Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Асимптотическая нормальность оценок с локальным усреднением для слабо зависимых случайных полей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 603–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:18:07

© 2014 г.

ШАШКИН А. П.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК С ЛОКАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ¹⁾

Рассматривается семейство оценок долгосрочной дисперсии стационарного случайного поля, обладающего свойством слабой зависимости, более общим, чем положительная или отрицательная ассоциированность. Для оценок с локальным усреднением доказана асимптотическая нормальность, которая при некоторых дополнительных условиях позволяет строить асимптотические доверительные интервалы для неизвестной долгосрочной дисперсии. Получена также функциональная центральная предельная теорема.

Ключевые слова и фразы: слабая зависимость, ассоциированные случайные поля, долгосрочная дисперсия, доверительные интервалы.

Исследование асимптотического поведения слабо зависимых случайных процессов и полей — активно развивающаяся тема в современной теории вероятностей. Среди изучаемых в ней стохастических систем важное место занимают ассоциированные случайные поля и их обобщения. Напомним некоторые моменты.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [10]). Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ называется *ассоциированным*, если

$$\text{cov}(f(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), g(X_{j_1}, \dots, X_{j_n})) \geq 0 \quad (1)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$, любой пары неубывающих (по координатам) ограниченных борелевских функций $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и любых $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}^d$. Поле называется *слабо* (или *положительно*) *ассоциированным*, если оно удовлетворяет приведенному выше определению при дополнительном требовании, чтобы множества $\{i_1, \dots, i_n\}$ и $\{j_1, \dots, j_n\}$ не пересекались, и *отрицательно ассоциированным*, если при том же дополнительном требовании ковариация в (1) неположительна.

Семейство, состоящее из независимых случайных величин, ассоциировано; многие примеры положительной и отрицательной ассоциированности возникают в статистике, математической физике, теории случайных мер и графов. Известны условия, обеспечивающие ассоциированность гауссовских, устойчивых, диффузионных процессов. Разнообразные предельные теоремы (сходимость к нормальному закону, принципы инвариантности, законы повторного логарифма и т.д.) для ассоциированных случайных полей и их обобщений получали Ч. Ньюмен, Т. Биркел, А. В. Булинский, Дж. Руссас, К.-М. Шао, Т. Кристофидес и многие другие ученые, см. монографии [4], [15] и там же библиографию.

Хорошо известно, что при исследовании асимптотического поведения ассоциированных и родственных им случайных систем большое значение имеет сходимость ряда $\sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \text{cov}(X_0, X_j)$ (условие конечной восприимчивости). Так, в случае стационарного в широком смысле ассоциированного случайного поля числа

$$u_r = \sum_{j: \|j\|_\infty \geq r} \text{cov}(X_0, X_j), \quad r \in \mathbf{N},$$

(здесь $\|\cdot\|_\infty$ — максимальная норма в $\mathbf{R}^d$) называют коэффициентами Кокса–Гримметта, и, как правило, определенная скорость сходимости этих коэффициентов к нулю

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: ashashkin@hotmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00612.

при $r \rightarrow \infty$ наряду с требованиями к моментам обеспечивает справедливость тех или иных предельных теорем. В 2001 г. А.В.Булинским и Ш.Сюке [9] предложено более общее условие слабой зависимости случайного поля, охватывающее как положительно, так и отрицательно ассоциированные поля (при условии, что они квадратично-интегрируемы и обладают свойством конечной восприимчивости).

О п р е д е л е н и е 2 (см. [9]). Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ называется (BL, θ) -зависимым, если существует последовательность $\{\theta_r, r \in \mathbf{N}\}$ такая, что

$$\left| \text{cov}(f(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), g(X_{j_1}, \dots, X_{j_k})) \right| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \min\{m, k\} \theta_r \quad (2)$$

для любой пары липшицевых функций $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$, и любых непересекающихся конечных множеств $\{i_1, \dots, i_m\}, \{j_1, \dots, j_k\} \subset \mathbf{Z}^d$. Здесь r — расстояние в норме $\|\cdot\|_\infty$ между указанными множествами, а константы Липшица берутся относительно l^1 -нормы в евклидовом пространстве.

Для положительно и отрицательно ассоциированного случайного процесса или поля с конечными коэффициентами Кокса–Гримметта можно взять $\theta_r = u_r$, $r \in \mathbf{N}$ ([4, теорема 1.5.3]). Есть и другие важные примеры стохастических систем, удовлетворяющих определению 2 [4, §1.5]. Существенную роль в их описании (при условии стационарности) играет величина

$$\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \text{cov}(X_0, X_j),$$

называемая асимптотической или долгосрочной дисперсией случайного поля X . Она совпадает с дисперсией нормального распределения, которое возникает в центральной предельной теореме, если в качестве нормировки берется квадратный корень из числа слагаемых. Поэтому естественно задаться вопросом о статистическом оценивании величины σ^2 по наблюдениям (BL, θ) -зависимого случайного поля.

Прежде всего введем ряд обозначений. Для векторов $a, b \in \mathbf{R}^d$ пишем $a \leq b$ (соответственно $a < b$), если $a_i \leq b_i$ (соответственно $a_i < b_i$) при $i = 1, \dots, d$, и при $a < b$ полагаем $(a, b] = \{t \in \mathbf{R}^d: a < t \leq b\}$. Также для $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbf{R}_+^d$ используем записи $t_* = \min_{i=1, \dots, d} t_i$ и $|t| = t_1 \dots t_d$. Мощность конечного множества U обозначаем $|U|$ (в частности, тогда $|n| = |(0, n] \cap \mathbf{Z}^d|$, $n \in \mathbf{N}^d$). Символ $n \rightarrow \infty$ означает, что $n_* \rightarrow \infty$. Все суммы вида $\sum_{j \leq b}$ берутся по $j \in \mathbf{N}^d$, $j \leq b$, если обратное не указано явно.

Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — стационарное в узком смысле квадратично-интегрируемое (BL, θ) -зависимое случайное поле, а числа $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Предполагается, что случайное поле наблюдается на целочисленных параллелепипедах вида $(0, n] \cap \mathbf{Z}^d$, где $n \in \mathbf{N}^d$. Введем множества $Q_j^{(n)}$, $j \in \mathbf{N}^d$, полагая

$$Q_j^{(n)} = \prod_{i=1}^d \left((j_i - 1)([n_*^\alpha] + [n_i n_*^{-\beta}]); j_i [n_*^\alpha] + (j_i - 1)[n_i n_*^{-\beta}] \right) \cap \mathbf{Z}^d. \quad (3)$$

Пусть $T_n = \max\{j \in \mathbf{N}^d: Q_j^{(n)} \subseteq (0, n]\}$, где максимум понимается в смысле введенного выше частичного порядка в $\mathbf{R}^d$. Также нам потребуется $\Delta = \Delta_n$ для обозначения минимального расстояния между $Q_j^{(n)}$ и $Q_k^{(n)}$ при $j \neq k$ (расстояние берется в норме $\|\cdot\|_\infty$). Отметим, что при таком построении

$$|Q_j^{(n)}| \sim n_*^{\alpha d}, \quad |T_n| \sim n_*^{\beta d}, \quad \Delta_n \sim n_*^{1-\beta} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Обозначая $S(U) = \sum_{j \in U} X_j$ для конечного $U \subset \mathbf{Z}^d$ и $S_n = S((0, n])$ при $n \in \mathbf{N}^d$, для каждого $s \in (0, 1]$ рассмотрим статистики

$$\widehat{\sigma}_s(n) = \frac{1}{|T_n|} \sum_{j \leq T_n} |Q_j^{(n)}|^{s/2} \left| \frac{S(Q_j^{(n)})}{|Q_j^{(n)}|} - \frac{S_n}{|n|} \right|^s. \quad (5)$$

Подобные семейства статистик, названные статистиками с локальным усреднением, были введены М. Пелиград и К.-М. Шао [14] для систем с перемешиванием. Впоследствии значительные результаты, относящиеся к состоятельности таких оценок для ассоциированных полей, получены А. В. Булинским и М. А. Вронским [3], [4, §7.2]. Было показано, что при определенных условиях оценка (5) сходится в среднем должного порядка к числу $\sigma^s \mathbf{E}|Z|^s$, здесь и далее $Z \sim N(0, 1)$. Это важное свойство и центральные предельные теоремы для зависимых случайных полей позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для неизвестного математического ожидания поля X . Следует назвать также работы [2] и [8], где исследовались обобщения таких статистик на векторнозначные случайные поля. Целью данной заметки является установление условий асимптотической нормальности оценок с локальным усреднением. Отметим, что мы рассматриваем модификацию указанных статистик, так как важна слабая зависимость слагаемых в определении $\widehat{\sigma}_s(n)$. Начнем с доказательства сходимости распределений нормированных оценок к нормальному закону.

Теорема 1. Пусть X — описанное выше случайное поле и $\theta_r \leq c_0 r^{-\lambda}$ при некоторых $c_0, \lambda > 0$ и всех $r \in \mathbf{N}$. Предположим, что параметры α и β удовлетворяют соотношениям

$$\alpha s + \beta < s \quad \text{и} \quad \beta < \frac{\lambda s}{(1-s)d + \lambda s}. \quad (6)$$

Тогда

$$\sqrt{|T_n|}(\widehat{\sigma}_s(n) - \mathbf{E}\widehat{\sigma}_s(n)) \rightarrow Y \sim N(0, \sigma^{2s} \mathbf{D}|Z|^s) \quad (7)$$

по распределению, когда $n \rightarrow \infty$, здесь $Z \sim N(0, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно считать, что $\mathbf{E}X_0 = 0$. Сначала убедимся, что

$$\frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} |Q_j^{(n)}|^{s/2} \frac{|S_n|^s}{|n|^s} \rightarrow 0 \quad (8)$$

в среднем, когда $n \rightarrow \infty$. В самом деле, применяя неравенство Ляпунова и элементарную оценку $\mathbf{E}S^2(U) \leq (\mathbf{E}X_0^2 + \theta_1)|U|$, где конечное множество $U \subset \mathbf{Z}^d$, имеем

$$\sqrt{|T_n|} |Q_1^{(n)}|^{s/2} |n|^{-s} \mathbf{E}|S_n|^s \leq C \sqrt{|T_n|} |Q_1^{(n)}|^{s/2} |n|^{-s/2}$$

(здесь и далее C обозначает различные положительные множители, не зависящие от n , а $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^d$). Ввиду (4) последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из (8) и неравенства $||x + y|^s - |x|^s| \leq |y|^s$, справедливого при всех $x, y \in \mathbf{R}$ и $s \in (0, 1]$, следует, что достаточно проверить сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} \left(\frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} - \mathbf{E} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} \right) \rightarrow N(0, \sigma^{2s} \mathbf{D}|Z|^s) \quad (9)$$

по распределению, когда $n \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j \leq T_n} t_j |S(Q_j^{(n)})|^s \right\} - \prod_{j \leq T_n} \mathbf{E} \exp \left\{ i t_j |S(Q_j^{(n)})|^s \right\} \right| \\ & \leq C |T_n| |Q_1^{(n)}|^{s/(2-s)} \theta_{\Delta}^{s/(2-s)} \max_{j=1, \dots, n} |t_j|^{2/(2-s)}, \end{aligned}$$

где Δ фигурирует в (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим $M > 0$ и возьмем функцию h_M , определяемую равенством $h_M(x) = \max\{|x|, M\}^s$, $x \in \mathbf{R}$. Так как $\text{Lip}(h_M) = sM^{s-1}$ и

$||x|^s - h_M(x)| \leq M^s$ при $x \in \mathbf{R}$, то

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j \leq T_n} t_j |S(Q_j^{(n)})|^s \right\} - \prod_{j \leq T_n} \mathbf{E} \exp \left\{ i t_j |S(Q_j^{(n)})|^s \right\} \right| \\ & \leq \sum_{j \in T_n} \mathbf{E} \left| \exp \left\{ i t_j \left(|S(Q_j^{(n)})|^s - h_M(S(Q_j^{(n)})) \right) \right\} - 1 \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j \leq T_n} t_j h_M(|S(Q_j^{(n)})|) \right\} - \prod_{j \leq T_n} \mathbf{E} \exp \left\{ i t_j h_M(|S(Q_j^{(n)})|) \right\} \right| \\ & \leq |T_n| M^s \max_{j=1, \dots, n} |t_j| + 4|T_n| |Q_1^{(n)}| \theta_\Delta M^{2(s-1)} \max_{j=1, \dots, n} t_j^2. \end{aligned}$$

Здесь в оценке суммы по $j \leq T_n$ мы воспользовались неравенством $|e^{iy} - 1| \leq |y|$ (при $y \in \mathbf{R}$), а оценка последнего слагаемого следует из (BL, θ) -зависимости и проверяется аналогично [4, следствие 1.5.5]. Остается минимизировать получившееся выражение по M . Лемма доказана.

Из леммы 1 мы получаем, что для каждого $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \frac{t}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \in T_n} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} \right\} - \prod_{j \leq T_n} \mathbf{E} \exp \left\{ i \frac{t}{\sqrt{|T_n|}} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} \right\} \right| \\ & \leq C|T_n|^{(1-s)/(2-s)} |t|^{s/(2-s)} \theta_\Delta^{s/(2-s)} \\ & \leq C n_*^{(1-s)\beta d/(2-s)} n_*^{-\lambda(1-\beta)s/(2-s)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу центральной предельной теоремы для (BL, θ) -зависимых случайных полей [4, теорема 3.1.12] и теоремы 5.4 в [1] имеем

$$\mathbf{D} \frac{|S(Q_1^{(n)})|^s}{|Q_1^{(n)}|^{s/2}} \rightarrow \sigma^{2s} \mathbf{D}|Z|^s \quad (11)$$

при $n \rightarrow \infty$. Теперь соотношение (9) вытекает из (10), (11) и теоремы Линдберга.

З а м е ч а н и е 1. Из первого условия на параметры α и β следует, что $\beta < s$. Поэтому второе условие содержательно лишь при $s < 1$ (при $s = 1$ оно тривиально) и значениях $\lambda \leq d$.

В случае, когда $\sqrt{|T_n|}(\mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(n) - \sigma^s \mathbf{E}|Z|^s) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, из теоремы 1 непосредственно следует, что

$$\sqrt{|T_n|}(\mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(n) - \sigma^s \mathbf{E}|Z|^s) \rightarrow Y \quad (12)$$

по распределению, когда $n \rightarrow \infty$. Проверка указанного соотношения может быть проведена с помощью результатов типа Берри–Эссеена для (BL, θ) -зависимых случайных полей. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть случайное поле X такое же, как в условиях теоремы 1, причем $\sigma^2 > 0$ и $\mathbf{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$, $\delta \in (0, 1]$. Тогда существует $C > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbf{N}^d$ и $j \in \mathbf{Z}^d$ имеет место оценка

$$\left| \mathbf{E} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} - \sigma^s \mathbf{E}|Z|^s \right| \leq C n_*^{-\nu},$$

где $\nu = \delta \alpha d / (4 + d(1 + \delta)(4\lambda^{-1} + 6))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно сразу считать, что $\sigma = 1$. Согласно теореме 3.1.21 из [4], справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{|S(Q_j^{(n)})|}{\sqrt{\mathbf{D}S(Q_j^{(n)})}} > x \right\} - \mathbf{P}\{|Z| > x\} \right| \leq C |Q_j^{(n)}|^{-\vartheta}, \quad (13)$$

где $\vartheta = \delta/(4 + d(1 + \delta)(4\lambda^{-1} + 6))$. С другой стороны, согласно лемме 5.2.2, б из [4]

$$\left| \mathbf{D} \frac{S(Q_j^{(n)})}{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}} - 1 \right| \leq C n_*^{-\lambda\alpha/(1+\lambda)}.$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{|S(Q_j^{(n)})|}{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}} > x \right\} - \mathbf{P}\{|Z| > x\} \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{|S(Q_j^{(n)})|}{\sqrt{\mathbf{D}S(Q_j^{(n)})}} > x \right\} - \mathbf{P} \left\{ |Z| > x \frac{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}}{\sqrt{\mathbf{D}S(Q_j^{(n)})}} \right\} \right| \\ &\leq C |Q_j^{(n)}|^{-\vartheta} + C n_*^{-\lambda\alpha/(1+\lambda)}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались также оценкой [4, лемма 7.2.6]. Пользуясь (4) и теоремой 12 из [5, гл. 5, §5], имеем

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} - \mathbf{E} |Z|^s \right| &\leq \int_0^\infty \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{|S(Q_j^{(n)})|}{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}} > x^{1/s} \right\} - \mathbf{P}\{|Z| > x^{1/s}\} \right| dx \\ &\leq C \int_0^\infty \frac{n_*^{-\vartheta\alpha d} + n_*^{-\lambda\alpha/(1+\lambda)}}{1 + x^{2/s}} dx, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 2. Из [11] известно, что уже для независимых одинаково распределенных центрированных слагаемых $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ с конечным третьим моментом скорость сходимости первого абсолютного момента нормированной суммы $\mathbf{E} |\sum_{i=1}^n \xi_i|/\sqrt{n}$ к соответствующему моменту нормального распределения может иметь нижнюю оценку n^{-c} , где c (при должном выборе распределения ξ_1) сколь угодно близко к $1/2$. Таким образом, в общем случае эта скорость сходимости не может быть существенно быстрее скорости сходимости распределений нормированных сумм к нормальному закону в метрике Колмогорова.

Следующая теорема дает построение асимптотического доверительного интервала для неизвестной долгосрочной дисперсии σ^2 .

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и леммы 2, причем $\beta d < 2\nu$, где ν введено в формулировке леммы 2. Тогда справедливо соотношение

$$\sqrt{|T_n|} \left(\ln \frac{\widehat{\sigma}_s(n)}{\mathbf{E} |Z|^s} - s \ln \sigma \right) \rightarrow N \left(0, \frac{\mathbf{D} |Z|^s}{(\mathbf{E} |Z|^s)^2} \right) \quad (14)$$

по распределению, когда $n \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 и теоремы 1 следует (12). Утверждение теоремы получается из (12) применением классического метода стабилизации дисперсии.

З а м е ч а н и е 3. Если в условиях теоремы 1 выполняется равенство $\sigma^2 = 0$, то для справедливости соотношения (12) достаточно потребовать, чтобы $\beta d < \alpha s \lambda / (1 + \lambda)$. В самом деле, в этом случае (считая элементы случайного поля центрированными) имеем

$$\sqrt{|T_n|} |Q_1^{(n)}|^{-s/2} \mathbf{E} |S(Q_1^{(n)})|^s \leq \sqrt{|T_n|} \left(\frac{\mathbf{D} S(Q_1^{(n)})}{|Q_1^{(n)}|} \right)^{s/2} \leq C n_*^{\beta d/2} n_*^{-\alpha \lambda s/2(1+\lambda)} \rightarrow 0$$

по лемме 5.2.2 [4]. Так как еще выполнено (8), то из приведенной оценки вытекает, что $\sqrt{|T_n|} \mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(n) \rightarrow 0$.

Известно [4, теорема 1.5.18], что стационарное гауссовское случайное поле с суммируемой ковариационной функцией является (BL, θ) -зависимым. В качестве величин θ_r в этом случае можно взять коэффициенты

$$\theta_r = \sum_{j: \|j\|_\infty \geq r} |\text{cov}(X_0, X_j)|, \quad j \in \mathbf{N},$$

аналогичные коэффициентам Кокса–Гримметта для положительно или отрицательно ассоциированных полей. Для гауссовского поля условия теорем 1 и 2 можно существенно упростить. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — стационарное гауссовское случайное поле с абсолютно суммируемой ковариационной функцией, причем $\sigma^2 > 0$, а оценки с локальным усреднением построены как в (5). Тогда

(а) справедливо соотношение (7);

(б) если к тому же $\beta d < 2\alpha\lambda/(1 + \lambda)$, то выполняется и (14).

Доказательство. Начнем с двух лемм.

Лемма 3. Пусть (ξ, η) — 2-мерный гауссовский случайный вектор с нулевым средним, $\mathbf{E} \xi^2 = \mathbf{E} \eta^2 = 1$ и $\mathbf{E} \xi \eta = \rho \in (-1, 1)$. Тогда при $s \in (0, 1]$ верна оценка

$$\mathbf{E} |\xi \eta|^{s-1} \leq G(s)(1 - |\rho|)^{-1/2},$$

где G — некоторая функция.

Доказательство. Вычисляя математическое ожидание с помощью перехода к полярным координатам, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\xi \eta|^{s-1} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbf{R}^2} |xy|^{s-1} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \right\} dy dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi|^{s-1} \int_0^\infty r^{2(s-1)+1} \exp \left\{ -r^2 \frac{1-\rho \sin 2\varphi}{2(1-\rho^2)} \right\} dr d\varphi \\ &= \frac{2^s(1-\rho^2)^s \Gamma(s)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi|^{s-1} (1-\rho \sin 2\varphi)^{-s} d\varphi \\ &\leq \frac{2^{s-1} \Gamma(s)}{\pi} (1-\rho^2)^{s-1/2} (1-|\rho|)^{-s} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi|^{s-1} d\varphi \\ &\leq \frac{2^s \Gamma(s)}{\pi} (1-|\rho|)^{-1/2} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi|^{s-1} d\varphi. \end{aligned}$$

Остается заметить, что последний интеграл сходится.

Лемма 4. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(0, \Sigma)$, причем $\sigma_{jj} = \tau > 0$ ($j = 1, \dots, n$) и $|\sigma_{1j}| < \tau$, $j = 2, \dots, n$. Тогда для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$ верна оценка

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n t_j |\xi_j|^s \right\} - \mathbf{E} \exp \{ i t_1 |\xi_1|^s \} \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j=2}^n t_j |\xi_j|^s \right\} \right| \\ &\leq G(s) \tau^{s-1} \max_{j=1, \dots, n} (1 - \tau^{-1} |\sigma_{1j}|)^{-1/2} \sum_{j=2}^n |t_1 t_j \sigma_{1j}|. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица Σ невырождена. Тогда общий случай получается предельным переходом от случайных векторов, имеющих матрицы ковариаций $\Sigma + m^{-1}I$, где I — единичная матрица, $m \in \mathbf{N}$ (см. завершение доказательства теоремы 1.2.1 [4]). Далее, сразу можно считать, что $\tau = 1$. Пусть функции $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ определяются равенствами

$$f(x) = \exp \{ i t_1 |x_1|^s \}, \quad g(x) = \exp \{ i t_2 |x_2|^s + \dots + i t_n |x_n|^s \},$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Введем случайный вектор $\zeta \sim N(0, \Sigma)$, не зависящий от ξ , и положим

$$F(\mu) = \mathbf{E} f(\xi) g(\mu \xi + (1 - \mu^2)^{1/2} \zeta), \quad \mu \in [0, 1],$$

так что $F(1) - F(0)$ совпадает с выражением под знаком модуля в левой части (15). Пусть ϕ — плотность случайного вектора ξ и $\phi_\mu(x) = (1 - \mu^2)^{-n/2} \phi((1 - \mu^2)^{-1/2} x)$, $\mu \in (0, 1)$. Согласно лемме 1.2.3 из [4], при $\mu \in (0, 1)$ имеет место представление

$$F'(\mu) = \mu^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) \sum_{j=2}^n \sigma_{1j} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbf{R}^n} \phi_\mu(y) g(\mu x - y) dy dx.$$

Точнее говоря, в условии указанной леммы в [4] требуется, чтобы функции f и g были непрерывны и ограничены вместе со всеми своими частными производными; однако ее утверждение несложно распространить на рассматриваемые функции, аппроксимируя функцию $x \mapsto e^{it|x|^s}$ функциями из описанного класса и применяя теорему о мажорированной сходимости. Вычисляя производные, видим, что

$$\begin{aligned} |F'(\mu)| &\leq \sum_{j=2}^n |\sigma_{1j}| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) \phi_\mu(y) |x_1|^{s-1} |\mu x_j - y_j|^{s-1} dy dx \\ &= \sum_{j=2}^n |\sigma_{1j}| \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) \phi(z) |x_1|^{s-1} |\mu x_j - (1 - \mu^2)^{1/2} z_j|^{s-1} dz dx \\ &= \sum_{j=2}^n |\sigma_{1j}| \mathbf{E} |\xi_1|^{s-1} |\mu \xi_j - (1 - \mu^2)^{1/2} \zeta_j|^{s-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, случайный вектор $(\xi_1, \mu \xi_j - (1 - \mu^2)^{1/2} \zeta_j)$ гауссовский с нулевым средним и единичными дисперсиями, причем $|\text{cov}(\xi_1, \mu \xi_j - (1 - \mu^2)^{1/2} \zeta_j)| \leq |\sigma_{1j}|$, так что утверждение теперь следует из леммы 3 и формулы Лагранжа. Лемма 4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Обозначим для краткости

$$\eta_j^{(n)} = \sqrt{|Q_j^{(n)}|} \left(\frac{S(Q_j^{(n)})}{|Q_j^{(n)}|} - \frac{S_n}{|n|} \right), \quad j \in \mathbf{N}^d. \quad (16)$$

Легко подсчитать, что

$$|\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \leq C \left(\frac{|\text{cov}(S(Q_j^{(n)}), S(Q_k^{(n)}))|}{|Q_j^{(n)}|} + \frac{|Q_j^{(n)}|}{|n|} \right), \quad j \neq k, \quad j, k \leq T_n. \quad (17)$$

Также $\mathbf{D}\eta_j^{(n)} \rightarrow \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$. Используя лемму 4, при всех n таких, что $\mathbf{D}\eta_j^{(n)} > \sigma^2/2$ и $|\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \leq \sigma^2/4$ (последнее неравенство — при $j \neq k$) мы имеем

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \frac{t}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} \eta_j^{(n)} \right\} - \prod_{j \leq T_n} \mathbf{E} \exp \left\{ i \frac{t}{\sqrt{|T_n|}} \eta_j^{(n)} \right\} \right| \\ &\leq G(s) (\sigma^2/2)^{s-1} 2^{1/2} t^2 \max_{j \leq T_n} \sum_{k \leq T_n, k \neq j} |\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \\ &\leq C \left(\theta_\Delta + \frac{|T_n| |Q_j^{(n)}|}{|n|} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ (для второго слагаемого это следует из того, что $\alpha + \beta < 1$). Из последнего соотношения первое утверждение теоремы выводится так же, как теорема 1 из леммы 1. Для проверки второго утверждения достаточно заметить, что

$$|\mathbf{E} |\eta_j^{(n)}|^s - \mathbf{E} |Z|^s \sigma^s| = \mathbf{E} |Z|^s \left| \left(\mathbf{D} \left(\frac{S(Q_j^{(n)})}{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}} - \frac{\sqrt{|Q_j^{(n)}|} S_n}{|n|} \right) \right)^{s/2} - \sigma^s \right|$$

$$\leq C \left(\frac{|Q_j^{(n)}|}{|n|} + \left| \mathbf{D} \frac{S(Q_j^{(n)})}{\sqrt{|Q_j^{(n)}|}} - \sigma^2 \right| \right), \quad j \in \mathbf{N}^d.$$

Теперь из условий на α и β и леммы 5.2.2 в [4] следует, что после умножения на $\sqrt{|T_n|}$ последнее выражение остается стремящимся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Функциональная предельная теорема. Перейдем к установлению функциональной предельной теоремы для оценок с локальным усреднением. Для этого положим $tb = (t_1 b_1, \dots, t_1 b_d)$ при $t \in [0, 1]^d$, $U \subseteq \mathbf{R}^d$ и введем случайные поля $\widehat{\sigma}_s(\cdot, n)$ с элементами

$$\widehat{\sigma}_s(t, n) := \frac{1}{|T_n|} \sum_{j \leq t T_n} |Q_j^{(n)}|^{s/2} \left| \frac{S(Q_j^{(n)})}{|Q_j^{(n)}|} - \frac{S_n}{|n|} \right|^s, \quad t \in [0, 1]^d.$$

Условия справедливости функциональных предельных теорем для случайных элементов, принимающих значения в пространстве $L^2([0, 1]^d)$, впервые рассматривались в фундаментальной статье Ю. В. Прохорова [6]. Впоследствии для зависимых (в том числе ассоциированных) процессов и полей многие результаты были получены П. Оливейрой и Ш. Сюке [12], [13].

Теорема 4. Пусть справедливы условия теоремы 1, причем вместо второго неравенства в (6) выполнено более сильное неравенство $\beta \leq \lambda s / (\lambda s + 2d(1 - s))$. Тогда случайные процессы

$$\left\{ \sqrt{|T_n|} (\widehat{\sigma}_s(t, n) - \mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(t, n)), t \in [0, 1]^d \right\}, \quad n \in \mathbf{N}^d,$$

сходятся по распределению в пространстве $L^2([0, 1]^d)$, когда $n \rightarrow \infty$, к случайному процессу $(\mathbf{D}|Z|^s)^{1/2} \sigma^s W$, где W — d -параметрический винеровский процесс. Если справедливы также условия теоремы 2, то аналогичное утверждение верно и для процессов $\{\sqrt{|T_n|} (\widehat{\sigma}_s(t, n) - \sigma^s |t| \mathbf{E}|Z|^s), t \in [0, 1]^d\}_{n \in \mathbf{N}^d}$. Наконец, в случае, когда поле X гауссовское, для выполнения первого соотношения достаточно условий теоремы 3(a), а второго — условий теоремы 3(b).

Доказательство. Пусть сначала рассматривается (BL, θ) -зависимое случайное поле X . Проверим первое утверждение. Как и при доказательстве теоремы 1, считаем поле X центрированным. Тогда (см. (8)) $\sqrt{|T_n|} |Q_1^{(n)}|^{s/2} |S_n|^s / |n|^s \rightarrow 0$ в среднем, когда $n \rightarrow \infty$. Поэтому вместо исходного случайного процесса достаточно рассмотреть процессы

$$W_n(t) = \frac{1}{|T_n|} \sum_{j \leq t T_n} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s - \mathbf{E} |S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}}, \quad n \in \mathbf{N}^d.$$

Выберем в $L^2([0, 1]^d)$ ортонормированный базис $\{e_i, i \in \mathbf{N}\}$ и положим $f_i(u) = \int_{[u, 1]} e_i(t) dt$, $u \in [0, 1]^d$ (берется обычное скалярное произведение в $L^2([0, 1]^d)$). Тогда

$$\begin{aligned} (W_n, e_i) &= \frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \int_{[0, 1]^d} \sum_{j \leq t T_n} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s - \mathbf{E} |S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} e_i(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s - \mathbf{E} |S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} f_i(j/T_n), \end{aligned} \quad (18)$$

где $j/m := (j_1/m_1, \dots, j_d/m_d)$ (для $j, m \in \mathbf{N}^d$). Следовательно, при $N \in \mathbf{N}$

$$\sup_{n \in \mathbf{N}^d} \mathbf{E} \sum_{i=N}^{\infty} (W_n, e_i)^2 = \sup_{n \in \mathbf{N}^d} \frac{1}{|T_n|} \sum_{j, k \leq T_n} a_{jk} \frac{\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s)}{|Q_j^{(n)}|^s}, \quad (19)$$

где $a_{jk} = \sum_{i=N}^{\infty} f_i(j/T_n) f_i(k/T_n)$. В силу теоремы Дини и равенства Парсеваля ряд $\sum_i f_i^2(x)$ сходится равномерно по $x \in [0, 1]^d$.

Лемма 5. Для любого $j \in \mathbf{Z}^d$ имеет место оценка

$$\sum_{k \leq T_n} |\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s)| \leq C|Q_j^{(n)}|^s.$$

Доказательство. Прежде всего, $\mathbf{D}|S(Q_j^{(n)})|^s \leq \mathbf{E}|S(Q_j^{(n)})|^{2s} \leq C|Q_j^{(n)}|^s$ по неравенству Ляпунова. Далее, каждому $k \leq T_n$, $k \neq j$, поставим в соответствие число $\gamma_k = \text{sgn}(\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s))$. Пусть $M > 0$ фиксировано и функция h_M — та же, что использовалась при доказательстве леммы 1. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{k \leq T_n, k \neq j} |\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s)| \\ &= \text{cov}\left(|S(Q_j^{(n)})|^s, \sum_{k \leq T_n, k \neq j} \gamma_k |S(Q_k^{(n)})|^s\right) \\ &\leq \text{cov}\left(h_M(S(Q_j^{(n)})), \sum_{k \leq T_n, k \neq j} \gamma_k h_M(S(Q_k^{(n)}))\right) + 2M^s \mathbf{E}|S(Q_j^{(n)})|^s |T_n| \\ &\leq |Q_j^{(n)}| M^{2(s-1)} \theta_\Delta + 2M^s \mathbf{E}|S(Q_j^{(n)})|^s |T_n|, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы использовали (2), а Δ фигурирует в (4). Остается найти минимум данного выражения по M и заметить, что показатель степени при n_* в получившемся выражении не превосходит αds . Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 и (19) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbf{N}^d} \mathbf{E} \sum_{i=N}^{\infty} (W_n, e_i)^2 &\leq \sup_{x \in [0,1]^d} \sum_{i=N}^{\infty} f_i^2(x) \sup_{n \in \mathbf{N}^d} \max_{j \leq T_n} \sum_{k \leq T_n} \frac{|\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s)|}{|Q_j^{(n)}|^s} \\ &\leq C \sum_{i=N}^{\infty} f_i^2(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Таким образом (см. условие плотности в [4, с. 289]), семейство $\{W_n\}_{n \in \mathbf{N}^d}$ плотно.

Для доказательства первого утверждения теоремы 4 теперь достаточно (см. [4, лемма 5.1.13]) убедиться, что для любой непрерывной функции $g: [0,1]^d \rightarrow \mathbf{R}$ из всюду плотного подмножества $L^2([0,1]^d)$ справедливо соотношение

$$(W_n, g) \rightarrow (\mathbf{D}|Z|^s)^{1/2} \sigma^s(W, g) \quad (20)$$

по распределению при $n \rightarrow \infty$. Правая часть (20) имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией

$$(\mathbf{D}|Z|^s) \sigma^{2s} \int_{[0,1]^d} h^2(u) du,$$

где функция h определяется равенством

$$h(u) = \int_{[u,1]} g(t) dt, \quad t \in [0,1]^d.$$

Левая же часть аналогично (18) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} h(j/T_n) \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s - \mathbf{E}|S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}}. \quad (21)$$

Для фиксированного $p \in \mathbf{N}$ разобьем куб $[0,1]^d$ на p^d попарно непересекающихся кубов $B_1, \dots, B_{p^d}$, каждый из которых имеет лебегову меру p^{-d} , и введем функцию $h_p: [0,1]^d \rightarrow \mathbf{R}$, постоянную на внутренности каждого из кубов $B_1, \dots, B_{p^d}$ и такую, что ее значение в центральной точке каждого из этих кубов равно значению h в этой точке.

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$\frac{1}{\sqrt{|T_n|}} \sum_{j \leq T_n} h_p(j/T_n) \frac{|S(Q_j^{(n)})|^s - \mathbf{E} |S(Q_j^{(n)})|^s}{|Q_j^{(n)}|^{s/2}} \rightarrow N \left(0, (\mathbf{D}|Z|^s) \sigma^{2s} \int_{[0,1]^d} h_p^2(t) dt \right)$$

по распределению, когда $n \rightarrow \infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Так как функция h липшицева, то, обозначая $V_n(h)$ левую часть (21) и вводя аналогичную запись $V_n(h_p)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (V_n(h) - V_n(h_p))^2 &\leq \text{Lip}^2(h) p^{-2} \frac{1}{|T_n|} \sum_{j, k \leq T_n} \frac{|\text{cov}(|S(Q_j^{(n)})|^s, |S(Q_k^{(n)})|^s)|}{|Q_j^{(n)}|^s} \\ &\leq C \text{Lip}^2(h) p^{-2} \end{aligned}$$

в силу леммы 5. Отсюда и из леммы 6 утверждение выводится стандартным образом (см. [4, лемма 5.1.14]).

Второе утверждение теоремы легко получить из первого и теоремы 2, с учетом того, что

$$\mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(t, n) = |tT_n| \mathbf{E} \widehat{\sigma}_s(n) / |T_n|, \quad t \in [0, 1]^d, \quad n \in \mathbf{N}^d.$$

Теперь пусть поле X — гауссовское. Доказательство теоремы в этом случае ведется аналогично приведенному выше (с теми же изменениями, которые были сделаны при доказательстве теоремы 3 по сравнению с теоремой 1). Единственное существенное отличие состоит в установлении аналога леммы 5. Именно, требуется убедиться, что при $j \leq T_n$

$$\sum_{k \leq T_n} \left| \text{cov}(|\eta_j^{(n)}|^s, |\eta_k^{(n)}|^s) \right| \leq C, \quad (22)$$

где случайные величины $\eta_j^{(n)}$ введены в (16). Так как $\mathbf{D}\eta_j^{(n)} \rightarrow \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$, то существует такое $D > 0$, что при всех n таких, что $n_* > D$ выполняется неравенство $2\sigma^2 \geq \mathbf{D}\eta_j^{(n)} \geq \sigma^2/2$ и, следовательно,

$$|\text{corr}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \leq 2\sigma^{-2} |\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})|, \quad j \neq k, \quad j, k \leq T_n.$$

По неравенству Гебелейна ([7, лемма 10.2]; в формулировке леммы по ссылке вместо H следует читать M) при $j \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \text{cov}(|\eta_j^{(n)}|^s, |\eta_k^{(n)}|^s) \right| &\leq 2\sigma^{-2} |\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \mathbf{E} |\eta_j^{(n)}|^{2s} \\ &\leq 2^{1+1/s} \sigma^{-2+2/s} |\text{cov}(\eta_j^{(n)}, \eta_k^{(n)})|. \end{aligned}$$

Так как справедлива оценка (17) и $|T_n| |Q_j^{(n)}| / |n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то (22) теперь вытекает из суммируемости ковариационной функции случайного поля.

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Булинский А. В. Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторнозначных случайных полей. — Матем. заметки, 2004, т. 76, № 4, с. 490–501.
3. Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей. — Фундам. и прикл. матем., 1996, т. 2, № 4, с. 999–1018.

4. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 477 с.
5. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
6. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
7. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990, 284 с.
8. Bulinski A., Kryzhanovskaya N. Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization. — Probab. Math. Stat., 2006, v. 26, № 2, p. 261–281.
9. Bulinski A., Suquet Ch. Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
10. Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
11. Hall P. Bounds on the rate of convergence of moments in the central limit theorem. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 4, p. 1004–1018.
12. Oliveira P. E., Suquet Ch. An invariance principle in $L^2[0, 1]$ for nonstationary φ -mixing sequences. — Comment. Math. Univ. Carol., 1995, v. 36, p. 293–302.
13. Oliveira P. E., Suquet Ch. An $L^2[0, 1]$ invariance principle for LPQD random variables. — Portugaliae mathematica, 1996, v. 53, № 2, p. 367–379.
14. Peligrad M., Shao Q.-M. A note on estimation of variance for ρ -mixing sequences. — Stat. Probab. Lett., 1996, v. 26, № 2, p. 141–145.
15. Prakasa Rao B. L. Associated Sequences, Demimartingales and Nonparametric Inference. Boston: Birkhäuser, 2012, 272 p.

Поступила в редакцию
5.XII.2013

© 2014 г.

ШВЕДОВ А. С.*

МАТРИЧНОЕ t -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ С ВЕКТОРОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В работе вводятся матричные t -распределения, для которых параметр, представляющий число степеней свободы, является многомерным. Получена формула для плотности распределения.

Ключевые слова и фразы: t -распределение случайной матрицы, плотность распределения.

1. Введение. Различные варианты многомерных t -распределений подробно рассматриваются, например, в книге [8]. Многомерные t -распределения широко используются в приложениях.

Матричные t -распределения изучаются, например, в [7, гл. 4] и применяются, в частности, при байесовском анализе регрессионных моделей (см., например, [1]). Эти распределения являются обобщением многомерных t -распределений. Однако в предшествующих нашим исследованиях тот параметр, который для одномерных t -распределений называется числом степеней свободы, и для многомерных t -распределений, и для матричных t -распределений остается положительным числом.

Матричные t -распределения тесно связаны с матричными гамма-распределениями (которые используются и в этой работе). Именно многомерный параметр в матричном гамма-распределении обуславливает появление многомерного параметра в матричном t -распределении.

* Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: ashvedov@hse.ru