Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шведов, Матричное t -распределение с вектором степеней свободы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 613–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:48:16

4. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 477 с.
5. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
6. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
7. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990, 284 с.
8. Bulinski A., Kryzhanovskaya N. Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization. — Probab. Math. Stat., 2006, v. 26, № 2, p. 261–281.
9. Bulinski A., Suquet Ch. Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
10. Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
11. Hall P. Bounds on the rate of convergence of moments in the central limit theorem. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 4, p. 1004–1018.
12. Oliveira P. E., Suquet Ch. An invariance principle in $L^2[0, 1]$ for nonstationary φ -mixing sequences. — Comment. Math. Univ. Carol., 1995, v. 36, p. 293–302.
13. Oliveira P. E., Suquet Ch. An $L^2[0, 1]$ invariance principle for LPQD random variables. — Portugaliae mathematica, 1996, v. 53, № 2, p. 367–379.
14. Peligrad M., Shao Q.-M. A note on estimation of variance for ρ -mixing sequences. — Stat. Probab. Lett., 1996, v. 26, № 2, p. 141–145.
15. Prakasa Rao B. L. Associated Sequences, Demimartingales and Nonparametric Inference. Boston: Birkhäuser, 2012, 272 p.

Поступила в редакцию
5.XII.2013

© 2014 г.

ШВЕДОВ А. С.*

МАТРИЧНОЕ t -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ С ВЕКТОРОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В работе вводятся матричные t -распределения, для которых параметр, представляющий число степеней свободы, является многомерным. Получена формула для плотности распределения.

Ключевые слова и фразы: t -распределение случайной матрицы, плотность распределения.

1. Введение. Различные варианты многомерных t -распределений подробно рассматриваются, например, в книге [8]. Многомерные t -распределения широко используются в приложениях.

Матричные t -распределения изучаются, например, в [7, гл. 4] и применяются, в частности, при байесовском анализе регрессионных моделей (см., например, [1]). Эти распределения являются обобщением многомерных t -распределений. Однако в предшествующих нашим исследованиях тот параметр, который для одномерных t -распределений называется числом степеней свободы, и для многомерных t -распределений, и для матричных t -распределений остается положительным числом.

Матричные t -распределения тесно связаны с матричными гамма-распределениями (которые используются и в этой работе). Именно многомерный параметр в матричном гамма-распределении обуславливает появление многомерного параметра в матричном t -распределении.

* Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: ashvedov@hse.ru

Одномерные гамма-распределения образуют двухпараметрическое семейство, где оба параметра — положительные числа. При переходе от одномерных гамма-распределений к гамма-распределениям случайных матриц один из этих параметров становится положительно определенной матрицей. Другой параметр может оставаться положительным числом; если это число полуцелое, то матричное гамма-распределение называется распределением Уишарта. Можно рассматривать и более широкое семейство матричных гамма-распределений, когда указанный параметр является вектором с положительными компонентами (а не положительным числом). Это семейство гамма-распределений изучается в работах [5], [10] (см. также [7, с. 122, 123], где данное распределение называется гамма-распределением Беллмана). Многие принципиальные вопросы, касающиеся этого семейства матричных гамма-распределений, остаются неизученными. Так, даже ожидание случайной матрицы, имеющей такое гамма-распределение, найдено лишь в [4].

Стандартным путем из двух независимых случайных матриц, имеющих гамма-распределения, строится случайная матрица, имеющая бета-распределение. Таким образом вводится матричное бета-распределение с двумя векторными параметрами (см. [7, с. 24, 25], [10], [3]). Использование такого матричного бета-распределения представляется перспективным, поскольку матричные бета-распределения, задаваемые всего двумя числовыми параметрами, едва ли могут обеспечить достаточную гибкость при решении сложных задач. (Для обеих случайных матриц, имеющих гамма-распределения, положительно определенная матрица, являющаяся параметром, берется одной и той же. И матричное бета-распределение оказывается не зависящим от данного параметра. Попытки использовать случайные матрицы, имеющие гамма-распределения, для которых указанные параметры различны, — см., например, [6] — не привели пока к успеху.)

При моделировании многомерных временных рядов, у которых периоды большой волатильности чередуются с периодами малой волатильности (явление кластеризации волатильности), наряду с моделями VGARCH могут применяться модели состояние-наблюдение, основанные на бета-распределении случайных матриц. В [3] показана возможность использования в таких динамических нелинейных моделях состояние-наблюдение матричных бета-распределений с двумя векторными параметрами. Также в [3] получено выражение для функции плотности прогнозного распределения для таких моделей состояние-наблюдение. Это и есть многомерное t -распределение с вектором степеней свободы.

Матричное t -распределение с вектором степеней свободы, являющееся обобщением указанного многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, строится в п. 2 настоящей работы. Выводится формула для плотности распределения.

2. Матричное t -распределение. Пусть r и s — натуральные числа. Через I_k будем обозначать единичную ($k \times k$)-матрицу.

Пусть B — положительно определенная ($s \times s$)-матрица, и пусть $(r \times s)$ -случайная матрица Z имеет матричное нормальное распределение со средним 0 и с ковариационной $(rs \times rs)$ -матрицей $I_r \otimes B$. Здесь $\otimes$ — символ кронекерова произведения матриц. (Определение и свойства кронекерова произведения матриц представлены, например, в [2, ч. I, пп. 1.9, 1.10, с. 19–21], [9, с. 73–76].) Это означает, что функция плотности случайной матрицы Z имеет вид

$$g(z) = (2\pi)^{-rs/2} |B|^{-r/2} \operatorname{etr} \left(-\frac{1}{2} z B^{-1} z' \right), \quad (1)$$

где z — произвольная $(r \times s)$ -матрица. Штрих означает транспонирование, $\operatorname{etr}(\cdot) = \exp(\operatorname{tr}(\cdot))$.

Для любой $(r \times r)$ -матрицы $C = \{c_{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq r$, через $C^{[k]}$ и $C_{[k]}$ будем

обозначать подматрицы

$$C^{[k]} = \{c_{ij}\}, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad C_{[k]} = \{c_{ij}\}, \quad r - k + 1 \leq i, j \leq r,$$

где $k = 1, \dots, r$.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_r)$ — r -мерный вектор такой, что

$$a_j > \frac{j-1}{2}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Также введем обозначения $a_0 = 0$, $a_{r+1} = (r+1)/2$, и пусть A — положительно определенная $(r \times r)$ -матрица.

Положительно определенная случайная $(r \times r)$ -матрица W имеет гамма-распределение с параметрами a и A , если функция плотности случайной матрицы W имеет вид

$$f(w) = \gamma_{a,A} \operatorname{etr}(-Aw) \prod_{j=1}^r |w_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}}, \quad (2)$$

где

$$\gamma_{a,A} = \left(\Gamma_r^*(a) \prod_{j=0}^{r-1} |A^{[r-j]}|^{a_j - a_{j+1}} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$\Gamma_r^*(a) = \pi^{r(r-1)/4} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right),$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, обозначение $|\cdot|$ используется для определителя матрицы. Функция $f(w)$ задана в области пространства $\mathbf{R}^{r(r+1)/2}$, которую мы будем обозначать $w > 0$ и которая состоит из точек

$$w = (w_{11}, \dots, w_{1r}, w_{22}, \dots, w_{2r}, \dots, w_{rr})$$

таких, что матрица w положительно определена. Подробнее о функции плотности гамма-распределения $f(w)$ см. [5], [10], [3].

Отметим, что для числового параметра α функция

$$\Gamma_r(\alpha) = \pi^{r(r-1)/4} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(\alpha - \frac{j-1}{2}\right)$$

широко применяется в теории случайных матриц, в частности, при построении распределения Уишарта. Однако используемое при этом условие $\alpha > r - 1/2$ выглядит несколько неестественно.

Напомним, как изменяется функция плотности случайного вектора при взаимно однозначном гладком отображении Φ некоторой области N -мерного евклидова пространства на область другого N -мерного евклидова пространства, $y = \Phi(x)$, где x и y обозначают точки соответственно первого и второго евклидова пространства.

Рассмотрим N -мерные случайные векторы X и Y , принимающие значения в соответствующих областях и связанные соотношением $Y = \Phi(X)$. Если функция плотности случайного вектора Y известна и равна $f_Y(y)$, то функция плотности случайного вектора X определяется при помощи формулы

$$f_X(x) = f_Y(\Phi(x))J(y; x),$$

где $J(y; x)$ — абсолютная величина определителя матрицы

$$\frac{\partial(y)}{\partial(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial x_N} \end{pmatrix},$$

т.е. абсолютная величина якобиана отображения Φ .

Известно, что если $(r \times s)$ -матрицы u и z связаны соотношением $z = CuB$, где C и B — невырожденные матрицы порядка r и s соответственно, то

$$J(z; u) = \text{abs}(|B|^r |C|^s) \quad (4)$$

(см., например, [9, теорема 2.1.5]).

Пусть случайная $(r \times s)$ -матрица Z имеет функцию плотности $g(z)$, задаваемую формулой (1), положительно определенная случайная $(r \times r)$ -матрица W имеет функцию плотности $f(w)$, задаваемую формулой (2), и случайная $(r \times r)$ -матрица L удовлетворяет соотношению $W = L'L$. (Может быть применен любой из трех способов построения такого разложения матрицы W , т.е. матрица L может быть либо нижнетреугольной с положительными диагональными элементами, либо верхнетреугольной с положительными диагональными элементами, либо $L = W^{1/2}$.) Предположим, что Z и W независимы. Определим случайную $(r \times s)$ -матрицу

$$U = L^{-1}Z + M,$$

где M — произвольная $(r \times s)$ -матрица.

Теорема. *Функция плотности случайной матрицы U имеет вид*

$$f_U(u) = (2\pi)^{-rs/2} \Gamma_r^*(b) (\Gamma_r^*(a))^{-1} |A|^{-s/2} |B|^{-r/2} \times \prod_{j=0}^{r-1} \left| I_{r-j} + \frac{1}{2} (A^{[r-j]})^{-1} ((u-M)B^{-1}(u-M)')^{[r-j]} \right|^{b_j - b_{j+1}},$$

где u — произвольная $(r \times s)$ -матрица,

$$b_j = a_j + \frac{s}{2}, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$b = (b_1, \dots, b_r), \quad b_0 = 0, \quad b_{r+1} = (r+1)/2.$$

Доказательство. Совместная функция плотности случайных матриц W и Z имеет вид

$$f_{W,Z}(w, z) = f(w)g(z).$$

Пусть $(r \times r)$ -матрица l удовлетворяет соотношению $w = l'l$ и $(r \times s)$ -матрица u определяется соотношением

$$z = l(u - M).$$

Совместная функция плотности случайных матриц W и U имеет вид

$$f_{W,U}(w, u) = f_{W,Z}(w, z(u))J(w, z; w, u).$$

Определитель матрицы

$$\frac{\partial(w, z)}{\partial(w, u)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(w)}{\partial(w)} & \frac{\partial(z)}{\partial(w)} \\ \frac{\partial(w)}{\partial(u)} & \frac{\partial(z)}{\partial(u)} \end{pmatrix}$$

равен определителю матрицы $\partial(z)/\partial(u)$. Следовательно, $J(w, z; w, u) = J(z; u)$. В соответствии с (4) имеем $J(z; u) = |l|^s = |w|^{s/2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_{W,U}(w, u) &= (2\pi)^{-rs/2} |B|^{-r/2} \text{etr} \left(-\frac{1}{2} l(u-M)B^{-1}(u-M)'l' \right) \\ &\quad \times \gamma_{a,A} \text{etr}(-Aw) \prod_{j=1}^r |w_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}} \cdot |w|^{s/2} \\ &= (2\pi)^{-rs/2} |B|^{-r/2} \gamma_{a,A} \prod_{j=1}^r |w_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}} \cdot |w|^{s/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{etr} \left(- \left(A + \frac{1}{2} (u - M) B^{-1} (u - M)' \right) w \right) \\
& = (2\pi)^{-rs/2} |B|^{-r/2} \frac{\gamma_{a,A}}{\gamma_{b,A+(u-M)B^{-1}(u-M)'/2}} \\
& \times \gamma_{b,A+(u-M)B^{-1}(u-M)'/2} \prod_{j=1}^r |w_{[j]}|^{b_j - b_{j+1}} \\
& \times \operatorname{etr} \left(- \left(A + \frac{1}{2} (u - M) B^{-1} (u - M)' \right) w \right).
\end{aligned}$$

Интегрируя совместную функцию плотности $f_{W,U}(w, u)$ по области $w > 0$ и используя вид функции плотности (2), получаем выражение для маргинальной функции плотности случайной матрицы U :

$$f_U(u) = (2\pi)^{-rs/2} |B|^{-r/2} \frac{\gamma_{a,A}}{\gamma_{b,A+(u-M)B^{-1}(u-M)'/2}}.$$

Применение равенства (3) дает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Данная теорема позволяет называть распределение случайной матрицы U t -распределением с вектором степеней свободы. Для случая $a_1 = \dots = a_r$ эта теорема доказана, например, в [7, с. 134, 135].

Пусть A — невырожденная $(r \times r)$ -матрица, B — положительно определенная $(s \times s)$ -матрица, x — $(r \times s)$ -матрица. Тогда, как нетрудно увидеть,

$$|A + xBx'| = |A||B||B^{-1} + x'A^{-1}x|. \quad (5)$$

Приведем выражения для функции плотности $f_U(u)$ в некоторых частных случаях.

Для случая $s = 1$, $B = 1$, $M = 0$ в соответствии с теоремой имеем

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= (2\pi)^{-r/2} \Gamma_r^*(b) (\Gamma_r^*(a))^{-1} |A|^{-1/2} \\
&\times \prod_{j=0}^{r-1} \left(|A^{[r-j]}|^{-1} \left| A^{[r-j]} + \frac{1}{2} u^{[r-j]} (u^{[r-j]})' \right| \right)^{b_j - b_{j+1}},
\end{aligned}$$

где $u^{[k]}$ — k -мерный вектор, состоящий из первых k компонент r -мерного вектора u , $k = 1, \dots, r$. Применяя (5), получаем

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= (2\pi)^{-r/2} \Gamma_r^*(b) (\Gamma_r^*(a))^{-1} |A|^{-1/2} \\
&\times \prod_{j=0}^{r-1} \left(1 + \frac{1}{2} (u^{[r-j]})' (A^{[r-j]})^{-1} u^{[r-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}}
\end{aligned}$$

— функцию плотности многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, найденную другим способом в [3].

Для случая $a_1 = \dots = a_r > (r-1)/2$, вновь считая для краткости, что $M = 0$, в соответствии с теоремой имеем

$$f_U(u) = (2\pi)^{-rs/2} \Gamma_r^*(b) (\Gamma_r^*(a))^{-1} |A|^{b_1 - s/2} |B|^{-r/2} \left| A + \frac{1}{2} u B^{-1} u' \right|^{-b_1}.$$

Применяя (5), получаем

$$f_U(u) = (2\pi)^{-rs/2} \Gamma_r^*(b) (\Gamma_r^*(a))^{-1} |A|^{-s/2} |B|^{b_1 - r/2} \left| B + \frac{1}{2} u' A^{-1} u \right|^{-b_1}$$

— обычную функцию плотности матричного t -распределения.

Здесь надо отметить одно принципиальное отличие обычного матричного t -распределения (т.е. матричного t -распределения с числом степеней свободы) от матричного t -распределения с вектором степеней свободы. Для обычного матричного t -распределения из положительности b_1 и положительной определенности матриц A и B следует, что последний сомножитель в приведенном выше выражении для функции плотности $f_U(u)$ стремится к нулю на бесконечности. Для матричного t -распределения с вектором степеней свободы (функция плотности приводится в формулировке теоремы) нет требования, чтобы все разности $b_j - b_{j+1}$ были отрицательными. Поэтому какие-то из сомножителей могут не стремиться к нулю на бесконечности.

Чтобы получить выражение для функции плотности $f_U(u)$ еще в одном частном случае, рассмотрим случайную матрицу $V = P^{-1}(U - M)Q^{-1}$, где $A = PP'$, $B = Q'Q$, P — $(r \times r)$ -матрица, Q — $(s \times s)$ -матрица, причем матрица P нижнетреугольная.

Функция плотности случайной матрицы V имеет вид

$$f_V(v) = f_U(u(v))J(u; v).$$

Согласно (4)

$$J(u; v) = |P|^s |Q|^r = |A|^{s/2} |B|^{r/2}.$$

Заметим, что $(u - M)B^{-1}(u - M)' = Pvv'P'$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_V(v) &= (2\pi)^{-rs/2} \Gamma_r^*(b)(\Gamma_r^*(a))^{-1} \\ &\times \prod_{j=0}^{r-1} \left(|A^{[r-j]}|^{-1} \left| A^{[r-j]} + \frac{1}{2} (Pvv'P')^{[r-j]} \right| \right)^{b_j - b_{j+1}}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для любой $(r \times r)$ -матрицы C , любой нижнетреугольной $(r \times r)$ -матрицы L , любой верхнетреугольной $(r \times r)$ -матрицы U и любого $k = 1, \dots, r$

$$(LC)^{[k]} = L^{[k]}C^{[k]}, \quad (CU)^{[k]} = C^{[k]}U^{[k]}.$$

Поэтому при $j = 0, \dots, r-1$

$$A^{[r-j]} + \frac{1}{2} (Pvv'P')^{[r-j]} = P^{[r-j]} \left(I_{r-j} + \frac{1}{2} (vv')^{[r-j]} \right) (P^{[r-j]})'.$$

Отсюда следует, что

$$f_V(v) = (2\pi)^{-rs/2} \Gamma_r^*(b)(\Gamma_r^*(a))^{-1} \prod_{j=0}^{r-1} \left| I_{r-j} + \frac{1}{2} (vv')^{[r-j]} \right|^{b_j - b_{j+1}}.$$

Последнее выражение, разумеется, совпадает с выражением для функции плотности $f_U(u)$ при $A = I_r$, $B = I_s$, $M = 0$ и может рассматриваться как стандартизированная форма матричного t -распределения с вектором степеней свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1980, 438 с.
2. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972, 232 с.
3. Шведов А. С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение. Препринт WP2/2009/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009, 36 с.
4. Шведов А. С. Робастная регрессия с применением t -распределения и ЕМ-алгоритма. — Экономический журнал ВШЭ, 2011, т. 15, № 1, с. 68–87.
5. Bellman R. A generalization of some integral identities due to Ingham and Siegel. — Duke Math. J., 1956, v. 23, p. 571–577.

6. *de Waal D. J.* Distributions connected with a multivariate beta statistics. — *Ann. Math. Statist.*, 1970, v. 41, p. 1091–1095; correction: 1971, v. 42, p. 2165–2166.
7. *Gupta A. K., Nagar D. K.* *Matrix Variate Distributions*. Boca Raton: CRC Press, 2000, 367 p.
8. *Kotz S., Nadarajah S.* *Multivariate t Distributions and Their Applications*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004, 272 p.
9. *Muirhead R. J.* *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Hoboken: Wiley, 2005.
10. *Olkin I.* A class of integral identities with matrix argument. — *Duke Math. J.*, 1959, v. 26, p. 207–213.

Поступила в редакцию
27.XII.2011

Исправленный вариант
31.V.2014