Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Гамкредидзе, О локальной предельной теореме для целочисленных случайных векторов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 579–585

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:26:37

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2014 г.

ГАМКРЕЛИДЗЕ Н. Г.*

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ
ДЛЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В работе дается обзор многомерных локальных предельных теорем (л.п.т.) для целочисленных случайных векторов, а также приводится достаточное условие для выполнения л.п.т. в $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова и фразы: локальная предельная теорема для решетчатых случайных величин в усиленной форме; асимптотическое равномерное распределение.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

— последовательность целочисленных случайных векторов

$$\xi_j = (\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(s)}), \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad S_n = (S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(s)}), \quad S_n^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \dots + \xi_n^{(j)},$$

и пусть ξ_j имеют конечные моменты второго порядка. Обозначим

$$\lambda_{ij} = \mathbf{E}[(S_n^{(i)} - \mathbf{E} S_n^{(i)})(S_n^{(j)} - \mathbf{E} S_n^{(j)})], \quad i, j = 1, \dots, s,$$

Λ_n — соответствующая матрица ковариаций $\{\lambda_{jk}\}_{j,k=1}^s$, Λ_{jk} — алгебраическое дополнение элемента λ_{jk} , а $|\Lambda_n|$ — детерминант матрицы, причем $|\Lambda_n| \neq 0$, и $P_n(m) = \mathbf{P}\{S_n = m\} = \mathbf{P}\{S_n^{(1)} = m_1, \dots, S_n^{(s)} = m_s\}$. Предположим $Q^{-1}(x)$ — квадратичная форма, обратная форме

$$Q(x) = \sum_{j,k=1}^s \lambda_{jk} x_j x_k = x' \Lambda_n x, \quad \text{т.е.}$$

$$Q^{-1}(x) = \sum_{j,k=1}^s \frac{\Lambda_{jk}}{|\Lambda_n|} x_j x_k = x' \Lambda_n^{-1} x.$$

Здесь $x' = \{x_1, \dots, x_s\}$ — вектор-строка, x — вектор-столбец, а Λ_n^{-1} — матрица, обратная к Λ_n .

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность независимых целочисленных случайных векторов (1) удовлетворяет локальной предельной теореме (л.п.т.), если равномерно по m

$$P_n(m) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2} |\Lambda_n|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2|\Lambda_n|} \sum_{j,k=1}^s \Lambda_{jk} x_j x_k \right\} + o \left(\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}} \right) \quad (2)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $x_j = m_j - \mathbf{E} S_n^{(j)}$, а $m = (m_1, \dots, m_s)$.

* Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина, Москва, Россия; e-mail: nggamkrelidze@yahoo.com

Предварительно приведем необходимые сведения о многомерных решетках и о многомерных решетчатых распределениях, более подробно по этому поводу см. [4], [5] и [16].

Множество M точек

$$m = n_1 l_1 + \dots + n_s l_s, \quad (3)$$

где $n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k = 1, \dots, s$, и векторы $l_1, \dots, l_s$ предполагаются линейно независимыми, называются решеткой в $\mathbf{R}^s$ с базисом $l = (l_1, \dots, l_s)$. Заметим, что точки решетки M образуют группу относительно сложения. Представление любой точки решетки M в форме (3) однозначно, но одна и та же решетка M может иметь различные базисы. Нетрудно показать, что если базисы l и l' описывают одну и ту же решетку, то $l_k = a_{k1} l'_1 + \dots + a_{ks} l'_s$, причем $\det\{a_{ik}\} = \pm 1$, поэтому величина $d(M) \equiv |\det l|$ не зависит от выбора базиса решетки M . Число $d(M)$ называют определителем решетки. Если каждая точка решетки L является также точкой решетки M , то L называется подрешеткой M . Если L — подрешетка M , то $d(L)$ кратен числу $d(M)$.

Решетчатое распределение. Пусть P — невырожденное, т.е. не сосредоточенное ни на каком линейном подпространстве, дискретное вероятностное распределение в $\mathbf{R}^s$ и множество A_p — носитель этого распределения. Если существует решетка $M \supset A_p$, то будем говорить, что P имеет решетчатое распределение. Решетчатыми называют также и такие распределения, для которых существуют такая решетка M и вектор a , что $M + a \supset A_p$ (см. [14]).

Для решетчатого распределения P рассмотрим класс $\mathfrak{M}_p$ всех решеток, содержащих A_p . Множество $M^* = \cap M_{M \in \mathfrak{M}_p}$ также является решеткой (см. [5, с. 104]), причем $P(M^*) = 1$ и для любой ее подрешетки $M' \subset M^*$ выполняется неравенство $P(M') < 1$.

Множество M^* называется *основной решеткой*, а параллелепипед, построенный на базисе основной решетки — *основным*. Заметим, что форма основного параллелепипеда определяется неоднозначно. С каждым решетчатым распределением P и решеткой M , содержащей его носитель A_p связывают его *шаг распределения* — определитель $d(M)$, если же решетка основная $M = M^*$ ($P(M^*) = 1$), то определитель *основной решетки* $d(M^*)$ называют *максимальным шагом распределения*. Из предыдущего следует, что он равен объему основного параллелепипеда.

Максимальный шаг распределения равен произведению $s!$ и наибольшего общего делителя (н.о.д.) всех объемов s -мерных симплексов, все $s+1$ вершин которых лежат в точках m , для которых $P(m) > 0$.

Исследования по многомерным локальным теоремам следовали за одномерными результатами. Для одинаково распределенных целочисленных случайных величин, при существовании конечных дисперсий для выполнения л.п.т. необходимо и достаточно, чтобы максимальный шаг распределения был равен единице (Б. В. Гнеденко [2]). Многомерный аналог этой теоремы [2] принадлежит Д. Мейзлеру, О. Парасюку и Е. Рвачевой [6]:

Теорема 1. Пусть (1) — последовательность независимых целочисленных одинаково распределенных случайных векторов, имеющих конечные моменты второго порядка

$$\lambda_{jk} = \mathbf{E}[(\xi^{(j)} - \mathbf{E} \xi^{(j)})(\xi^{(k)} - \mathbf{E} \xi^{(k)})], \quad j, k = 1, \dots, s \quad \text{и} \quad |\Lambda| = |\lambda_{jk}| \neq 0.$$

Тогда, для того, чтобы эта последовательность удовлетворяла л.п.т. (см. определение 1) необходимо и достаточно, чтобы максимальный шаг распределения случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$ равнялся единице (т.е. определитель основной решетки $d(M^*) = 1$).

В случае различно распределенных слагаемых выполнение (или невыполнение) соотношения (2) для $\xi_j \in \mathbf{R}^1$ может существенным образом зависеть от характера

распределений первых членов последовательности (1). Это явление впервые было обнаружено Ю.В. Прохоровым в его фундаментальной работе [9]. Поэтому, естественно, появилась необходимость введения нового понятия локальной теоремы — локальной теоремы в усиленной форме (л.т.у.).

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность (1) удовлетворяет локальной предельной теореме в усиленной форме (л.т.у.), если соотношение (2) выполняется как для последовательности (1), так и для любой последовательности, отличающейся от (1) лишь конечным числом членов.

Оказалось [9], что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для независимых, ограниченных, разнораспределенных случайных величин условие: наибольший общий делитель всех целых j , для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = j\} = \infty,$$

равен единице — является необходимым и достаточным для выполнения л.т.у.

В 1964 году А. Рауделюнасом была предложена аналогичная работа [10] для ограниченных случайных векторов.

Возникает вопрос: при каких более слабых ограничениях на независимые одинаково распределенные случайные величины остается в силе л.т.у? Ю.В. Розанов в [11] показал, что если считать $p_{k0} \geq p_{kj}$, где $p_{kj} = \mathbf{P}\{\xi_k^{(1)} = j\}$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для применимости л.т.у. к последовательности (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

(А) $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

(В)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{D}\xi_k^{(1)}} \sum_{|j-a_k| \leq N} (j-a_k)^2 p_{kj} = 1 \quad (4)$$

равномерно по k , где $B_n^2 = \mathbf{D}S_n^{(1)}$, $a_k = \mathbf{E}\xi_k^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы н.о.д. любой совокупности целых чисел I , для которой $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_k \in I\} > 0$, был равен 1.

В том случае, когда для случайной величины $|\xi_j| < c$ выполнено условие (4), это не означает, что теорема 3 является следствием теоремы 2, поскольку теорема 3 не предполагает, что слагаемые ограничены. А. Миталаускас «перенес» теорему 3 на многомерный случай.

Теорема 4 (см. [7]). Пусть последовательность (1) независимых целочисленных случайных векторов подчинена условиям:

1) $\lambda_{jj} = \mathbf{E}(S_n^{(j)} - \mathbf{E}S_n^{(j)})^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $j = 1, \dots, s$;

2) выполнен многомерный вариант (см. [11]):

$$\frac{1}{\mathbf{E}(\xi_k^{(j)} - \mathbf{E}\xi_k^{(j)})^2} \sum_{m_j: |m_j - \mathbf{E}\xi_k^{(j)}| \leq N} (m_j - \mathbf{E}\xi_k^{(j)})^2 \mathbf{P}\{\xi_k^{(j)} = m_j\} \rightarrow 1$$

при $N \rightarrow \infty$, равномерно по k ($k = 1, \dots, n$) и для любого $j = 1, \dots, s$.

Заметим, что для ограниченных случайных векторов $|\xi_j| \leq c$ условие 2) выполняется.

Тогда, для того, чтобы эта последовательность удовлетворяла л.т.у. необходимо и достаточно, чтобы для всех целых $q \geq 2$ и всех невырожденных целочисленных векторов $a = (a_1, \dots, a_s)$ таких, что н.о.д. $(a, q) = 1$, выполнялось следующее условие:

3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{0 \leq m < q} \mathbf{P}\{(a, \xi_k) \not\equiv m \pmod{q}\} = \infty. \quad (5)$$

Здесь и далее (x, y) означает скалярное произведение векторов x и y .

З а м е ч а н и е 1. Для ограниченных случайных векторов $|\xi_j| \leq c$ условие 2) выполняется.

З а м е ч а н и е 2. Условие 3) эквивалентно следующему условию:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_j = k\} = \infty$$

для множества всех целочисленных k , которые составляют решетку K с определителем основной решетки $d(K)$, равным единице.

З а м е ч а н и е 3. В работе А. Миталаускаса [7] приводится следующее дополнительное условие:

$$R_s = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{s1} & \rho_{s2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \geq c > 0,$$

где

$$\rho_{jk} = \frac{\mathbf{E}(S_n^{(j)} - \mathbf{E} S_n^{(j)})(S_n^{(k)} - \mathbf{E} S_n^{(k)})}{\sqrt{\mathbf{E}(S_n^{(j)} - \mathbf{E} S_n^{(j)})^2 \mathbf{E}(S_n^{(k)} - \mathbf{E} S_n^{(k)})^2}}.$$

Если $R_s = 0$, то $S_n^{(i)}, \dots, S_n^{(s)}$ окажутся линейно зависимыми и, следовательно, распределение сосредоточено не на решетке основного параллелепипеда. Таким образом, условие равенства определителя основной решетки единице, $d(M^*) = 1$, обеспечивает выполнение неравенства $R_s \geq c > 0$!

Перейдем к обсуждению следующего результата А. Рауделюнаса [10].

Теорема 5. Пусть последовательность независимых целочисленных случайных векторов (1) равномерно ограничена.

Тогда для того, чтобы эта последовательность удовлетворяла л.т.у. необходимо и достаточно выполнения условия (5) и чтобы для любого s -мерного вектора t с $|t| = 1$

$$\mathbf{E}(t, [S_n - \mathbf{E} S_n])^2 \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 4. Условие (6) ранее использовалось В. Сазоновым при доказательстве центральной предельной теоремы в работе [12]. Следовательно, теорема 5 является многомерной локальной теоремой, аналогичной интегральной теореме В. Сазонова (см. [12]). В этой работе автор делает следующее важное замечание: «условие (6) при доказательстве центральной предельной теоремы было предложено в качестве возможного Ю. Прохоровым».

З а м е ч а н и е 5. Предположение А. Рауделюнаса в работе [10] «Не нарушая общности будем считать, что $\mathbf{E} \xi_j = 0$, $j = 1, 2, \dots$ » подразумевает, что вместо исходных случайных величин ξ_j с произвольными математическими ожиданиями рассматриваются $\bar{\xi}_j = \xi_j - \mathbf{E} \xi_j$ с $\mathbf{E} \bar{\xi}_j = 0$. Однако случайные величины $\bar{\xi}_j$ могут оказаться уже нецелочисленными. Поэтому полученный автором результат справедлив только для случайных векторов $\mathbf{E} \xi_k = 0$! Разумеется, эта оговорка носит непринципиальный характер. Все утверждения работы [10] верны и для $\mathbf{E} \xi_k \neq 0$.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы показать, что условие (7) теоремы 6 влечет: А) условие 2) теоремы 4, В) условие (6) теоремы 5. Однако нельзя сказать, что теоремы 4 и 5 являются частными случаями теоремы 6, так как теоремы 4 и 5 не предполагают существование третьих моментов.

Теорема 6. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность целочисленных независимых не обязательно одинаково распределенных случайных векторов, для которых выполняется следующее условие:

$$\sup_{|t|=1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |t, \bar{\xi}_k^{(j)}|^3}{(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} (t, \bar{\xi}_k^{(j)})^2)^{3/2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где $\bar{\xi}_k^{(j)} = \xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}$, $a, j = 1, 2, \dots, s$.

Тогда, для того, чтобы эта последовательность удовлетворяла л.т.у. необходимо и достаточно, чтобы для любого целого $q \geq 2$ и всех невырожденных целочисленных векторов a таких, что н.о.д. $(a, q) = 1$ выполнялось следующее условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{0 < r < q} \mathbf{P}\{(a, \xi_k) \not\equiv r \pmod{q}\} = \infty.$$

Доказательство. Для любого $t \in \mathbf{R}^s$ с $|t| = 1$, выбрав

$$N = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} (t, [\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}])^2 \right)^{3/2} \left(\mathbf{E} (\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)})^2 \right)^{-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathbf{E} (\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)})^2} \sum_{m_j: |m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}| \geq N} (m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)})^2 p_{kj} \\ & \leq \frac{1}{N \mathbf{E} (\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)})^2} \sum_{m_j: |m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}| \geq N} |m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}|^3 p_{kj} \\ & \leq \frac{\sum_{m_j: |m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}| \geq N} |m_j - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}|^3 p_{kj}}{(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} (t, [\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}])^2)^{3/2}} < \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}|^3}{(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} (t, [\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}])^2)^{3/2}} \\ & = \sup_{|t|=1} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |t, [\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}]|^3}{(\sum_{k=1}^n \mathbf{E} (t, [\xi_k^{(j)} - \mathbf{E} \xi_k^{(j)}])^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из последнего соотношения следует условие 2) теоремы 4.

Для ограниченных случайных величин условие (7) теоремы 6 обеспечивает выполнение следующего соотношения (6) теоремы 5

$$\mathbf{E} (t, [S_n - \mathbf{E} S_n])^2 \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$ и любого s -мерного вектора t с $|t| \equiv 1$.

Действительно, пусть выполняется предположение (7) теоремы 6, в частности для вектора $\hat{t}$ с $|\hat{t}| = 1$

$$\frac{\sum_{l=1}^n \mathbf{E} |\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)}|^3}{(\sum_{l=1}^n \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2)^{3/2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, учитывая (8), справедливо условие Линдберга

$$\frac{1}{\sum_{l=1}^n \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2} \int_{|x - \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})| \geq \varepsilon (\sum_{l=1}^n \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2)^{1/2}} (x - \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)}))^2 d\mathbf{P}\{(\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)}) < x\} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Но это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы

1)

$$\frac{\max_{1 \leq l \leq n} \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2}{\sum_{l=1}^n \mathbf{E} (\hat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и

2)

$$\sup_x |F_n(\widehat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)}) < x) - \Phi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения (см. [8, теорема 22, с. 126–129], [3], а также [1] и [16]). Однако условие 1) влечет за собой условие

$$\sum_{l=1}^n \mathbf{E}(\widehat{t}, \bar{\xi}_l^{(j)})^2 \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

что и завершает доказательство теоремы 6.

Сделаем простое замечание относительно двумерных локальных теорем: маргинальные л.п.т. не обеспечивают выполнение двумерной л.п.т. Действительно, для простоты предположим, что $\mathbf{E}S_n^{(1)} = \mathbf{E}S_n^{(2)} = 0$, $\mathbf{D}S_n^{(1)} = \mathbf{D}S_n^{(2)} = 1$ и пусть справедливы маргинальные л.п.т.:

$$\mathbf{P}\{S_n^{(1)} = m_1\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-m_1^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \mathbf{P}\{S_n^{(2)} = m_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-m_2^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Одновременно может не выполняться двумерная л.п.т.:

$$\mathbf{P}\{S_n^{(1)} = m_1, S_n^{(2)} = m_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-(m_1^2 + m_2^2)/2} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = (1/2\pi)e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} + u(x_1)u(x_2)$, где $u(x)$ — нечетная, непрерывная функция, равная нулю вне интервала $-1 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, 2$, и $u(-x_j) = -u(x_j)$ для $x_j \in [-1, 1]$.

1. $f(x_1, x_2)$ — двумерная плотность распределения, которая не является нормальной.

2. Вместе с тем, маргинальные плотности $f(x_1)$ и $f(x_2)$ являются нормальными, так как

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} + u(x_1)u(x_2) \right] dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}.$$

То же верно и для $f(x_2)$.

Следует добавить, что аналогичная задача для центральной предельной теоремы обсуждалась в книге [13] и построенный нами пример идейно близок к примеру, приведенному в [13].

З а м е ч а н и е 6. Нам кажется, что предположение (7) теоремы 6, является естественным развитием идеи, заложенной в условие (6) (см. замечание 1) Ю. В. Прохорова. Это обстоятельство явилось ключевым моментом в написании настоящей работы. В связи с этим автор с благодарностью вспоминает своего учителя академика Ю. В. Прохорова.

В заключение автор выражает признательность профессору Э. Л. Пресману за дружескую критику и обсуждение настоящей заметки. Автор также благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Несколько замечаний по поводу предельной теоремы Ляпунова. Т. 4. М.: Наука, 1964, с. 358–363.
2. Гнеденко Б. В. О локальной предельной теореме теории вероятностей. — Успехи матем. наук, 1948. т. 3, в. 3, с. 187–190.
3. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.

4. Грубер П. М., Леккеркеркер К. Г. Геометрия чисел. М.: Наука, 2008, 728 с.
5. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965, 422 с.
6. Мейзлер Д., Парасюк О., Рвачева Е. О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей. — Укр. матем. журн., 1949, № 1, с. 9–20.
7. Миталаускас А. О многомерной предельной теореме для решетчатых распределений. — Тр. Лит. ССР, Сер. Б, 1960, т. 2, № 22, с. 3–14.
8. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
9. Прохоров Ю. В. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений. — Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 535–538.
10. Рауделюнас А. О многомерной локальной предельной теореме, — Лит. мат. сб., 1964, т. 4, в. 1, с. 141–145.
11. Розанов Ю. А. О локальной предельной теореме теории вероятностей для решетчатых распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 275–280.
12. Сазонов В. В. К многомерной центральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1963, т. 1, с. 219–224.
13. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. М.: Факториал, 1999, 296 с.
14. Феллер В. В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
15. Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики. М.-Л.: Гостехиздат, 1951.
16. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ОНТИ, 1938, 117 с.

Поступила в редакцию
23.II.2014

© 2014 г.

ПАВЛОВ И. В.*, НАЗАРЬКО О. В.*

ТЕОРЕМА О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СВОБОДНОГО ВЫБОРА ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СУБМАРТИНГАЛОВ¹⁾

Рассматривается семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, называемое деформацией 1-го рода, если при всех $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$, и деформацией 2-го рода, если $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \gg Q^{(n)}$. Для конечных моментов остановки вводятся меры $Q^{(\tau)}$ по формуле $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$, где $A \in \mathcal{F}_\tau$. С помощью этих мер формулируется и доказывается обобщение теоремы Дж. Л. Дуба о преобразовании свободного выбора: для деформированных субмартингалов 1-го рода (в случае соседних моментов остановки) и 2-го рода (в случае ограниченно удаленных друг от друга моментов остановки).

Ключевые слова и фразы: деформация, деформированный стохастический базис, деформированный (суб-, супер-) мартингал, момент остановки, теорема о преобразовании свободного выбора.

1. Введение. В начале 50-х годов прошлого столетия американский математик Дж. Л. Дуб доказал (для дискретного и непрерывного времени) теорему о преобразовании свободного выбора (ТПСВ) для (супер-, суб-) мартингалов (см. [1], современные

* Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: pavloviv2005@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00637а).