1)\}} (2 + \varepsilon_1)^{2d/\alpha} \Phi_{d,\alpha}\left(\frac{u_T}{w(z_2)}\right) \frac{u_T}{c} \\
 & \quad \times \exp\left\{-\frac{u_T^2}{2}\left(\frac{w(z_2)}{w(z_1)} - 1\right)\right\} dz_2 \\
 & \leq \Lambda_{d,\alpha}(u_T) \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{2d/\alpha} \frac{u_T}{c} \exp\left\{-\frac{u_T^2\varepsilon_1}{2}\right\} (1 + C\varepsilon_1) \tag{16}
 \end{aligned}$$

для любого $0 < c < 1$, любого $\varepsilon_1 > 0$, некоторой константы $C > 0$ и всех достаточно больших T . Объединяя (15) и (16), мы имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \neq m \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in L_k(h)} w_T(s)|X(s)| > u_T, \sup_{s \in L_m(h)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \\
 & \leq C_1(1 + \varepsilon)T^{2d}\Lambda_{d,\alpha}^2(u_T)u_T \exp\left\{-\frac{u_T^2\varepsilon_1}{2}\right\}(1 + C_2\varepsilon_1) \leq e^{-2t}o_T(1)
 \end{aligned}$$

при $T \rightarrow \infty$ ввиду этапа 1.

6b. Покажем, что при $T \rightarrow \infty$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in L_k(h)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \geq e^{-t}(1 + o_T(1)).$$

Данную одинарную сумму можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in L_k(h)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \\
 & \geq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \\
 & \quad - \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} w_T(s)|X(s)| > u_T, \right. \\
 & \quad \left. \sup_{s \in Q_{k,l}(h, \delta)} w_T(s)|X(s)| > u_T\right\} \\
 & \geq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(\tilde{m}_k^{(h, \delta)}/T)}\right\}
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}, \right. \\ \left. \sup_{s \in Q_{k,l}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right\}, \quad (17)$$

где

$$w\left(\frac{m_k^{(h, \delta)}}{T}\right) = \max_{l \in \mathbf{Z}^d \cap Q_{k,m}(h, \delta)} w\left(\frac{l}{T}\right), \\ w\left(\frac{\tilde{m}_k^{(h, \delta)}}{T}\right) = \min_{l \in \mathbf{Z}^d \cap Q_{k,m}(h, \delta)} w\left(\frac{l}{T}\right),$$

положительны, поскольку мы работаем на носителе W функции w .

Как и на этапе 5, покажем напрямую, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(\tilde{m}_k^{(h, \delta)}/T)} \right\} \\ \geq (1 - \varepsilon) T^d \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_{d, \alpha} \left(\frac{u_T}{w(z)} \right) dz = (1 - \varepsilon) e^{-t} (1 + o_T(1)).$$

Рассмотрение двойной суммы в (17) очень подобно этапу ба со следующим осложнением. Дисперсия поля $Y(s_1, s_2) = X(s_1) + X(s_2)$, $(s_1, s_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)$, не равна 2 для индексов m, l таких, что $(\|m - l\| + 1)\delta < 1$, соответствующих кубам, которые отстоят друг от друга менее чем на 1. Используя условие (R2), мы имеем

$$\sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)} \sigma_Y^2(s_1, s_2) \leq 4.$$

Следовательно, как и на этапе ба, мы имеем

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}, \right. \\ \left. \sup_{s \in Q_{k,l}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right\} \\ \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} 2 \mathbf{P} \left\{ \sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)} Y^*(s_1, s_2) \right. \\ \left. > \frac{1}{2} \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{1}{2} \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right\},$$

где $Y^*(s_1, s_2) = Y(s_1, s_2)/\sigma_Y(s_1, s_2)$ для $(s_1, s_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)$. Заметим, что

$$\mathbf{E}(Y^*(s_1, s_2)Y^*(s'_1, s'_2)) = \frac{r(s_1 - s'_1) + r(s_1 - s'_2) + r(s'_1 - s_2) + r(s_2 - s'_2)}{((2 + 2r(s_1 - s'_1))(2 + 2r(s'_1 - s'_2)))^{1/2}}$$

для любых $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)$. В силу непрерывности r всюду для любых s_1, s_2, s'_1, s'_2 таких, что $\|s_1 - s'_1\| \leq \delta$ и $\|s_2 - s'_2\| \leq \delta$, мы имеем

$$r(s_1 - s'_2) \geq r(s_1 - s_2) - \varepsilon_1 \|s_2 - s'_2\|^\alpha, \quad r(s'_1 - s_2) \geq r(s_1 - s_2) - \varepsilon_1 \|s_1 - s'_1\|^\alpha$$

и

$$r(s'_1 - s'_2) \leq r(s_1 - s_2) + \varepsilon_2 (\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha)$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$ и некоторых малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Для достаточно малого $\delta > 0$ мы имеем

$$1 - 2\|s\|^\alpha \leq r(s) \leq 1 - \frac{\|s\|^\alpha}{2} \quad \text{для всех } s \text{ таких, что } \|s\| \leq \delta.$$

Тогда для всех s_1, s_2, s'_1, s'_2 таких, что $\|s_1 - s'_1\| \leq \delta$ и $\|s_2 - s'_2\| \leq \delta$, имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \frac{r(s_1 - s'_1) + r(s_1 - s'_2) + r(s'_1 - s_2) + r(s_2 - s'_2)}{((2 + 2r(s_1 - s_2))(2 + 2r(s'_1 - s'_2)))^{1/2}} \\ & \geq \frac{r(s_1 - s'_1) + r(s_1 - s'_2) + r(s'_1 - s_2) + r(s_2 - s'_2)}{(2 + 2r(s_1 - s_2))(1 + (\varepsilon_2(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha))/(4 + 4r(s_1 - s_2)))} \\ & \geq \frac{1}{(2 + 2r(s_1 - s_2))(1 + (\varepsilon_2(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha))/(4 + 4r(s_1 - s_2)))} \\ & \quad \times (1 - 2\|s_1 - s'_1\|^\alpha + 2r(s_1 - s_2) - \varepsilon_1(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha) + 1 - 2\|s_1 - s'_1\|^\alpha) \\ & \geq 1 - \frac{(2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2/2)(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha)}{(2 + 2r(s_1 - s_2))(1 + \varepsilon_2(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha)/(4 + 4r(s_1 - s_2)))} \\ & \geq 1 - \frac{2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2/2}{2\varepsilon_3} (\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha) \\ & \quad \times \left(1 - C_0(\|s_1 - s'_1\|^\alpha + \|s_2 - s'_2\|^\alpha) + C_0^2(\|s_1 - s'_1\|^{2\alpha} + \|s_2 - s'_2\|^{2\alpha})\right), \end{aligned}$$

где мы использовали неравенство $\sqrt{1+t} \leq 1 + t/2$ для всех $t > -1$ в первой строке; мы также воспользовались тем, что $\sup_{\|s\| > \varepsilon} |r(s)| < 1$ для всех $\varepsilon > 0$, а $s_1 \neq s_2$ таковы, что $r(s_1 - s_2) > -1 + \varepsilon_3$ для некоторого $\varepsilon_3 > 0$, и C_0 — подходящая положительная константа.

Подобно этапу 6а, пусть $Z_1(s), Z_2(s)$, $s \in \mathbf{R}^d$, — два независимых центрированных однородных гауссовских поля с ковариационными функциями $r_Z(s_1, s_2) = \exp\{-2C_0\|s_1 - s_2\|^\alpha\}$. Тогда однородное гауссовское поле

$$Z^*(s_1, s_2) = \frac{Z_1(s_1) + Z_2(s_2)}{\sqrt{2}}, \quad (s_1, s_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta),$$

обладает ковариацией

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\exp\{-2C_0\|s_1 - s'_1\|^\alpha\} + \exp\{-2C_0\|s_2 - s'_2\|^\alpha\} \right) \\ & \leq 1 - C_0\|s_1 - s'_1\|^\alpha + C_0^2\|s_1 - s'_1\|^{2\alpha} - C_0\|s_2 - s'_2\|^\alpha + C_0^2\|s_2 - s'_2\|^{2\alpha} \\ & \leq \mathbf{E}(Y^*(s_1, s_2)Y^*(s'_1, s'_2)) \end{aligned}$$

для всех $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in Q_{k,i}(h, \delta) \times Q_{m,j}(h, \delta)$, поскольку $e^{-u} \leq 1 - u + u^2/2$ для любого $u \geq 0$.

Затем по неравенству Слепяна (см., к примеру, [11, теорема С.1]) и лемме 2 с $k = 2$, $\tau = (\alpha, \alpha)$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}, \sup_{s \in Q_{k,l}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right\} \\ & \leq 2\mathbf{P} \left\{ \sup_{(s_1, s_2) \in Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)} Z^*(s_1, s_2) \right. \\ & \quad \left. > \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right) \right\} \\ & \leq (1 + \varepsilon) \cdot 2^{2d/\alpha+1} \text{meas}(Q_{k,m}(h, \delta) \times Q_{k,l}(h, \delta)) \\ & \quad \times H_{\alpha, \alpha}^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right) \right)^{4d/\alpha-1} \\ & \quad \times \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right) \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}, \right. \\ & \quad \left. \sup_{s \in Q_{k,l}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right\} \\ & \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} (1 + \varepsilon) \cdot 2^{2d/\alpha+1} \delta^{2d} \\ & \quad \times H_{\alpha}^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right) \right)^{4d/\alpha-1} \\ & \quad \times \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)} + \frac{u_T}{w(l_k^{(h, \delta)}/T)} \right) \right), \end{aligned}$$

где H_{α}^* и $H_{\alpha, \alpha}^*$ определены подобно H_{α} и $H_{\alpha, \alpha}$ с константой 4, замененной на $2C_0$.

Как и на этапе ба, мы имеем

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \sum_{m \neq l \in M_k(h, \delta)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in Q_{k,m}(h, \delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(m_k^{(h, \delta)}/T)}, \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sup_{s \in Q_{k,l}(h,\delta)} |X(s)| > \frac{u_T}{w(l_k^{(h,\delta)}/T)} \Big\} \\
& \leq C(1+\varepsilon) \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{L_k(h)} \int_{L_k(h)} \left(\frac{u_T}{w(y_1/T)} + \frac{u_T}{w(y_2/T)} \right)^{4d/\alpha-1} \\
& \quad \times \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_T}{w(y_1/T)} + \frac{u_T}{w(y_2/T)} \right) \right) dy_1 dy_2 \\
& \leq C(1+\varepsilon) e^{-2t} o_T(1)
\end{aligned}$$

при T , стремящемся к бесконечности. На самом деле последнее неравенство очень грубое, но оно достаточно для наших целей. Можно доказать более быструю сходимость к 0.

7. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln(1 - P_1) \geq -\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} e^{-t} (1 + o_T(1)) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

В силу условия (R2) у нас есть независимость, так что

$$\begin{aligned}
1 - P_1 &= \mathbf{P} \left\{ \max_{k \in \mathbf{Z}^d} \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| \leq u_T \right\} \\
&= \prod_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| \leq u_T \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\ln(1 - P_1) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \ln \left(1 - \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \right) \\
&\geq - \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \frac{\mathbf{P} \{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \}}{1 - \mathbf{P} \{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \}} \\
&\geq - \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\}, \quad (18)
\end{aligned}$$

где мы применили простое неравенство $\ln(1-a) \leq a/(1-a)$ для $a \rightarrow 0$ с $a = \mathbf{P} \{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших T мы имеем (18). При помощи рассуждений этапа 5 мы получаем

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in L_k(h)} w_T(s) |X(s)| > u_T \right\} \leq (1+\varepsilon) e^{-t} (1 + o_T(1)).$$

Значит,

$$\ln(1 - P_1) \geq -\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} e^{-t} (1 + o_T(1))$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших T .

В результате этапов 4–7 мы имеем при $T \rightarrow \infty$

$$\ln(1 - P_0) = -e^{-t} (1 + o_T(1)),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

5. Другие доказательства.

5.1. Доказательство предложения 1. Для всех $u > u_0$ имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_{d,\alpha}(u) &= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{u}{u_0}\right)^{2d/\alpha-1} \exp\left\{-\frac{u^2 - u_0^2}{2w^2(y)}\right\} \Psi_{d,\alpha}\left(\frac{u_0}{w(y)}\right) dy \\ &\leq \left(\frac{u}{u_0}\right)^{2d/\alpha-1} \exp\left\{-\frac{u^2 - u_0^2}{2w_{\max}^2}\right\} \Lambda_{d,\alpha}(u_0).\end{aligned}$$

Из определения A_T следует, что $\ln(T^d \Lambda_{d,\alpha}(A_T)) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\ln(T^d \Lambda_{d,\alpha}(A_T)) &\leq d \ln T + \left(\frac{2d}{\alpha-1}\right)(\ln A_T - \ln u_0) \\ &\quad - \frac{A_T^2 - u_0^2}{2 \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x)^2} + \ln \Lambda_{d,\alpha}(u_0),\end{aligned}$$

и поэтому A_T не может расти быстрее, чем $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) \sqrt{2d \ln T} (1+o(1))$ в асимптотике.

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\Lambda_{d,\alpha}(u) &= \int_{w(y) \geq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon} \Psi_{d,\alpha}\left(\frac{u}{w(y)}\right) dy \\ &\quad + \int_{w(y) < \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon} \Psi_{d,\alpha}\left(\frac{u}{w(y)}\right) dy \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} H_\alpha C_r^{1/\alpha} \left(\frac{u}{\sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x)}\right)^{2d/\alpha-1} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2(\sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon)^2}\right\} \int_{\{y: w(y) \geq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon\}} dy,\end{aligned}$$

откуда следует, что A_T не может расти медленнее, чем

$$\left(\sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon\right) \left\{2d(\ln T + o(\ln T)) + \ln \int_{w(y) \geq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon} dy\right\}^{1/2}$$

при $T \rightarrow \infty$. Используя условие (w1), выберем $\varepsilon = \varepsilon_T$ стремящимся к 0 при $T \rightarrow \infty$ так медленно, чтобы выполнялось соотношение

$$\ln \int_{\{y: w(y) \geq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) - \varepsilon_T\}} dy = o(\ln T),$$

это и завершает доказательство предложения.

5.2. Доказательство теорем 2 и 3. Мы придерживаемся схемы доказательства теоремы 6 в [4]. Обозначим $\lambda_t = (th_t^d |\ln h_t|)^{1/2}$.

Как и в доказательстве теоремы 2.1 в [5], разобьем множество B_f на 4 непересекающихся подмножества:

$$B_f = D_a \cup \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n \cup \mathcal{C}_{n,a}$$

для фиксированного $a > 0$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &:= \{x \in B_f: \Psi(x) > \lambda_{n \ln n}\}, \\ \mathcal{B}_n &:= \left\{x \in B_f: f(x)\Psi(x) \leq (\ln n)^{-(1-\beta)} \left(\frac{|\ln h_n|}{nh_n^d}\right)^{1/2}, \Psi(x) \leq \lambda_{n \ln n}\right\}, \\ \mathcal{C}_{n,a} &:= \left\{x \in B_f \cap D_a^c: f(x)\Psi(x) > (\ln n)^{-(1-\beta)} \left(\frac{|\ln h_n|}{nh_n^d}\right)^{1/2}\right\}.\end{aligned}$$

Тогда, если выполнено условие (5) и если либо $B_f = \mathbf{R}^d$, либо $K(0) = \|K\|_\infty$, то мы можем соединить результаты (2.8), (2.10), (2.20) в [5] с леммой 5 в [4], утверждающей, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(A_{1/h_n} + \frac{t}{A_{1/h_n}} \right) |\ln h_n|^{-1/2} < \infty$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, и получить

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ A_{1/h_n} \left(\sqrt{nh_n^d} \|K\|_2^{-1} \sup_{x \in \mathcal{A}_n} |\Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E} \hat{f}_n(x))| - A_{1/h_n} \right) \geq t \right\} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ A_{1/h_n} \left(\sqrt{nh_n^d} \|K\|_2^{-1} \sup_{x \in \mathcal{B}_n} |\Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E} \hat{f}_n(x))| - A_{1/h_n} \right) \geq t \right\} &= 0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ A_{1/h_n} \left(\sqrt{nh_n^d} \|K\|_2^{-1} \sup_{x \in \mathcal{C}_{n,a}} |\Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E} \hat{f}_n(x))| \right. \right. \\ \left. \left. - A_{1/h_n} \right) \geq t \right\} &= 0\end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$. Теорема 2 и следствие 4 в [4], утверждающие, что можно заменить супремум по всему пространству на супремум по D_a без изменений в центрировании и нормировке A_{1/h_n} , влекут за собой соотношение

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ A_{1/h_n} \left(\sqrt{nh_n^d} \|K\|_2^{-1} \sup_{x \in D_a} |\Psi(x)(\hat{f}_n(x) - \mathbf{E} \hat{f}_n(x))| - A_{1/h_n} \right) \leq t \right\} \\ = \exp\{-e^{-t}\}\end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$ и всех достаточно больших $a > 0$. Это доказывает достаточность условия $\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbf{P}\{\Psi(X_1) > \lambda_t\} = 0$. Его необходимость может быть показана способом, аналогичным одномерному случаю в [4] (см. с. 189), что и завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 легко получается из доказательств теорем 8 и 9 в [4].

6. Пример с выбираемыми по данным центрированием и нормировкой. Использование теоремы 2 в приложениях, таких как доверительные полосы для плотностей, наталкивается на трудности. Во-первых, центрирование и нормировка A_T зависит от $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \Psi(x) \sqrt{f(x)}$. Во-вторых, функция Ψ тоже может зависеть от плотности f . В-третьих, нужно учитывать смещение $\tilde{f}_n(x) - f(x) := \mathbf{E} \hat{f}_n(x) - f(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$. В данном разделе мы отвечаем на эти трудности.

Во-первых, заметим, что теорема 1 выполняется с последовательностью $\tilde{A}_T$, удовлетворяющей

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^d \Lambda_{d,\alpha}(\tilde{A}_T) = 1,$$

что легко видеть из доказательства.

Во-вторых, отметим, что если $|\tilde{A}_T/A_T - 1| = o(A_T^{-2})$, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^d \Lambda_{d,\alpha}(\tilde{A}_T) = 1.$$

Сие наблюдение было сделано в одномерном случае в [4]. В многомерном случае оно весьма похоже. Действительно, пусть $\varepsilon_T = |\tilde{A}_T/A_T - 1|$. Рассмотрим для любого $c \in (0, \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x)]$

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_T)^{2d/\alpha-1} &\geq T^d \Lambda_{d,\alpha}(\tilde{A}_T) \\ &= (1 + \varepsilon_T)^{2d/\alpha-1} \frac{\int_W (\frac{A_T}{w(y)})^{2d/\alpha-1} \exp\{-\frac{A_T^2}{2w^2(y)}(1 + \varepsilon_T)^2\} dy}{\int_W (\frac{A_T}{w(y)})^{2d/\alpha-1} \exp\{-\frac{A_T^2}{2w^2(y)}\} dy} \\ &\geq (1 + \varepsilon_T)^{2d/\alpha-1} \exp\left\{-\frac{A_T^2 \varepsilon_T (2 + \varepsilon_T)}{2c^2}\right\} \\ &\quad \times \frac{\int_{\{y: w(y) > c\}} (\frac{A_T}{w(y)})^{2d/\alpha-1} \exp\{-\frac{A_T^2}{2w^2(y)}\} dy}{\int_W (\frac{A_T}{w(y)})^{2d/\alpha-1} \exp\{-\frac{A_T^2}{2w^2(y)}\} dy}. \end{aligned}$$

Тогда, если $\varepsilon_T = o(A_T^{-2})$, то, устремляя c к 0, мы получим желаемую сходимость к 1.

Соединяя эти два факта с предложением 1, можно заменить A_T на

$$B_T := \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) \sqrt{2d \ln T} + \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) \sup_{x \in \mathbf{R}^d} w(x) \frac{\ln \ln T}{\sqrt{2d \ln T}}$$

в теореме 1 и, следовательно, заменить A_{1/h_n} на B_{1/h_n} в теореме 2. Использование B_T — более практично.

Введем дополнительные определения и дополнительные условия. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \max \left[|\tilde{f}_n(x) - f(x)|, |\nabla \tilde{f}_n(x) - \nabla f(x)| \right], \quad n \geq 1,$$

где ∇g обозначает градиент функции g . Пусть $\omega(u, x)$ — вещественно-значная функция, определенная для $u \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}^d$, такая, что функция $w(x) = \omega(f(x), x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, удовлетворяет условиям (w1)–(w3), а функция $\Psi(x) = \omega(f(x), x)f^{-1/2}(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, удовлетворяет условиям (W.a)–(W.c) и $(\text{WD.a})_\beta$. Обозначим

$$\mathcal{M} = \left\{ \tau \in \mathbf{R}^d: \omega(f(\tau), \tau) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \omega(f(x), x) \right\}.$$

Заметим, что в силу (w1) множество $\mathcal{M}$ компактно и содержится в D_a для всех достаточно больших $a > 0$.

Далее, для всех достаточно малых $\delta > 0$ замкнутая выпуклая оболочка δ -окрестности множества $\mathcal{M}$ является компактом. Мы обозначим его $\mathcal{K}$. Определим $W_a = \{|x| \leq a, \omega(f(x), x) \geq 1/a\}$ для $a > 0$.

Введем следующие условия.

(A0) $\mathcal{K} \subset W$.

(A1) Функция ω дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}^{d+1}$ и существует $\varepsilon^* > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{K}} \sup_{f(x) - \varepsilon^* \leq u \leq f(x) + \varepsilon^*} \left| \frac{\partial \omega(u, x)}{\partial u} \right| &< \infty, \\ \sup_{x \in \mathcal{K}} \sup_{f(x) - \varepsilon^* \leq u \leq f(x) + \varepsilon^*} \left| \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u^2} \right| &< \infty, \\ \sup_{x \in \mathcal{K}} \sup_{f(x) - \varepsilon^* \leq u \leq f(x) + \varepsilon^*} \left| \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u \partial x} \right| &< \infty. \end{aligned}$$

(A2) Для всех достаточно больших $a > 0$, n и всех $x \in D_a$

$$\left| \omega(\hat{f}_n(x), x) - \omega(f(x), x) \right| \leq C_\omega(a) |\hat{f}_n(x) - f(x)|,$$

где $C_\omega: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — ограниченная функция.

(A3) Для всех достаточно больших $a > 0$ имеем $\inf_{x \in D_a} \omega(f(x), x) \geq C_0 a^{-\delta_0}$ с некоторыми константами $C_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$.

Заметим, что условия (A3) и $(\text{WD.a})_\beta$ гарантируют, что $D_a \subset W_{a^*} \subset D_{ka^{2\delta_0/(1-2\beta)}}$ для всех достаточно больших $a > 0$, где $a^* = 1/\inf_{x \in D_a} \omega(f(x), x)$ и $k = (\|\Psi f^\beta\|_\infty / C_0)^{2/(1-2\beta)}$. Условие (A0) выполнено, если $W = \mathbf{R}^d$.

Определим $\hat{D}_a = \{|x| \leq a, \hat{f}_n(x) \geq 1/a\}$ и $\widehat{W}_a = \{|x| \leq a, \omega(\hat{f}_n(x), x) \geq 1/a\}$ для $a > 0$. Пусть

$$\begin{aligned} B_n &= \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \omega(f(x), x) \left[\sqrt{2d |\ln h_n|} + \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \frac{\ln |\ln h_n|}{\sqrt{2d |\ln h_n|}} \right], \\ \hat{B}_n &= \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \omega(\hat{f}_n(x), x) \left[\sqrt{2d |\ln h_n|} + \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \frac{\ln |\ln h_n|}{\sqrt{2d |\ln h_n|}} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2, включая условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbf{P} \left\{ \Psi(X_1) > (th_t^d |\ln h_t|)^{1/2} \right\} = 0.$$

Пусть также выполнены условия (A0)–(A3) и $nh_n^{d+4} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, предположим, что ядро K дважды непрерывно дифференцируемо на своем носителе и f дифференцируема на B_f . Наконец, пусть последовательности $a_n \rightarrow \infty$ и $\Delta_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$, таковы, что

$$|\ln h_n| \Delta_n \rightarrow 0, \quad [a_n^{1+\delta_0} \vee C_\omega (ka_n^{2\delta_0/(1-2\beta)})][\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n] \xrightarrow{P} 0$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_n(a) = a_n^{0.5+\delta_0} \sqrt{|\ln h_n|/(nh_n^d)}$. Тогда для всех $t \in \mathbf{R}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \hat{B}_n \left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \sup_{x \in \hat{D}_{a_n}} \left| \omega(\hat{f}_n(x), x) \hat{f}_n^{-1/2}(x) (\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x)) \right| - \hat{B}_n \right) \leq t \right\} \\ \rightarrow \exp\{-e^{-t}\} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Если дополнительно мы имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_n^d |\ln h_n|} a_n^\beta \Delta_n \xrightarrow{P} 0,$$

то в предыдущем утверждении о сходимости по распределению $\tilde{f}_n$ можно заменить на f .

Теорема 5 позволяет строить доверительные полосы для плотностей f , используя только выборку $(X_1, \dots, X_n)$, информацию о структуре весовой функции w , выбор ширины окна h_n , уровень урезания a_n , ядро K и ограничения на смещение. Конечно, данный результат — это всего лишь скромный шаг вперед, поскольку, например, можно пытаться выбирать h_n , a_n и K по данным с целью минимизации локальной ширины доверительной полосы.

6.1. Доказательство теоремы 5. Мы можем применить теорему 2 и получить

$$\mathbf{P} \left\{ A_{1/h_n} \left(\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\|K\|_2} \left\| \Psi(\cdot)(\hat{f}_n(\cdot) - \tilde{f}_n(\cdot)) \right\|_\infty - A_{1/h_n} \right) \leq t \right\} \rightarrow \exp\{-e^{-t}\} \quad (19)$$

при $n \rightarrow \infty$. Более того, в доказательстве теоремы 2 мы показали, что важен супремум только по D_a для достаточно больших $a > 0$. Тогда план доказательства состоит в следующем. Нам требуется доказать, что супремум можно брать по $\hat{D}_{a_n}$ вместо D_a , что A_{1/h_n} можно заменить на $\hat{B}_n$, что $\Psi(\cdot)$ можно поменять на $\omega(\hat{f}_n(\cdot), \cdot) \hat{f}_n(\cdot)^{-1/2}$ и что смещение можно проигнорировать. Для простоты изложения мы поделили остальное доказательство на шаги.

1. Заметим, что для всех $x \in \mathbf{R}^d$ выполнены неравенства $f(x) - \Delta_n \leq \tilde{f}_n(x) \leq f(x) + \Delta_n$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - \Delta_n \leq \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}_n(x) \leq \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + \Delta_n, \quad i = 1, \dots, d.$$

Заметим также, что для достаточно больших $a > 0$ и для любых $x \in D_a$ мы имеем

$$\begin{aligned} \omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) \tilde{f}_n(x) &\geq \inf_{s \in D_a} \omega(f(s), s) (f(x) - \Delta_n) f^{-1/2}(x) \\ &\geq \inf_{s \in D_a} \omega(f(s), s) (a^{-1/2} - \Delta_n \sqrt{a}). \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_n a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) \tilde{f}_n(x) \geq C_1 \inf_{s \in D_{a_n}} \omega(f(s), s) a_n^{-1/2}$ для всех $x \in D_{a_n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D_{a_n}} \left| \frac{\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x)}{\tilde{f}_n(x)} \right| &= \sup_{x \in D_{a_n}} \left| \frac{\omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) (\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x))}{\omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) \tilde{f}_n(x)} \right| \\ &\leq \frac{\sup_{x \in D_{a_n}} |\omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) (\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x))|}{C_1 \inf_{s \in D_{a_n}} \omega(f(s), s)} a_n^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{|\ln h_n^d|} a_n^{1/2 + \delta_0} O_P(1)}{C_1 C_0 \sqrt{n h_n^d}} \leq C_2 \varepsilon_n(a_n) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ по теореме 2.1 в [5] для некоторой положительной константы C_2 . Определим событие

$$E_n^{(1)} = \left\{ \forall x \in D_{a_n} \quad -C_2 \varepsilon_n(a_n) \leq \frac{\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x)}{\tilde{f}_n(x)} \leq C_2 \varepsilon_n(a_n) \right\}.$$

Тогда $P(E_n^{(1)}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

На событии $E_n^{(1)}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x) \geq \frac{1}{a_n} &\Rightarrow \tilde{f}_n(x) \geq \frac{\hat{f}_n(x)}{1 + C_2 \varepsilon_n(a_n)} \geq \frac{1}{a_n(1 + C_2 \varepsilon_n(a_n))} \\ &\Rightarrow f(x) \geq \tilde{f}_n(x) - \Delta_n \geq \frac{1}{a_n(1 + C_2 \varepsilon_n(a_n))} - \Delta_n \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n(1 - C_2 \varepsilon_n(a_n))}{1 + a_n \Delta_n(1 - C_2 \varepsilon_n(a_n))} \right)^{-1} &\leq f(x) \leq \tilde{f}_n(x) + \Delta_n \\ &\leq \frac{\hat{f}_n(x)}{1 - C_2 \varepsilon_n(a_n)} + \Delta_n \Rightarrow \hat{f}_n(x) \geq \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Таким образом, на событии $E_n^{(1)}$ мы имеем

$$\begin{aligned} D_{a_n(1-C_2\varepsilon_n(a_n))/(1+a_n\Delta_n(1-C_2\varepsilon_n(a_n)))} &\subset \widehat{D}_{a_n} \\ &\subset D_{a_n(1+C_2\varepsilon_n(a_n))/(1-a_n\Delta_n(1+C_2\varepsilon_n(a_n)))}, \end{aligned}$$

откуда следует, что D_{a_n} можно заменить на $\widehat{D}_{a_n}$ в (19).

2. Анализируя доказательство теоремы 2, нам надо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{B}_n + t/\widehat{B}_n}{\sqrt{|\ln h_n^d|}} < \infty \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

для того, чтобы можно было заменить $\sqrt{|\ln h_n^d|}$ на $\widehat{B}_n + t/\widehat{B}_n$ для множеств $\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{C}_{n,a}$. Более того, B_n и $\widehat{B}_n$ удовлетворяют условиям для α_n в теореме 1. Нам только надо проверить, что

$$\left| \frac{\widehat{B}_n}{A_{1/h_n}} - 1 \right| = o_P(A_{1/h_n}^{-2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

для этого в силу предложения 1 достаточно показать, что

$$\left| \frac{\widehat{B}_n}{B_n} - 1 \right| = o_P(B_n^{-2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

или, что эквивалентно,

$$|\ln h_n| \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \omega(\widehat{f}_n(x), x) - \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \omega(f(x), x) \right) = o_P(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С этой целью заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $t \notin \mathcal{M}_\delta$ мы имеем

$$\omega(f(x), x) \leq \sup_{s \in W_a} \omega(f(s), s) - \varepsilon$$

для любого достаточно большого $a > 0$. Пусть

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ \delta > 0: \forall t \notin \mathcal{M}_\delta \quad \omega(f(x), x) \leq \sup_{s \in W_a} \omega(f(s), s) - \varepsilon \right\}.$$

Тогда, рассуждая от противного, легко видеть, что $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определим событие

$$E_{n,a}^{(2)}(\varepsilon) = \left\{ \sup_{x \in W_a} |\omega(\widehat{f}_n(x), x) - \omega(f(x), x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Принимая во внимание условие (A2) и замечание после условия (A3), мы имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in W_{a_n}} \left| \omega(\widehat{f}_n(x), x) - \omega(f(x), x) \right| &\leq C_\omega (ka_n^{2\delta_0/(1-2\beta)}) \sup_{x \in W_{a_n}} |\widehat{f}_n(x) - f(x)| \\ &\leq C_\omega (ka_n^{2\delta_0/(1-2\beta)}) \left[\sup_{x \in W_{a_n}} |\widetilde{f}_n(x)| C_2 \varepsilon_n(a_n) + \Delta_n \right] \\ &\leq C_\omega (ka_n^{2\delta_0/(1-2\beta)}) [\|f\|_\infty C_2 \varepsilon_n(a_n) + \Delta_n C_2 \varepsilon_n(a_n) + \Delta_n] \\ &\leq CC_\omega (ka_n^{2\delta_0/(1-2\beta)}) [\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n] \end{aligned}$$

с некоторой константой $C > 0$. Тогда в силу выбора Δ_n и a_n мы имеем $P(E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon)) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что на событии $E_n^{(1)} \cap E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{x \notin \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}} \omega(\hat{f}_n(x), x) &\leq \sup_{x \notin \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}} \omega(f(x), x) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(f(x), x) - \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(\hat{f}_n(x), x) - \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\sup_{x \in W_{a_n}} \omega(\hat{f}_n(x), x) = \sup_{x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}} \omega(\hat{f}_n(x), x).$$

Для всех $\tau \in \mathcal{M}$ и всех $x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}$ таких, что $|x - \tau| < \delta(\varepsilon)$, мы имеем

$$\begin{aligned} &\omega(\hat{f}_n(x), x) - \omega(f(\tau), \tau) \\ &= \omega(\hat{f}_n(\tau), \tau) - \omega(f(\tau), \tau) + \omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau) \\ &\quad + [\omega(\hat{f}_n(x), x) - \omega(\hat{f}_n(\tau), \tau)] - [\omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau)]. \end{aligned}$$

Следовательно, на событии $E_n^{(1)} \cap E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon)$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(\hat{f}_n(x), x) - \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(f(x), x) &= \sup_{x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}} \omega(\hat{f}_n(x), x) - \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \omega(f(\tau), \tau) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \left[\omega(\hat{f}_n(\tau), \tau) - \omega(f(\tau), \tau) + \sup_{|x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{|x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \left([\omega(\hat{f}_n(x), x) - \omega(\hat{f}_n(\tau), \tau)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [\omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau)] \right) \right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \left[\omega(\hat{f}_n(\tau), \tau) - \omega(f(\tau), \tau) + r_n(\tau, \delta(\varepsilon)) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$r_n(\tau, \delta(\varepsilon)) := \sup_{|x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \left([\omega(\hat{f}_n(x), x) - \omega(\hat{f}_n(\tau), \tau)] - [\omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau)] \right)$$

(последнее равенство в (20) верно, поскольку $\sup_{|x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \omega(f(x), x) - \omega(f(\tau), \tau) = 0$). Используя условие (A1), мы можем оценить $|r_n|$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathcal{M}} |r_n(\tau, \delta(\varepsilon))| &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \sup_{x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}, |x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \omega(\lambda \hat{f}_n(s)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) f(s), s) d\lambda (\hat{f}_n(s) - f(s)) \right|_{s=\tau}^{s=x} \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \sup_{x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}, |x-\tau| \leq \delta(\varepsilon)} \left| \int_0^1 \nabla g_n(\mu x + (1 - \mu)\tau) d\mu (x - \tau) \right| \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \sup_{x \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}} |\nabla g_n(x)| \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

где ∇g обозначает градиент функции g и для $s \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}$

$$g_n(s) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \omega(\lambda \hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s), s) d\lambda (\hat{f}_n(s) - f(s)).$$

Рассмотрим $\nabla g_n(s)$ для любого $s \in \mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned} \nabla g_n(s) &= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \omega(\lambda \hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s), s) d\lambda (\hat{f}_n(s) - f(s))^2 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \omega(\lambda \hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s), s) d\lambda (\nabla \hat{f}_n(s) - \nabla f(s)) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \omega(\lambda \hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s), s) d\lambda (\hat{f}_n(s) - f(s)). \end{aligned}$$

Тогда $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ для $s \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)}) \subset \mathcal{K} \subset W_{a_n}$. Таким образом, для всех $\lambda \in [0, 1]$ и всех $s \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{M}_{\delta(\varepsilon)})$

$$\begin{aligned} \lambda(1 - C_2\varepsilon_n(a_n))\tilde{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(x) \\ \leq \lambda\hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s) \leq \lambda(1 + C_2\varepsilon_n(a_n))\tilde{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(x), \\ \lambda(1 - C_2\varepsilon_n(a_n))(f(s) - \Delta_n) + (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda\hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s) \\ \leq \lambda(1 + C_2\varepsilon_n(a_n))(f(s) + \Delta_n) + (1 - \lambda)f(x), \\ f(s) - \varepsilon_n^* \leq f(s) - \lambda(\|f\|_\infty C_2\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n - C_2\varepsilon_n(a_n)\Delta_n) \\ \leq \lambda\hat{f}_n(s) + (1 - \lambda)f(s) \\ \leq f(s) + \lambda(\|f\|_\infty C_2\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n + C_2\varepsilon_n(a_n)\Delta_n) \leq f(s) + \varepsilon_n^* \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_n^* = O_P(\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n)$. Тогда в силу (A1) мы получаем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla g_n(x)| &\leq C_3 \left(\sup_{x \in \mathcal{K}} |\hat{f}_n(s) - f(s)|^2 + \sup_{x \in \mathcal{K}} |\hat{f}_n(s) - f(s)| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla \hat{f}_n(s) - \nabla f(s)| \right) \end{aligned}$$

с некоторой конечной константой $C_3 > 0$. На событии $E_n^{(1)} \cap E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon)$ выполнены неравенства $\sup_{x \in \mathcal{K}} |\tilde{f}_n(x) - f(x)| \leq \Delta_n$, $\sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla \tilde{f}_n(x) - \nabla f(x)| \leq \Delta_n$, откуда, используя предложение 1.1 из [5] с функцией $\Psi = I_{D_{a_0}}$ и $\mathcal{K} \subset D_{a_0}$ для некоторого $a_0 > 0$, получаем

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} |\hat{f}_n(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq C_4 \sqrt{\frac{|\ln h_n^d|}{nh_n^d}}$$

при $n \rightarrow \infty$. Еще нам нужна следующая стандартная лемма.

Лемма 3. *Предположим, что ядро K — дважды непрерывно дифференцируемая на ограниченном носителе функция, и пусть f дифференцируема. Пусть $nh_n^{d+4} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда с некоторой ограниченной константой C_5 выполняется следующее неравенство:*

$$\mathbf{E} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla \hat{f}_n(x) - \nabla \tilde{f}_n(x)|^2 \leq \frac{C_5^2}{nh_n^{d+4}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает, что на некотором событии $E_n^{(3)}$ таком, что $P(E_n^{(3)}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, мы имеем

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla \widehat{f}_n(x) - \nabla \widetilde{f}_n(x)| \leq \frac{C_5}{\sqrt{nh_n^{d+4}}}.$$

Тогда на событии $E_n^{(1)} \cap E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon) \cap E_n^{(3)}$ верна оценка

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} |\nabla g_n(x)| \leq C_6 \left(\Delta_n + \frac{1}{\sqrt{nh_n^{d+4}}} \right),$$

из которой на событии $E_n^{(1)} \cap E_{n,a_n}^{(2)}(\varepsilon) \cap E_n^{(3)}$ вытекает

$$\sup_{\tau \in \mathcal{K}} |r_n(\delta(\varepsilon), \tau)| \leq C_6 \delta(\varepsilon) \left(\Delta_n + \frac{1}{\sqrt{nh_n^{d+4}}} \right)$$

и, как следствие,

$$\begin{aligned} & \left| \ln h_n \right| \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(\widehat{f}_n(x), x) - \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(f(x), x) \Big| \\ & \leq \left| \ln h_n \right| \left[\Delta_n + C_5 \sqrt{\frac{|\ln h_n^d|}{nh_n^d}} + C_6 \delta(\varepsilon) \left(\Delta_n + \frac{1}{\sqrt{nh_n^{d+4}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$ таково, что $\delta(\varepsilon_n) \leq O(h_n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $|\ln h_n| \Delta_n \xrightarrow{P} 0$ и $|\ln h_n|^{3/2} / \sqrt{nh_n^d} \rightarrow 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \ln h_n \right| \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(\widehat{f}_n(x), x) - \sup_{x \in W_{a_n}} \omega(f(x), x) \Big| \xrightarrow{P} 0,$$

и, как следствие, мы можем заменить A_{1/h_n} на $\widehat{B}_n$ в (19).

3. Чтобы заменить $\omega(f(x), x)f^{-1/2}(x)$ на $\omega(\widehat{f}_n(x), x)\widehat{f}_n^{-1/2}(x)$ в (19), нам надо показать, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{nh_n^d |\ln h_n^d|} \sup_{x \in D_{a_n}} \left| \left[\omega(\widehat{f}_n(x), x)\widehat{f}_n^{-1/2}(x) - \omega(f(x), x)f^{-1/2}(x) \right] \right. \\ & \quad \left. \times [\widehat{f}_n(x) - \widetilde{f}_n(x)] \right| \\ & \leq |\ln h_n| O_P(1) \sup_{x \in D_{a_n}} \left| \frac{\omega(\widehat{f}_n(x), x)\widehat{f}_n^{-1/2}(x) - \omega(f(x), x)f^{-1/2}(x)}{\omega(f(x), x)f^{-1/2}(x)} \right| \xrightarrow{P} 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. С этой целью рассмотрим

$$\begin{aligned} & \omega(\widehat{f}_n(x), x)\widehat{f}_n^{-1/2}(x) - \omega(f(x), x)f^{-1/2}(x) \\ & = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial u} \omega(u, x)u^{-1/2} \right. \\ & \quad \left. - 0.5\omega(u, x)u^{-3/2} \right] \Big|_{u=\lambda\widehat{f}_n(x)+(1-\lambda)f(x)} d\lambda (\widehat{f}_n(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Тогда на событии $E_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in D_{a_n}} \left| \frac{\omega(\hat{f}_n(x), x) \hat{f}_n^{-1/2}(x) - \omega(f(x), x) f^{-1/2}(x)}{\omega(f(x), x) f^{-1/2}(x)} \right| \\ & \leq C_7 \sup_{x \in D_{a_n}} \frac{|\hat{f}_n(x) - f(x)|}{\omega(f(x), x) f(x)} \\ & \leq C_7 a_n \frac{\|f\|_\infty C_2 \varepsilon_n(a_n) + \Delta_n + C_2 \Delta_n \varepsilon_n(a_n)}{\inf_{s \in D_{a_n}} \omega(f(s), s)} \\ & \leq C_8 a_n^{1+\delta_0} [\varepsilon_n(a_n) + \Delta_n], \end{aligned}$$

где C_7, C_8 — положительные константы. Выбор Δ_n и a_n гарантирует нужный предельный результат.

4. Наконец, смещением можно пренебречь, если при $n \rightarrow \infty$

$$B_n \sqrt{nh_n^d} \sup_{x \in D_{a_n}} \omega(f(x), x) f^{-1/2}(x) \Delta_n \leq C_9 \sqrt{nh_n^d |\ln h_n|} c a_n^\beta \Delta_n \xrightarrow{P} 0,$$

где $C_9 > 0$ — константа, что завершает доказательство теоремы 5.

З а м е ч а н и е. Из условия на смещение в теореме 5 и условий (H1), (H2) следует, что если $\Delta_n = O_P(h_n^r)$ с $r > 0$, то r должно быть больше 2, и тогда остальные условия на a_n и Δ_n должны выполняться.

6.2. Примеры. 1. Пусть $\omega(u, x) = \Psi(x) \sqrt{u}$, где Ψ удовлетворяет условиям (W.a)–(W.c) и (WD.a) $_\beta$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(u, x)}{\partial u} &= 0.5 \Psi(x) u^{-1/2}, \quad \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u^2} = -0.25 \Psi(x) u^{-3/2}, \\ \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u \partial x} &= 0.5 \nabla \Psi(x) u^{-1/2} \end{aligned}$$

для $u \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}^d$, мы можем записать условие (A1) в виде

$$\sup_{x \in \mathcal{H}} [\Psi(x) f(x)^{-3/2} + \Psi(x) f(x)^{-1/2} + |\nabla \Psi(x)| f(x)^{-1/2}] < \infty,$$

условие (A2) работает с $C_\omega(a) = Ca$ для некоторой константы $C > 0$ и всех достаточно больших $a > 0$, а условие (A3) выполнено для Ψ такого, что $\inf_{x \in D_a} \Psi(x) \geq C_0 a^{0.5-\delta_0}$.

Такой выбор весовой функции был рассмотрен в [4] для одномерного случая. Были предложены похожие условия на Δ_n , супремум брался по $\mathbf{R}$ вместо $\hat{D}_{a_n}$. Доказательство в [4] было более специализированным.

2. Пусть $\omega(u, x) = u^{0.5-\beta}$ с некоторым $\beta \in (0, 1/2)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(u, x)}{\partial u} &= (0.5 - \beta) u^{-0.5-\beta}, \quad \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u^2} = -(0.5 - \beta)(0.5 + \beta) u^{-3/2-\beta}, \\ \frac{\partial^2 \omega(u, x)}{\partial u \partial x} &= 0 \end{aligned}$$

для $u \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}^d$, условие (A1) выполнено автоматически в силу $\mathcal{K} \subset D_{a_0}$ для некоторого конечного $a_0 > 0$, условие (A2) работает с $C_\omega(a) = Ca^{-(0.5+\beta)}$ для некоторой константы $C > 0$ и всех достаточно больших $a > 0$, а условие (A3) выполнено с $C_0 = 1$ и $\delta_0 = 0.5 - \beta$.

Такой выбор весовой функции был рассмотрен в [3] для одномерного случая. Условия на a_n и Δ_n в [3] являются особым случаем наших условий. Доказательство в [3] было более сложным и специализированным.

Автор благодарит профессоров Владимира Колчинского и Ильдара Ибрагимова за поощрение и полезные разговоры по теме данной работы. Автор также признателен рецензентам, чьи замечания привели к улучшению настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bickel P. J., Rosenblatt M. On some global measures of the deviations of density function estimates. — Ann. Statist., 1973, v. 1, p. 1071–1095.
2. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 655 с.
3. Giné E., Koltchinskii V., Sakhanenko L. Convergence in distribution of self-normalized sup-norms of kernel density estimators. High Dimensional Probability III. Ed. by J. Hoffmann-Jørgensen et al. Basel: Birkhäuser, 2003, p. 241–253.
4. Giné E., Koltchinskii V., Sakhanenko L. Kernel density estimators: convergence in distribution for weighted sup-norms. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 130, № 2, p. 167–198.
5. Giné E., Koltchinskii V., Zinn J. Weighted uniform consistency of kernel density estimators. — Ann. Probab., 2004, v. 32, № 3B, p. 2570–2605.
6. Komlós J., Major P., Tusnády G. An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1975, v. 32, p. 111–131.
7. Konakov V. D., Piterbarg V. I. On the convergence rate of maximal deviation distribution for kernel regression estimates. — J. Multivariate Anal., 1984, v. 15, p. 279–294.
8. Ledoux M., Talagrand M. Probability on Banach Spaces. New York: Springer-Verlag, 1991, 480 p.
9. Луфшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВМС, 1995, 246 с.
10. Pickands J. III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 51–73.
11. Piterbarg V. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p. (Transl. Math. Monogr., 1995, v. 148.)
12. Rio E. Local invariance principles and their application to density estimation. — Probab. Theory Related Fields, 1994, v. 98, № 1, p. 21–45.
13. van der Vaart A., Wellner J. A. Weak Convergence and Empirical Processes with Applications to Statistics. New York: Springer-Verlag, 1996, 508 p.

Поступила в редакцию
04.I.2012

Исправленный вариант
11.V.2014