Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Вл. Булинская, Полная классификация каталитических ветвящихся процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 4, 639–666

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:17:29

© 2014 г.

БУЛИНСКАЯ Е. Вл.*

**ПОЛНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КАТАЛИТИЧЕСКИХ
ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ¹⁾**

Изучается каталитический ветвящийся процесс (КВП) с произвольным конечным множеством катализаторов. Эта модель описывает систему частиц, в которой движение частиц задается марковской цепью с конечным или счетным пространством состояний, а ветвление может происходить только в точках нахождения катализаторов. Полученные результаты обобщают и усиливают известные ранее утверждения для КВП с одним катализатором и для ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbf{N}$, с конечным числом источников размножения и гибели частиц. Предложена классификация КВП с N катализаторами на надкритический, критический или докритический процессы в зависимости от значения перронова корня некоторой матрицы размера $N \times N$. Такая классификация согласуется с моментным анализом, проведенным для локальных и общих численностей частиц. Доказательства основных результатов базируются на построении вспомогательных многотипных процессов Беллмана–Харриса с привлечением времен достижения марковской цепью точки нахождения одного катализатора с запретом посещения остальных точек катализа, а также на применении многомерных теорем восстановления.

Ключевые слова и фразы: каталитический ветвящийся процесс, классификация, времена достижения с запретом, моментный анализ, многотипный процесс Беллмана–Харриса.

1. Введение. Рассматривается модель *каталитического ветвящегося процесса* (КВП) с конечным множеством катализаторов. Она описывает систему частиц, перемещающихся в пространстве и производящих потомство только в присутствии катализаторов. Точнее говоря, пусть в момент $t = 0$ имеется одна частица, движение которой по некоторому конечному или счетному множеству S задается марковской цепью $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и инфинитезимальной матрицей $Q = (q(x, y))_{x, y \in S}$. Когда частица достигает конечного множества катализаторов $W = \{w_1, \dots, w_N\} \subset S$, скажем, в точке w_k , она проводит

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; bulinskaya@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке фонда Дмитрия Зимина «Династия» и РФФИ (грант № 14-01-00318).

там случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\beta_k > 0$. Затем частица либо гибнет, либо покидает точку w_k соответственно с вероятностями α_k и $1 - \alpha_k$ ($0 \leq \alpha_k < 1$). Если частица умирает (в точке w_k), то в момент гибели она замещается случайным числом $\xi_k \geq 0$ потомков, расположенных в той же точке w_k . Если частица покидает w_k , то она совершает скачок в точку $y \neq w_k$ с вероятностью $-q(w_k, y)q(w_k, w_k)^{-1}$ и продолжает движение согласно марковской цепи η . Предполагается, что все новорожденные частицы ведут себя как независимые копии родительской частицы.

Будем предполагать, что марковская цепь η является неразложимой, а матрица Q — консервативной (другими словами, $\sum_{y \in S} q(x, y) = 0$, где $q(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $q(x, x) \in (-\infty, 0)$ для любого $x \in S$). Обозначим $f_k(s) := \mathbf{E} s^{\xi_k}$, $s \in [0, 1]$, вероятностную производящую функцию случайной величины ξ_k , $k = 1, \dots, N$. Будем придерживаться стандартного предположения существования конечной производной $f'_k(1)$, т.е. конечности $\mathbf{E} \xi_k$ для любого $k = 1, \dots, N$.

Изучение КВП с одним катализатором было начато еще в XX веке (см., например, [12]). В этой связи отметим также недавнюю работу [21], где в качестве основных методов при выполнении моментного анализа процесса выступали спинальная техника, т.е. лемма «от многих к одному», и теория восстановления. Заметим, что обобщение упомянутых результатов на произвольное конечное множество катализаторов нетривиально, поскольку между катализаторами существует «конкуренция». Важный частный случай нескольких катализаторов (для которого $S = \mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbf{N}$, и марковская цепь η является симметричным пространственно-однородным случайным блужданием с конечной дисперсией скачков) был исследован в [34]. Там с помощью изучения спектральных свойств эволюционных операторов были получены достаточные условия экспоненциального роста численностей частиц. Мы следуем иному пути, позволяющему установить более точные результаты.

В рамках ветвящихся процессов естественная классическая задача заключается в анализе асимптотического поведения (при $t \rightarrow \infty$) локальных и общих численностей частиц в момент t (в отношении разнообразных ветвящихся процессов без катализаторов см., например, [8]). Пусть $\mu(t)$ обозначает общее число частиц, существующих в КВП в момент $t \geq 0$. Аналогично определим локальные численности $\mu(t; y)$ как количества частиц, расположенных в различных точках $y \in S$ в момент t . В настоящей статье наша цель является тройкой. Во-первых, мы предлагаем классификацию КВП (с N катализаторами), рассматривая процесс как *надкритический*, *критический* или *докритический*, если перронов корень ρ некоторой матрицы размера $N \times N$ с неотрицательными элементами больше, равен или меньше 1 соответственно. Во-вторых, мы проводим моментный анализ локальных и общих численностей ча-

стиц, чтобы подтвердить естественность предложенной классификации (в самом деле, можно увидеть, что асимптотическое поведение моментов всех порядков существенным образом определяется введенным классом КВП). В-третьих, мы рассматриваем некоторые частные случаи КВП и тем самым показываем, что установленные результаты не только обобщают соответствующие результаты других работ, но даже уточняют их.

Наш подход состоит в использовании времен достижения марковской цепью точки нахождения одного катализатора с запретами посещения остальных точек катализа (см., например, [1], [9, гл. 2, § 11] и [17]) и построении вспомогательных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса с не более чем $N(N + 1) + 1$ типами частиц. Такой метод инициирован в статье [32], где ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}$ с одним катализатором было исследовано с помощью введения времен достижения (без запретов) точки нахождения катализатора и рассмотрения подходящего процесса Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Отметим также, что в [18] для изучения ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}$ с дискретным временем и несколькими катализаторами авторы рассматривали вложенный многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, получающийся в результате «забывания/выбрасывания времени, проведенного между посещениями мест расположения катализаторов». Последний подход является плодотворным при классификации ветвящегося случайного блуждания, поскольку многотипные процессы Гальтона–Ватсона и Беллмана–Харриса допускают одни и те же надкритический, критический или докритический режимы. Однако для дальнейшего изучения ветвящихся случайных блужданий (моментный анализ, предельные теоремы и т.п.) многотипного процесса Гальтона–Ватсона не достаточно, и поэтому Кармона и Ху опирались в [18] на другую технику, такую как леммы «от многих к одному». Наш первый вспомогательный процесс строится таким образом, чтобы исследование КВП могло быть в основном сведено к анализу процесса Беллмана–Харриса. Число частиц в этом процессе выбирается так, чтобы гарантировать неразложимость процесса. Оно не может быть меньше чем N и не должно быть больше чем $N(N + 1)$. Хорошо известно (см., например, [8, гл. 4, §§ 5, 6 и 7]), что неразложимый многотипный процесс Беллмана–Харриса классифицируется как надкритический, критический или докритический в зависимости от значения перронова корня матрицы средних числа непосредственных потомков частиц различных типов. Именно эта идея и лежит в основе классификации КВП. Кроме того, приводимая далее лемма 1 дает даже более удобную для проверки (поскольку размерность используемой матрицы понижается) форму классификации КВП с помощью перронова корня определенной неразложимой матрицы размера $N \times N$. Еще один вспомогательный процесс Беллмана–Харриса

необходим при изучении общих численностей частиц в КВП в случае невозвратной марковской цепи η . Такой процесс выбирается разложимым с финальным типом частиц. Анализ вспомогательных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса позволяет не только классифицировать КВП, но также вывести систему уравнений восстановления для средних локальных и общих численностей частиц в КВП. Чтобы осуществить моментный анализ локальных и общих численностей частиц, мы опираемся на многомерные теоремы восстановления, установленные в [19] и [28].

Используемый нами подход имеет преимущества, поскольку теория многотипных процессов Беллмана–Харриса хорошо развита и ее результаты могут быть применены к вспомогательным процессам Беллмана–Харриса, что приводит к новым результатам для КВП. Укажем лишь несколько недавних работ, относящихся к многотипным процессам Беллмана–Харриса, например, [5], [25] и [33].

Заметим также, что КВП может трактоваться как марковский ветвящийся процесс с не более чем счетным числом типов частиц, поскольку положение частицы может быть ассоциировано с ее типом. Теория ветвящихся процессов со счетным числом типов частиц, несмотря на свою длительную историю (см., например, [29]), не была до сих пор систематизирована ввиду своей сложности. Некоторые новые работы, такие как [13], [14], [23] и [30], вносят важный вклад в это направление исследований. Однако результаты упомянутых работ не покрывают утверждения, установленные в данной статье. Несколько иные модели, описывающие перемещение и размножение частиц, исследовались в работах [7], [15] и [24]. Ветвящиеся случайные блуждания, изученные в этих статьях, пространственно-однородны, в то время как главной особенностью КВП является именно пространственная неоднородность. Некоторые различия в поведении однородного ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}$ и его каталитического аналога обсуждаются в [18]. Завершая введение, отметим тесную связь каталитических ветвящихся случайных блужданий по $\mathbf{Z}$ и супер-броуновского движения с одним катализатором (см., например, [20] и [22]).

Опишем структуру статьи. В разделе 2 вводится первый вспомогательный процесс Беллмана–Харриса и предлагается классификация КВП. Раздел 3 включает теорему 1 с доказательством, представляющим моментный анализ локальных и общих численностей частиц в КВП. Там же мы строим второй вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, необходимый при изучении общих численностей частиц в случае, когда марковская цепь η невозвратна. Раздел 4 демонстрирует применения наших результатов к каталитическому ветвящемуся случайному блужданию по $\mathbf{Z}^d$ и к ветвящемуся процессу с одним катализатором. Там также приводится подробное сравнение наших результатов с известными ранее.

2. Вспомогательный процесс Беллмана–Харриса. Напомним определение ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с n типами частиц. Процесс начинается с одной частицы типа $i \in \{1, \dots, n\}$. Родительская частица имеет случайную продолжительность жизни с функцией распределения $G_i(t)$, $t \geq 0$. Погибая, частица производит потомков в соответствии с вероятностной производящей функцией $g_i(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$. Новые частицы типа $j = 1, \dots, n$ эволюционируют независимо друг от друга и от предыстории процесса с распределением продолжительности жизни $G_j(\cdot)$ и производящей функцией числа потомков $g_j(\cdot)$. Обозначим

$$M := (m_{i,j})_{i,j=1}^n, \quad \text{где } m_{i,j} = \partial_{s_j} g_i|_{\mathbf{s}=(1,\dots,1)},$$

матрицу средних числа непосредственных потомков частиц различных типов. Ветвящийся процесс Беллмана–Харриса называется *неразложимым*, если матрица M является *неразложимой* (необходимые сведения о неразложимых матрицах см., например, в [31, гл. 1, § 3]). Пусть ρ — перронов корень матрицы M (т.е. собственное значение с максимальным модулем). Процесс Беллмана–Харриса называется надкритическим, если $\rho > 1$, критическим, если $\rho = 1$, и докритическим, если $\rho < 1$ (см., например, [8, гл. 4, §§ 5, 6 и 7]). Обозначим $Z_j(t)$ число частиц типа j , существующих в момент t , где $t \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Для построения вспомогательного процесса Беллмана–Харриса в рамках КВП нам требуется ввести некоторые обозначения. Рассмотрим частицу, перемещение которой по множеству S определяется марковской цепью с генератором Q и начальным состоянием x . Пусть ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$, где $x, y \in S$ и $H \subset S$, — время, проведенное частицей после выхода из стартовой точки x до первого попадания в y , если траектория частицы не проходит через множество H . В противном случае (если траектория частицы проходит через множество H до первого попадания в y) полагаем ${}_H\bar{\tau}_{x,y} = \infty$. Будем называть случайную величину ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$ *временем достижения состояния y с запретом в H* после первого выхода из стартового состояния x . Обозначим ${}_H\bar{F}_{x,y}(t)$, $t \geq 0$, несобственную функцию распределения ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$. Очевидно, что ${}_H\bar{F}_{x,y}(0) = (\delta_{x,y} - 1)q(x, y)q(x, x)^{-1}$, где $\delta_{x,y}$ есть символ Кронекера. Явные формулы для вероятности конечности величины ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$, т.е. для величины ${}_H\bar{F}_{x,y}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} {}_H\bar{F}_{x,y}(t)$, вовлекающие вероятности с запретами и функцию Грина, выведены в [17]. Если множество запретов H пусто, мы будем писать $\bar{\tau}_{x,y}$ и $\bar{F}_{x,y}(\cdot)$ вместо соответственно $\emptyset\bar{\tau}_{x,y}$ и $\emptyset\bar{F}_{x,y}(\cdot)$.

Вернемся к КВП. Временно предположим, что КВП стартует в w_p для некоторого $p = 1, \dots, N$. Положим $W_k := W \setminus \{w_k\}$ и для $j = 1, \dots, N$ обозначим $K_j := \{k = 1, \dots, N: w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) - w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(0) > 0\}$. Пусть $K_j = \{k(j, 1), \dots, k(j, |K_j|)\}$, где $1 \leq k(j, 1) < k(j, 2) < \dots < k(j, |K_j|) \leq N$

и $|\cdot|$ обозначает мощность конечного множества. Разделим популяцию частиц, существующих в момент $t \geq 0$, на $L + 1$ групп при $L := N + \sum_{j=1}^N |K_j|$. Частицы, находящиеся в момент t в точке w_j , образуют j -ю группу, имеющую мощность $\mu(t; w_j)$, $j = 1, \dots, N$. Рассмотрим семейство, состоящее из частиц, которые покинули w_j по крайней мере однажды за интервал $[0, t]$, а после последнего посещения w_j еще не достигли W к моменту t , но когда-нибудь попадут в $w_{k(j,i)}$ до возможного посещения множества $W_{k(j,i)}$, $i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$. Это семейство имеет мощность, обозначаемую $\mu_{j,i}(t)$, и соответствует группе с номером $L(j) + i$, где $L(j) := N + \sum_{l=1}^{j-1} |K_l|$. Группа номер $L + 1$ содержит оставшиеся частицы, не включенные в первые L групп. Заметим, что последняя группа состоит из частиц, имеющих бесконечную продолжительность жизни, поскольку после момента t они больше никогда не попадут в множество катализаторов. Таким образом, после момента t эти частицы не произведут потомков и не окажут влияния на численности частиц в других L группах.

Теперь мы можем ввести вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, чтобы использовать его для изучения КВП. Рассмотрим L -мерный процесс Беллмана–Харриса, стартующий с одной частицы типа p и имеющий следующие функции распределения и производящие функции:

$$G_j(t) = 1 - e^{-\beta_j t},$$

$$g_j(\mathbf{s}) = \alpha_j f_j(s_j) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(0) s_k + (1 - \alpha_j) \sum_{i=1}^{|K_j|} T_{i,j}(\infty) s_{L(j)+i} + (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right), \quad (1)$$

$$G_{L(j)+i}(t) = \frac{T_{i,j}(t)}{T_{i,j}(\infty)}, \quad g_{L(j)+i}(\mathbf{s}) = s_{k(j,i)}, \quad (2)$$

где $T_{i,j}(t) := w_{k(j,i)} \bar{F}_{w_j, w_{k(j,i)}}(t) - w_{k(j,i)} \bar{F}_{w_j, w_{k(j,i)}}(0)$, $0 \leq t \leq \infty$ и $i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$. Легко видеть, что для процесса, построенного таким образом, вектор $(Z_1(t), \dots, Z_L(t))$ для каждого $t \geq 0$ имеет такое же распределение, как и вектор размерности L , j -я координата которого есть $\mu(t; w_j)$, а $(L(j) + i)$ -я координата представляет собой $\mu_{j,i}(t)$, $i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$.

Матрица средних $M = (m_{k,l})_{k,l=1}^L$ введенного процесса Беллмана–Харриса имеет блочный вид, т.е.

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,N+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{N+1,1} & M_{N+1,2} & \dots & M_{N+1,N+1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь матрица $M_{1,1} = (m_{k,l})_{k,l=1}^N$ обладает элементами $m_{k,l} = \delta_{k,l} \alpha_k f'_k(1) + (1 - \alpha_k)_{W_l} \bar{F}_{w_k, w_l}(0)$. Для $j = 1, \dots, N$ все элементы $N \times |K_j|$ -матрицы $M_{1,j+1}$ равны нулю, кроме j -й строки, а при $i = 1, \dots, |K_j|$ имеем $m_{j, L(j)+i} = (1 - \alpha_j) T_{i,j}(\infty)$. Если $i = 1, \dots, N$, то $|K_i| \times N$ -матрица $M_{i+1,1}$ такова, что, опуская ее j -е нулевые столбцы для всех $j \notin K_i$, получаем единичную матрицу размера $|K_i| \times |K_i|$. Если $i, j \in \{1, \dots, N\}$, то $|K_i| \times |K_j|$ -матрица $M_{i+1,j+1}$ содержит лишь нулевые элементы.

Проверим, что заданный процесс Беллмана–Харриса является неразложимым. В силу неразложимости марковской цепи η существует конечный путь из w_k в w_l с положительной вероятностью для каждого $k, l = 1, \dots, N$. В рамках КВП такой путь имеет также положительную вероятность, поскольку, находясь в точке расположения катализатора w_i , частица может покинуть его без ветвления с положительной вероятностью $1 - \alpha_i$ для каждого $i = 1, \dots, N$. Среди точек, посещенных последовательно этой траекторией марковской цепи η , выберем те, которые лежат в множестве W , скажем, $w_{p(0)}, w_{p(1)}, \dots, w_{p(J)}, w_{p(J+1)}$ при $p(0) := k$ и $p(J+1) := l$. Согласно построению вспомогательного процесса Беллмана–Харриса такой путь соответствует изменениям типа частицы с k на l . А именно, если путь цепи η достигает $w_{p(j+1)}$ сразу после выхода из $w_{p(j)}$, то тип частицы в процессе Беллмана–Харриса меняется с $p(j)$ на $p(j+1)$. В противном случае, $p(j+1) \in K_{p(j)}$, т.е. $p(j+1) = k(p(j), i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_{p(j)}|$, и изменение типа частицы с $p(j)$ на $p(j+1)$ содержит промежуточный тип $L(p(j)) + i$. Следовательно, мы заключаем, что для каждого k и l из $\{1, \dots, N\}$ существуют $n = n(k, l) \in \mathbb{N}$ и набор $\{r(1), \dots, r(n)\} \subset \{1, \dots, L\}$ такие, что $m_{k, r(1)} m_{r(1), r(2)} \cdots m_{r(n), l} > 0$. Поскольку $m_{L(j)+i, k(j, i)} = 1 > 0$ и $m_{j, L(j)+i} > 0$ для каждого $i = 1, \dots, |K_j|$ и $j = 1, \dots, N$ согласно определению (3) матрицы M , то предыдущее утверждение остается также справедливым при $k, l = 1, \dots, L$. Тем самым, мы проверили, что для каждого k и l из $\{1, \dots, L\}$ существует $n = n(k, l) \in \mathbb{N}$ такое, что $m_{k, l}^{(n)} > 0$, где $m_{k, l}^{(n)}$ есть (k, l) -й элемент матрицы M^n . Таким образом, матрица M неразложима. Более того, если $f'_i(1) > 0$ для некоторого $i = 1, \dots, N$, то $m_{i, i} > 0$ и матрица M *непериодическая* (см., например, [31, гл. 1, § 2]). В этом случае M является *примитивной* матрицей (см., например, [31, гл. 1, § 3]).

В силу теоремы Перрона–Фробениуса для неразложимых матриц (см., например, [31, гл. 1, § 4]) матрица M обладает положительным собственным значением $\rho(M)$, которое имеет максимальный модуль среди всех собственных значений этой матрицы. Величина $\rho(M)$ называется *перроновым корнем* матрицы M . Используя классификацию построенного процесса Беллмана–Харриса, назовем КВП *надкритическим*, *критическим* или *докритическим*, если соответственно $\rho(M) > 1$, $\rho(M) = 1$ или $\rho(M) < 1$, где матрица M задается формулой (3).

Пусть $G_i^*(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG_i(t)$, $\lambda \geq 0$, — преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения G_i , а $H(\lambda) := (G_i^*(\lambda)m_{i,j})_{i,j=1}^L$. Отметим, что $H(0) = M$. Матрица $H(\lambda)$ является неразложимой ввиду неразложимости матрицы M . Положим также $D(\lambda) = (d_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, $\lambda \geq 0$, с $d_{i,j}(\lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) + (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda)_{w_j} \bar{F}_{w_i, w_j}^*(\lambda)$. Легко видеть, что матрица $D = (d_{i,j})_{i,j=1}^N$, определенная как $D := D(0)$, имеет элементы

$$d_{i,j} = \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) + (1 - \alpha_i)_{w_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(\infty). \quad (4)$$

Для неразложимой матрицы A обозначим $\rho(A)$ ее перронов корень. Следующее утверждение дает удобное условие критичности для КВП.

Лемма 1. *Для каждого $\lambda \geq 0$ матрица $D(\lambda)$ неразложима, а значения $\rho(D(\lambda))$ и $\rho(H(\lambda))$ одновременно больше 1, равны 1 или меньше 1. В частности, перроновы корни $\rho(D)$ и $\rho(M)$ одновременно либо больше 1, либо равны 1, либо меньше 1.*

Доказательство. Неразложимость матрицы D (а следовательно, и матрицы $D(\lambda)$) устанавливается так же, как неразложимость матрицы M . Согласно теореме Перрона–Фробениуса матрица $H(\lambda)$ имеет строго положительный левый собственный вектор $\mathbf{v}$, соответствующий собственному значению $\rho(H(\lambda))$. Тем самым, $H(\lambda)^\top \mathbf{v} = \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}$, где символ $^\top$ обозначает транспонирование, а все векторы рассматриваются как векторы-столбцы. Другими словами, $(H(\lambda)^\top - \rho(H(\lambda))I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$, где I — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — вектор размерности L с нулевыми координатами. Применим некоторые равносильные преобразования к полученной системе уравнений, а именно, для каждого $j, k = 1, \dots, N$ прибавим $(L(j) + i)$ -ю строку, умноженную на $G_{L(j)+i}^*(\lambda) \rho(H(\lambda))^{-1}$, к k -й строке, если $k \in K_j$, т.е. $k = k(j, i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_j|$. Учитывая только первые N уравнений, мы заключаем, что

$$\mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + \rho(H(\lambda))^{-1} R(\lambda) - \rho(H(\lambda))I) = \mathbf{0}^\top.$$

Здесь $H_{1,1}(\lambda) := (G_i^*(\lambda)m_{i,j})_{i,j=1}^N$, матрица $R(\lambda) := (r_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$ имеет элементы $r_{i,j}(\lambda) := (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda)_{w_j} \bar{F}_{w_i, w_j}^*(\lambda) - w_j \bar{F}_{w_i, w_j}(0)$, в то время как $\mathbf{v}_0$ есть строго положительный вектор, координаты которого совпадают с первыми N координатами вектора $\mathbf{v}$, а $\mathbf{0}$ — вектор размерности N с нулевыми координатами. Заметим, что $D(\lambda) = H_{1,1}(\lambda) + R(\lambda)$. Очевидно, что если $\rho = \rho(H(\lambda)) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \mathbf{v}_0^\top (D(\lambda) - \rho^2 I) &= \mathbf{v}_0^\top (\rho^{-1} H_{1,1}(\lambda) + \rho^{-1} R(\lambda) - \rho I) \\ &\leq \mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + \rho^{-1} R(\lambda) - \rho I) \\ &\leq \mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + R(\lambda) - \rho I) = \mathbf{v}_0^\top (D(\lambda) - \rho I). \end{aligned}$$

Аналогично, если $\rho(H(\lambda)) \leq 1$, то предыдущая цепочка неравенств остается справедливой при замене каждого символа $\leq$ на $\geq$. Окончательно

получаем

$$D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \geq \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}_0 \quad \text{и} \quad D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \leq \rho(H(\lambda))^2 \mathbf{v}_0 \quad \text{при} \quad \rho(H(\lambda)) \geq 1, \quad (5)$$

$$D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \leq \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}_0 \quad \text{и} \quad D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \geq \rho(H(\lambda))^2 \mathbf{v}_0 \quad \text{при} \quad \rho(H(\lambda)) \leq 1. \quad (6)$$

В силу теоремы 1.6 из [31, гл. 1, § 4] второе соотношение в (5) и первое в (6) влекут за собой, что $\rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))^2$ при $\rho(H(\lambda)) \geq 1$ и $\rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))$ при $\rho(H(\lambda)) \leq 1$. Учитывая доказательство теоремы Перрона–Фробениуса, благодаря первому неравенству в (5) и второму в (6) выводим, что $\rho(D(\lambda)) \geq \rho(H(\lambda))$ при $\rho(H(\lambda)) \geq 1$ и $\rho(D(\lambda)) \geq \rho(H(\lambda))^2$ при $\rho(H(\lambda)) \leq 1$. Следовательно, если $\rho(H(\lambda)) \geq 1$, то $\rho(H(\lambda)) \leq \rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))^2$, в то время как в случае $\rho(H(\lambda)) \leq 1$ мы имеем $\rho(H(\lambda))^2 \leq \rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))$. Из этих оценок вытекает утверждение леммы 1.

Установленная лемма позволяет следующим образом переформулировать определение надкритического, критического и докритического КВП с помощью матрицы D .

О п р е д е л е н и е 1. КВП называется *надкритическим*, *критическим* или *докритическим*, если соответственно $\rho(D) > 1$, $\rho(D) = 1$ или $\rho(D) < 1$, где матрица D задается формулой (4).

3. Моментный анализ КВП. Мод показал (см. [27]), что математические ожидания численностей частиц различных типов в надкритическом неразложимом многотипном процессе Беллмана–Харриса растут экспоненциально (когда время стремится к бесконечности) с некоторой скоростью ν , называемой мальтусовским параметром. Параметр ν положителен и определяется как единственное решение уравнения $\rho(H(\nu)) = 1$. Лемма 1 показывает, что для нашего вспомогательного L -мерного надкритического процесса Беллмана–Харриса эта процедура упрощается и мальтусовский параметр может быть найден как единственный корень уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$ (заметим, что квадратная матрица $H(\lambda)$ имеет порядок $L \geq N$, в то время как квадратная матрица $D(\lambda)$ имеет порядок N). Таким образом, если $\rho(D) > 1$, то в рамках КВП мальтусовский параметр ν задается как единственный (положительный) корень уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$. Если $\rho(D) = \rho(D(0)) > 1$, то такое решение всегда существует. Действительно, согласно теореме Перрона–Фробениуса функция $\rho(D(\lambda))$ по отношению к переменной λ является строго убывающей и стремится к 0 при $\lambda \rightarrow \infty$.

Чтобы сформулировать основной результат статьи, нам потребуются некоторые новые обозначения. Если R — матрица размера $n \times n$, то $R_{i,j}$ обозначает матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, получающуюся в результате удаления i -й строки и j -го столбца матрицы R , $i, j = 1, \dots, n$. Для надкритического КВП рассмотрим функции

$a_n(x, y)$, $x, y \in S$, $n \in \mathbf{N}$, которые возникнут в описании асимптотического поведения (при $t \rightarrow \infty$) n -х факториальных моментов $m_n(t; x, y) := \mathbf{E}_x \mu(t; y)(\mu(t; y) - 1) \cdots (\mu(t; y) - n + 1)$ локальных численностей частиц в КВП (индекс x обозначает стартовую точку КВП). Функция $a_1(x, y)$ имеет наиболее простой вид, когда $x, y \in W$, а именно,

$$a_1(w_i, w_j) = \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{(\nu + \beta_j)\Delta'(\nu)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где $\Delta_{i,j}(\lambda) := (-1)^{i+j} \det(I - D(\lambda))_{i,j}$ и $\Delta'(\nu) := \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(\lambda))|_{\lambda=\nu}$. Если $N = 1$, то функция $\Delta_{1,1}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, полагается тождественно равной 1. Для $y \in S \setminus W$ пусть

$$a_1(w_i, y) = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{j,i}(\nu)(1 - \alpha_j)G_j^*(\nu)_W \bar{F}_{w_j, y}^*(\nu)}{(\nu - q(y, y))\Delta'(\nu)(1 - {}_W F_{y, y}^*(\nu))}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Здесь ${}_H F_{x', y'}^*(\lambda) := (-q(x', x'))(\lambda - q(x', x'))^{-1} {}_H \bar{F}_{x', y'}^*(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, $x', y' \in S$, $H \subset S$, т.е. ${}_H F_{x', y'}^*(t)$, $t \geq 0$, — это функция распределения времени достижения состояния y' с запретом в H , если марковская цепь η стартовала из состояния x' (см., например, [17]). Отметим, что $G_j^*(\lambda) = \beta_j(\lambda + \beta_j)^{-1}$ для каждого $\lambda \geq 0$ и $j = 1, \dots, N$. Значения $a_n(x, y)$ при $n > 1$, $x \in W$ и $y \in S$ вычисляются с помощью следующей рекуррентной схемы:

$$a_n(w_i, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k \Delta_{k,i}(n\nu)}{(n\nu + \beta_k)\Delta(n\nu)} h_{n,k}(a_1(w_k, y), \dots, a_{n-1}(w_k, y)), \quad (9)$$

где $i = 1, \dots, N$, $\Delta(\lambda) := \det(I - D(\lambda))$, $\lambda \geq 0$,

$$h_{n,k}(z_1, \dots, z_{n-1}) := \alpha_k \sum_{r=2}^n \frac{f_k^{(r)}(1)}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n}} \frac{n!}{i_1! \cdots i_r!} z_{i_1} \cdots z_{i_r} \quad (10)$$

и $k = 1, \dots, N$. На этом пути значения $a_n(x, y)$ при $n \geq 1$, $x \in S \setminus W$ и $y \in S$ определяются согласно формуле

$$a_n(x, y) = \sum_{i=1}^N {}_{W_i} F_{x, w_i}^*(n\nu) a_n(w_i, y). \quad (11)$$

Определим функции $A_n(x)$, $x \in S$, $n \in \mathbf{N}$, появляющиеся в асимптотических формулах для n -х факториальных моментов

$$M_n(t; x) := \mathbf{E}_x \mu(t)(\mu(t) - 1) \cdots (\mu(t) - n + 1)$$

общих численностей частиц в надкритическом КВП. А именно, для $n = 1$ и $x \in W$ положим

$$A_1(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j \beta_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu(\nu + \beta_j) \Delta'(\nu)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Если $n > 1$ и $x \in W$, то значения $A_n(x)$ находятся в соответствии со следующей рекуррентной схемой:

$$A_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j \Delta_{j,i}(n\nu)}{(n\nu + \beta_j) \Delta(n\nu)} h_{n,j}(A_1(w_j), \dots, A_{n-1}(w_j)). \quad (13)$$

Опираясь на последние равенства, можно получить значения $A_n(x)$ при $n \geq 1$ и $x \in S \setminus W$ с помощью соотношения

$$A_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}^*(n\nu) A_n(w_i). \quad (14)$$

Для критического КВП введем функции $b_n(x, y)$ и $B_n(x)$, $x, y \in S$, $n \in \mathbf{N}$, возникающие в асимптотических соотношениях соответственно для функций $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$. А именно, для $i, j = 1, \dots, N$ и $y \in S \setminus W$ пусть

$$b_1(w_i, w_j) = \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\beta_j \Delta'(0)}, \quad b_1(w_i, y) = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{j,i}(0)(1 - \alpha_j) w F_{w_j,y}(\infty)}{-q(y, y) \Delta'(0)(1 - w F_{y,y}(\infty))}, \quad (15)$$

где $\Delta'(0) := \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(\lambda))|_{\lambda=0+}$. Если $n > 1$, $i = 1, \dots, N$ и $y \in S$, то значения $b_n(w_i, y)$ вычисляются согласно рекуррентной схеме

$$b_n(w_i, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k f_k''(1) \Delta_{k,i}(0)}{2(n-1) \Delta'(0)} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, y) b_{n-r}(w_k, y). \quad (16)$$

Наконец, значения $b_n(x, y)$ при $n \geq 1$, $x \in S \setminus W$ и $y \in S$ определяются формулой

$$b_n(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) b_n(w_i, y). \quad (17)$$

Для $i = 1, \dots, N$ положим

$$B_1(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)}. \quad (18)$$

Если $n > 1$, то значения $B_n(w_i)$ подсчитываются рекуррентно, а именно,

$$B_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j f_j''(1) \Delta_{j,i}(0)}{2(2n-1) \Delta'(0)} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} B_r(w_j) B_{n-r}(w_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (19)$$

На основе последних равенств значения $B_n(x)$ при $n \geq 1$ и $x \in S \setminus W$ находятся следующим образом:

$$B_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) B_n(w_i). \quad (20)$$

Наконец, для докритического КВП определим функции $C_n(x)$, $x \in S$, $n \in \mathbf{N}$, появляющиеся в описании асимптотического поведения $M_n(t; x)$. Пусть

$$C_1(w_i) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j(f'_j(1) - 1)\Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (21)$$

$$C_1(x) = 1 - \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) + \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) C_1(w_i), \quad x \in S \setminus W, \quad (22)$$

а для $n > 1$ положим

$$C_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} h_{n,j}(C_1(w_j), \dots, C_{n-1}(w_j)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

$$C_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) C_n(w_i), \quad x \in S \setminus W. \quad (24)$$

Следующая теорема является основным результатом настоящего раздела, в котором проводится моментный анализ локальных и общих численностей частиц в КВП. Эта теорема обобщает теоремы 4.1, 4.2 из [10] и теорему 1 из [21], а также некоторые утверждения теоремы 2 из [12].

Теорема 1. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ при условии $\mathbf{E} \xi_i^n < \infty$ для любого $i = 1, \dots, N$ функции $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ ограничены на произвольном конечном интервале из $[0, \infty)$ при фиксированных $x, y \in S$. Более того, асимптотическое поведение $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ при $t \rightarrow \infty$ зависит существенно от класса КВП и описывается следующим образом.

1. Если $\rho(D) > 1$, то $\nu > 0$ и при $t \rightarrow \infty$

$$m_n(t; x, y) = a_n(x, y)e^{\nu t} + o(e^{\nu t}), \quad (25)$$

$$M_n(t; x) = A_n(x)e^{\nu t} + o(e^{\nu t}), \quad (26)$$

где функции $a_n(x, y)$ и $A_n(x)$, $x, y \in S$, строго положительны.

2. Если $\rho(D) = 1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$m_n(t; x, y) = b_n(x, y)t^{n-1} + o(t^{n-1}), \quad (27)$$

$$M_n(t; x) = B_n(x)t^{2n-1} + o(t^{2n-1}), \quad (28)$$

где функция $b_n(x, y)$ строго положительна при всех значениях $x, y \in S$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ при любых $i, j = 1, \dots, N$ и, дополнительно, в случае возвратной цепи η и $n \geq 2$ верно неравенство $\sum_{i=1}^N \alpha_i |f_i(s) - s| > 0$ для некоторого $s \in [0, 1)$. Далее, функция $B_n(x)$ строго положительна для любого $x \in S$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна и $\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ для

всех $i, j = 1, \dots, N$. В противном случае соответственно $b_n(\cdot, \cdot) \equiv 0$ и $B_n(\cdot) \equiv 0$.

3. Если $\rho(D) < 1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$m_n(t; x, y) = o(1), \quad (29)$$

$$M_n(t; x) = C_n(x) + o(1), \quad (30)$$

где функция $C_n(x)$ строго положительна для каждого $x \in S$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна. В противном случае $C_n(\cdot) \equiv 0$.

Подчеркнем, что мы не налагаем на характер марковской цепи η таких ограничений, как симметрия и однородность переходных вероятностей или конечная дисперсия скачков и т.п. Поэтому в теореме 1 мы устанавливаем точные асимптотические соотношения в пункте 1 и только частично в пунктах 2 и 3. Невозможно предоставить какую-либо полезную и общую информацию по пунктам 2 и 3 без дальнейших предположений о лежащем в основе КВП движении частиц. Например, даже для критического симметричного ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}^d$ с одним катализатором (см. [12]) имеется четыре различных асимптотических формулы для $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ в зависимости от размерности $d = 1, 2, 3$ или 4 и, тем самым, в зависимости от скорости убывания переходных вероятностей (заметим, что для $d \geq 5$ теорема 1 обобщает соответствующие результаты из [12]). Более того, для докритического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}^d$ с одним катализатором (см. [2]) порядки убывания функций $m_n(t; x, y)$ отличаются для всех $d \in \mathbf{N}$.

Перейдем к проверке справедливости утверждений, сформулированных в теореме 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Главным образом, мы будем использовать вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, построенный в разделе 2. Вначале установим теорему 1 для $x, y \in W$ (случай 1) и далее распространим эти результаты на общий случай $x, y \in S$ (случай 2).

Случай 1. Итак, предположим, что $x, y \in W$. Дальнейшее доказательство теоремы 1 для случая 1 разбивается на 9 шагов. На шаге 1 мы выводим систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов локальных численностей частиц в КВП. Затем на шагах 2, 3 и 4 мы опираемся на эту систему, чтобы доказать соответствующие утверждения (25), (27) и (29) теоремы 1, относящиеся к моментному анализу локальных численностей частиц. Далее, на шагах 5 и 6 выводим систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов общих численностей частиц в КВП в зависимости от того, является марковская цепь η возвратной или невозвратной. Наконец, на шагах 7, 8 и 9 мы пользуемся этими системами, чтобы установить соответственно

утверждения (26), (28) и (30) теоремы 1, касающиеся моментного анализа общего числа частиц. Заметим, что на шаге 6 мы вводим вспомогательный разложимый $(L + 1)$ -мерный процесс Беллмана–Харриса с финальным типом частиц.

Шаг 1. На данной стадии выведем систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов локальных численностей частиц в КВП. При $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $k, l = 1, \dots, L$ обозначим $m_n^{\text{BH}}(t; k, l) := \mathbf{E}_k Z_l(t) (Z_l(t) - 1) \cdots (Z_l(t) - n + 1)$ факториальный момент n -го порядка числа частиц $Z_l(t)$ типа l в момент t в процессе Беллмана–Харриса (индекс k означает тип родительской частицы). В соответствии с построением вспомогательного процесса имеем $m_n(t; w_i, w_j) = m_n^{\text{BH}}(t; i, j)$ для всех $n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$, $i, j = 1, \dots, N$. Таким образом, если выполнено условие $\mathbf{E} \xi_k^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$ и всех $k = 1, \dots, N$, то конечность функций $m_n(t; w_i, w_j)$ для каждого $t \geq 0$ и любых $i, j = 1, \dots, N$ вытекает из теоремы 1 в [8, гл. 8, § 6]. Более того, в силу этой теоремы функции $m_1^{\text{BH}}(t; k, l)$, $t \geq 0$, $k, l = 1, \dots, L$, удовлетворяют следующей системе уравнений восстановления:

$$m_1^{\text{BH}}(t; k, l) = \delta_{k,l}(1 - G_k(t)) + \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_1^{\text{BH}}(t - u; r, l) dG_k(u), \quad (31)$$

в то время как при $n > 1$ эта теорема и обобщенная формула Фаа ди Бруно (см. [26]) влекут

$$\begin{aligned} m_n^{\text{BH}}(t; k, l) &= \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_n^{\text{BH}}(t - u; r, l) dG_k(u) \\ &+ \sum \frac{n!}{\prod_{p=1}^{n-1} i_p^{(1)}! \cdots i_p^{(L)}!} \frac{\partial^{J(1)+\cdots+J(L)} g_k(\mathbf{s})}{\partial s_1^{J(1)} \cdots \partial s_L^{J(L)}} \Big|_{\mathbf{s}=(1,\dots,1)} \\ &\times \int_0^t \prod_{p=1}^{n-1} \left(\left(\frac{m_p^{\text{BH}}(t - u; 1, l)}{p!} \right)^{i_p^{(1)}} \cdots \left(\frac{m_p^{\text{BH}}(t - u; L, l)}{p!} \right)^{i_p^{(L)}} \right) dG_k(u). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь символ $\sum$ означает сумму, взятую по всем L -мерным векторам $\mathbf{i}_1 = (i_1^{(1)}, \dots, i_1^{(L)}), \dots, \mathbf{i}_{n-1} = (i_{n-1}^{(1)}, \dots, i_{n-1}^{(L)})$ с неотрицательными целыми компонентами, удовлетворяющими равенству $\sum_{p=1}^{n-1} p(i_p^{(1)} + \cdots + i_p^{(L)}) = n$. Для каждого $r = 1, \dots, L$ также положим $J(r) := \sum_{p=1}^{n-1} i_p^{(r)}$. Подставляя в (32) явные формулы (1) и (2) для производящих функций числа потомков $g_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, L$, процесса Беллмана–Харриса, приходим к более компактному соотношению

$$m_n^{\text{BH}}(t; k, l) = \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_n^{\text{BH}}(t - u; r, l) dG_k(u)$$

$$+ \mathbf{I}(k \in \{1, \dots, N\}) \sum_{i_1! \dots i_{n-1}!}^{\approx} \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \times \int_0^t \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{m_p^{\text{BH}}(t-u; k, l)}{p!} \right)^{i_p} dG_k(u), \quad (33)$$

где $\mathbf{I}(\cdot)$ есть индикатор, а под символом $\sum^{\approx}$ понимается сумма, взятая по всем неотрицательным целым $i_1, \dots, i_{n-1}$ таким, что $\sum_{p=1}^{n-1} p i_p = n$. Мы также используем обозначение $J := i_1 + \dots + i_{n-1}$.

Шаг 2. Теперь докажем часть утверждения (25), относящуюся к случаю $x, y \in W$. Итак, предположим, что $\rho(D) > 1$. Применяя теорему 2.1, пункт (iii), из [19] к системе уравнений восстановления (31), получаем

$$e^{-\nu t} m_1^{\text{BH}}(t; i, j) \rightarrow \frac{(-1)^{i+j} \det(I - H(\nu))_{j,i}}{(\nu + \beta_j) \frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=\nu}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (34)$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$. Здесь $\nu > 0$ и $\frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=\nu} > 0$ (см., например, [27]). Сравнивая формулы (7) и (25) с (34), видим, что остается установить соотношения между определителями и алгебраическими дополнениями матриц $I - H(\lambda)$ и $I - D(\lambda)$. Следующая лемма дает эти соотношения.

Лемма 2. Для всех $\lambda \geq 0$ и $i = 1, \dots, |K_j|$, $j, k = 1, \dots, N$ имеем

$$\det(I - H(\lambda)) = \det(I - D(\lambda)), \quad \det(I - H(\lambda))_{j,k} = \det(I - D(\lambda))_{j,k},$$

$$(-1)^{L(j)+i+k} \det(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k} = (-1)^{j+k} m_{j,L(j)+i} G_j^*(\lambda) \det(I - D(\lambda))_{j,k}.$$

Доказательство. Применим к столбцам матрицы $I - H(\lambda)$ преобразования, которые не изменяют ее определителя. А именно, для всех $j, k = 1, \dots, N$ прибавим $(L(j) + i)$ -й столбец, умноженный на $G_{L(j)+i}^*(\lambda)$, к k -му столбцу, если $k \in K_j$, т.е. $k = k(j, i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_j|$. После этих преобразований мы получим блочную матрицу, состоящую из четырех блоков. Левый верхний блок размера $N \times N$ есть матрица $I - D(\lambda)$, в то время как левый нижний блок размера $(L - N) \times N$ и правый нижний блок размера $(L - N) \times (L - N)$ — это соответственно нулевая и единичная матрицы. Используя формулу для определителя блочной матрицы (см., например, [6, гл. 2, § 5]), приходим к первому утверждению леммы 2. Второе утверждение устанавливается аналогично. Для доказательства третьего утверждения применим описанные выше преобразования к матрице $(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k}$ и затем переставим столбец под номером $L(j) + i - 1$ на место столбца под номером N . Определители матрицы $(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k}$ и преобразованной матрицы совпадают с точностью до множителя $(-1)^{L(j)+i-N-1}$. Далее

мы пользуемся формулой для определителя блочной матрицы еще раз и применяем разложение определителя по N -му столбцу. Лемма 2 полностью доказана.

Таким образом, в силу (34) и леммы 2 мы доказали (25) при $n = 1$ и $x, y \in W$. Для проверки соотношения (25) при $n > 1$ и $x, y \in W$ используем индукцию по переменной n . Случай $n = 1$ разобран выше. Пусть формула (25) верна для всех моментов порядков, не превышающих $n - 1$. Тогда второй член в правой части (33), обозначаемый $V_n(t; k, l)$, имеет следующее асимптотическое поведение:

$$V_n(t; k, l) \sim \mathbf{I}(k \in \{1, \dots, N\}) e^{n\nu t} G_k^*(n\nu) \sum \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{a_p(w_k, w_l)}{p!} \right)^{i_p}$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, \dots, L$ и $l = 1, \dots, N$. Учитывая последнее соотношение и применяя теорему 2.1, пункт (iv), из [19] к системе уравнений восстановления (33), получаем

$$\begin{aligned} \frac{m_n^{\text{BH}}(t; i, j)}{e^{n\nu t}} &\rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{i+k} \beta_k \det(I - H(n\nu))_{k,i}}{(n\nu + \beta_k) \det(I - H(n\nu))} \\ &\quad \times h_{n,k}(a_1(w_k, w_j), \dots, a_{n-1}(w_k, w_j)) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Здесь мы пользуемся альтернативным представлением (см., например, [11, теорема 3.3]) для функции $h_{n,k}$, определенной в (10). Последнее асимптотическое соотношение в сочетании с леммой 2 и формулой (9) приводит к желаемому утверждению в (25), когда $n > 1$ и $x, y \in W$. Отметим, что функции $a_n(w_i, w_j)$, $n \geq 1$, $i, j = 1, \dots, N$, строго положительны согласно, например, [6, гл. 13, § 3].

Шаг 3. Далее мы докажем утверждение (27) при $x, y \in W$. Предположим, что $\rho(D) = 1$ или, что эквивалентно, что единственное решение уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$ есть $\nu = 0$. Применяя теорему 2.1, пункт (iii), из [19] к (31), приходим к следующему соотношению:

$$m_1^{\text{BH}}(t; i, j) \rightarrow \frac{(-1)^{i+j} \det(I - H(0))_{j,i}}{\beta_j \frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=0+}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Эта формула вместе с (15) и леммой 2 влечет за собой требуемое утверждение (27) при $n = 1$. Для $n > 1$ воспользуемся методом индукции по переменной n . Совершая шаг индукции, получаем

$$\begin{aligned} V_n(t; k, l) &\sim \sum \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{b_p(w_k, w_l)}{p!} \right)^{i_p} \int_0^t (t-u)^{n-J} dG_k(u) \\ &\sim t^{n-2} \frac{\alpha_k f_k''(1)}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, w_l) b_{n-r}(w_k, w_l), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

для $k, l = 1, \dots, N$, в то время как $V_n(t; k, l) = 0$ для $k = N + 1, \dots, L$, $l = 1, \dots, N$. Следовательно, применяя к (33) теорему 2.1, пункт (v), из [19], мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{m_n^{\text{BH}}(t; i, j)}{t^{n-1}} &\rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{i+k} \alpha_k f_k''(1) \det(I - H(0))_{k,i}}{2(n-1)^{\frac{d}{d\lambda}} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=0+}} \\ &\times \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, w_j) b_{n-r}(w_k, w_j) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Утверждение (27) при $n > 1$ теперь следует из последнего соотношения, определения (16) и леммы 2. В силу [6, гл. 13, § 3], алгебраическое дополнение $\Delta_{i,j}(0)$ строго положительно для любых $i, j = 1, \dots, N$. Как установлено в [27], $\Delta'(0) \in (0, \infty]$. Более того, $\Delta'(0) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Тем самым, функции $b_n(w_i, w_j)$ строго положительны при всех $n \in \mathbf{N}$, $i, j = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ и, дополнительно, в случае возвратной цепи η и $n \geq 2$ верно неравенство $\sum_{i=1}^N \alpha_i |f_i(s) - s| > 0$ для некоторого $s \in [0, 1)$. Заметим, что последнее условие позволяет выделить случай только перемещения частицы без размножения. Такое КВП является критическим для возвратной марковской цепи η и докритическим для невозвратной η .

Шаг 4. Соотношение (29) для случая $x, y \in W$ проверяется применением к (31) и (33) теоремы 2.2, пункт (ii), из [28]. Здесь мы существенно опираемся на тот факт, что M^n сходится поэлементно к нулевой матрице при $n \rightarrow \infty$, поскольку в докритическом случае в силу леммы 1 выполнено неравенство $\rho(M) < 1$.

Шаг 5. Выведем систему уравнений восстановления, вовлекающую факториальные моменты общего числа частиц, когда $x \in W$ и цепь η возвратна. При $t \geq 0$ обозначим $Z(t) := \sum_{j=1}^L Z_j(t)$ общее число частиц в момент t во вспомогательном процессе Беллмана–Харриса. В соответствии с построением этого процесса законы распределения для $\mu(t)$ и $Z(t)$ совпадают при каждом $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η возвратна. В самом деле, если марковская цепь η невозвратна, то в момент t в КВП с положительной вероятностью существуют частицы, имеющие бесконечные продолжительности жизни, поскольку они никогда не достигнут множества W после момента t . Эти частицы не охватываются нашим L -мерным процессом Беллмана–Харриса. Поэтому пока сосредоточимся на возвратном случае. Тогда имеем $M_n(t; w_i) = M_n^{\text{BH}}(t; i)$ для всех $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $i = 1, \dots, N$, где $M_n^{\text{BH}}(t; k) := \mathbf{E}_k Z(t)(Z(t) - 1) \cdots (Z(t) - n + 1)$, $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $k = 1, \dots, L$. Следовательно, при условии $\mathbf{E} \xi_l^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$ и любых $l = 1, \dots, N$ теорема 1 из [8, гл. 8, § 6] влечет конечность функций $M_n(t; w_i)$ для каждого $t \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, N$. Более того, в силу этой

теоремы функции $M_1^{\text{BH}}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L$, удовлетворяют следующей системе уравнений восстановления:

$$M_1^{\text{BH}}(t; k) = 1 - G_k(t) + \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t M_1^{\text{BH}}(t-u; r) dG_k(u). \quad (35)$$

При $n > 1$ эта теорема и обобщенная формула Фаа ди Бруно (см. [26]) дают уравнения относительно $M_n^{\text{BH}}(t; k)$ такие же, как полученные из (32) после замены $m_n^{\text{BH}}(t; k, l)$ на $M_n^{\text{BH}}(t; k)$. Тем самым, для $M_n^{\text{BH}}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L$, система уравнений восстановления (33) имеет место, если функцию $m_n^{\text{BH}}(t; k, l)$ заменить на $M_n^{\text{BH}}(t; k)$.

Шаг 6. Теперь рассмотрим КВП в случае, когда движение частиц управляется невозвратной марковской цепью η . Чтобы охватить невозвратный случай, построим новый вспомогательный процесс Беллмана–Харриса с $L+1$ типами частиц, причем $(L+1)$ -й тип является финальным (см., например, [3] и [8, гл. 5, § 3]). Для нового процесса Беллмана–Харриса обозначим $\hat{G}_j(t)$, $t \geq 0$, функцию распределения продолжительности жизни частицы j -го типа, а $\hat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1})$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$, $s_{L+1} \in [0, 1]$, производящую функцию ее потомков, $j = 1, \dots, L+1$. Пусть $\hat{G}_i(t) = G_i(t)$, $t \geq 0$, для $i = 1, \dots, L$, и $\hat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1}) = g_j(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$, $s_{L+1} \in [0, 1]$, для $j = N+1, \dots, L$, где G_i и g_j определены в (1) и (2). Положим

$$\begin{aligned} \hat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1}) &= \alpha_j f_j(s_j) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(0) s_k \\ &+ (1 - \alpha_j) \sum_{i=1}^{|K_j|} T_{i,j}(\infty) s_{L(j)+i} \\ &+ (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) s_{L+1} \end{aligned}$$

при $j = 1, \dots, N$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$, $s_{L+1} \in [0, 1]$, т.е. определения функций g_j и $\hat{g}_j$ отличаются только последним слагаемым. Поскольку $(L+1)$ -й тип является финальным (другими словами, каждая частица типа $L+1$ обладает бесконечной продолжительностью жизни и не производит потомков), для определенности мы можем положить $\hat{G}_{L+1}(t) = 0$, $t \geq 0$, и $\hat{g}_{L+1}(\mathbf{s}, s_{L+1}) = s_{L+1}$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$, $s_{L+1} \in [0, 1]$. Матрица средних числа непосредственных потомков частиц различных типов нового процесса имеет элементы $\hat{m}_{k,l} = m_{k,l}$, $k, l = 1, \dots, L$, $\hat{m}_{i,L+1} = (1 - \alpha_i)(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_i, w_k}(\infty))$, $i = 1, \dots, N$, $\hat{m}_{L+1,L+1} = 1$ и $\hat{m}_{k,l} = 0$ для остальных пар k и l . Пусть $\hat{Z}_j(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, \dots, L+1$, есть число частиц типа j в момент t в новом процессе Беллмана–Харриса. Очевидно, распределения векторов $(\hat{Z}_1(t), \dots, \hat{Z}_L(t))$ и $(Z_1(t), \dots, Z_L(t))$ совпадают для каждого $t \geq 0$, если родительские частицы обоих процессов Беллмана–Харриса принадлежат одному и тому же типу. Более того, новый процесс учитывает даже

частицы из $(L + 1)$ -й группы частиц в КВП (см. раздел 2), которые не охватываются L -мерным процессом Беллмана–Харриса. Таким образом, для всех $n \in \mathbf{N}$, $i = 1, \dots, N$ и $t \geq 0$ имеем $M_n(t; w_i) = \widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; i)$, где $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; k) := \mathbf{E}_k \widehat{Z}(t)(\widehat{Z}(t) - 1) \cdots (\widehat{Z}(t) - n + 1)$, $k = 1, \dots, L + 1$, и $\widehat{Z}(t) := \sum_{j=1}^{L+1} \widehat{Z}_j(t)$. Применяя теорему 1 из [8, гл. 8, § 6], мы убеждаемся в том, что если $\mathbf{E} \xi_l^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$ и любых $l = 1, \dots, N$, то функции $M_n(t; w_i)$ конечны для каждого $t \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, N$. Эта теорема также влечет, что функции $\widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L + 1$, удовлетворяют следующей системе из $L + 1$ уравнения восстановления:

$$\widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; k) = 1 - \widehat{G}_k(t) + \sum_{r=1}^{L+1} \widehat{m}_{k,r} \int_0^t \widehat{M}_1^{\text{BH}}(t-u; r) d\widehat{G}_k(u).$$

Уравнение под номером $L + 1$ есть просто $\widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; L + 1) = 1$, $t \geq 0$. Подставляя это значение 1 и выражения для $\widehat{m}_{k,r}$, $r = 1, \dots, L + 1$, в первые L уравнений, приходим к новой системе из L уравнений восстановления:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; k) &= \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t \widehat{M}_1^{\text{BH}}(t-u; r) dG_k(u) + 1 - G_k(t) \\ &\quad + \mathbf{I}(k \in \{1, \dots, N\}) (1 - \alpha_k) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{j=1}^N w_j \overline{F}_{w_k, w_j}(\infty) \right) G_k(t) \end{aligned} \quad (36)$$

при $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L$. Нетрудно проверить, что в силу теоремы 1 из [8, гл. 8, § 6], система из $L + 1$ уравнения, получающаяся из (32) в результате замены L на $L + 1$ и $m_n^{\text{BH}}(t; k, l)$ на $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; k)$, справедлива при $n > 1$, $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L + 1$. Уравнение под номером $L + 1$ есть просто $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; L + 1) = 0$. Подставляя его в первые L уравнений и упрощая их аналогично выводу (33), приходим к системе из L уравнений восстановления относительно функций $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; k)$ при $n > 1$, $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L$ такой же, как (33), но с $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; k)$ вместо $m_n^{\text{BH}}(t; k, l)$.

Шаг 7. Теперь докажем утверждение (26) для $x, y \in W$. Итак, предположим, что $\rho(D) > 1$. Сначала рассмотрим возвратный случай. Применяя теорему 2.1, пункт (iii), из [19] к (35), мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{M_1^{\text{BH}}(t; i)}{e^{\nu t}} &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} \left(1 - \alpha_j G_j^*(\nu) - (1 - \alpha_j) G_j^*(\nu) \sum_{k=1}^N w_k \overline{F}_{w_j, w_k}^*(\nu) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} (\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f_j'(1) G_j^*(\nu) - (1 - \alpha_j) G_j^*(\nu) w_k \overline{F}_{w_j, w_k}^*(\nu)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f_j'(1) - 1) G_j^*(\nu) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j \beta_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu (\nu + \beta_j) \Delta'(\nu)} \end{aligned} \quad (37)$$

при $t \rightarrow \infty$ и $i = 1, \dots, N$. Здесь мы опираемся на лемму 2 и формулы (1)–(3), а также на разложение определителя по столбцу и очевидное равенство $\sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) = 1$, справедливое в возвратном случае. Мы также учли, что $\Delta(\nu) = 0$, поскольку 1 является собственным значением матрицы $D(\nu)$. Соотношение (37) наряду с (12) приводит к желаемому утверждению (26), когда $n = 1$ и марковская цепь η возвратна. Невозвратный случай разбирается аналогично за исключением двух отличий. Первое состоит в применении системы уравнений (36) вместо (35). Второе отличие заключается в том, что для невозвратной марковской цепи η строгое неравенство $\sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ имеет место хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, N\}$. Однако при выводе соотношения для $\widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; i)$, аналогичного (37), разница между последней суммой и 1 компенсируется за счет дополнительного слагаемого в (36). Таким образом, при $n = 1$ утверждение (26) установлено и асимптотическое поведение функций $M_1(t; w_i)$, $i = 1, \dots, N$, в надкритическом КВП не зависит от того, является марковская цепь η возвратной или нет. Поскольку при $n > 1$ системы уравнений относительно соответственно $M_n^{\text{BH}}(t; k)$ и $\widehat{M}_n^{\text{BH}}(t; k)$ имеют такой же вид, как (33), асимптотическое поведение функции $M_n(t; w_i)$ в надкритическом КВП также не зависит от возвратности или невозвратности η . Более того, при $n > 1$ вывод формулы (26) для общего числа частиц почти дословно повторяет вывод (29) для локальных численностей частиц и по этой причине опускается. Заметим, что положительность функции $A_1(w_i)$ (а следовательно, и $A_n(w_i)$ при $n > 1$) для каждого $i = 1, \dots, N$ следует из уже доказанного соотношения (25).

Шаг 8. Далее перейдем к доказательству утверждения (28) для $x, y \in W$. Итак, рассмотрим случай $\rho(D) = 1$. Применяя теорему 2.1, пункт (v), из [19] к (36), получаем

$$\begin{aligned} t^{-1} \widehat{M}_1^{\text{BH}}(t; i) &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \alpha_j) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} \left(\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f'_j(1) - (1 - \alpha_j) w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (38)$$

при $i = 1, \dots, N$. Здесь мы используем лемму 2, а также разложение определителя по столбцу и равенство $\Delta(0) = 0$, справедливое в силу предположения $\rho(D) = 1$. Соотношение (38) в сочетании с (18) влечет

требуемое утверждение в (28), когда $n = 1$ и марковская цепь η невозвратна. Если марковская цепь η возвратна, соответствующее утверждение вытекает из [19, теорема 2.1, пункт (i)] и наблюдения, заключающегося в том, что неинтегральный член в правой части (35) стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$, в то время как в (36) он сходится к положительному пределу хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, N\}$. Для $n > 1$ вывод формулы (28) для общего числа частиц снова воспроизводит вывод (27) для локальных численностей частиц и по этой причине опускается. Отметим, что в силу (38) функция $B_1(w_i)$ (а следовательно, и $B_n(w_i)$ при $n > 1$) строго положительна для каждого $i = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда $\Delta'(0) < \infty$ и $\sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ по крайней мере для одного $j \in \{1, \dots, N\}$.

Шаг 9. Наконец, установим (30) для случая $x, y \in W$. Предположим, что $\rho(D) < 1$. Применяя теорему 2.2, пункт (ii), из [28] к (36), мы видим, что

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1^{BH}(t; i) &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \alpha_j) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} \left(\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f'_j(1) - (1 - \alpha_j) w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (39)$$

для каждого $i = 1, \dots, N$. Здесь мы учитываем лемму 2, а также разложение определителя по столбцу и неравенство $\Delta(0) > 0$, верное в силу предположения $\rho(D) < 1$. Формулы (21) и (39) влекут желаемое утверждение (30), когда $n = 1$ и марковская цепь η невозвратна. Если марковская цепь η возвратна, то соответствующее соотношение следует из (35) и теоремы 2.2, пункт (ii), из [28]. Когда $n > 1$, эта теорема также приводит к (30) ввиду системы уравнений (33). Заметим, что в силу (39) функция $C_1(w_i)$ (а следовательно, и $C_n(w_i)$ при $n > 1$) строго положительна для каждого $i = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, N\}$, т.е. когда марковская цепь η невозвратна.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана для случая $x, y \in W$.

Случай 2. Теперь мы предполагаем, что либо $x \in S \setminus W$, либо $y \in S \setminus W$, либо $x, y \in S \setminus W$. Основная идея оставшейся части доказательства состоит в следующем. Если $x \in S \setminus W$ и $y \in W$, то мы пополняем множество катализаторов W элементом x . Наоборот, если

$x \in W$, а $y \in S \setminus W$, то дополним множество катализаторов W элементом y . Если $x \in S \setminus W$ и $y = x$, то добавим x к множеству катализаторов W . Если же и x , и y принадлежат $S \setminus W$ и, более того, $x \neq y$, то дополним множество катализаторов W двумя состояниями x и y . Далее мы можем использовать уже установленные результаты для КВП с $N + 1$ или $N + 2$ катализаторами. Итак, положим $w_{N+1} = x$, $W(x) := W \cup \{x\}$ и $W_i(x) := W(x) \setminus \{w_i\}$, $i = 1, \dots, N + 1$. Пусть $D(x; \lambda) = (d_{i,j}(x; \lambda))_{i,j=1}^{N+1}$ есть матрица с элементами

$$d_{i,j}(x; \lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) + (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda)_{W_j(x)} \overline{F}_{w_i, w_j}^*(\lambda), \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь $\alpha_{N+1} = 0$, $f'_{N+1}(1) = 0$ и $G_{N+1}(t) := 1 - e^{q(x,x)t}$, $t \geq 0$. Аналогично, положим $w_{N+2} = y$, $W(x, y) := W(x) \cup \{y\}$ и $W_i(x, y) := W(x, y) \setminus \{w_i\}$, $i = 1, \dots, N + 2$. Рассмотрим матрицу $D(x, y; \lambda) = (d_{i,j}(x, y; \lambda))_{i,j=1}^{N+2}$ с элементами

$$d_{i,j}(x, y; \lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) + (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda)_{W_j(x,y)} \overline{F}_{w_i, w_j}^*(\lambda)$$

при $\lambda \geq 0$. Здесь $\alpha_{N+2} = 0$, $f'_{N+2}(1) = 0$ и $G_{N+2}(t) := 1 - e^{q(y,y)t}$, $t \geq 0$. Наконец, обозначим $\nu(x)$ и $\nu(x, y)$ единственные решения соответственно уравнений $\rho(D(x; \nu(x))) = 1$ и $\rho(D(x, y; \nu(x, y))) = 1$. Следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 1 и поэтому опускается, показывает, что $\nu = \nu(x) = \nu(x, y)$.

Лемма 3. Для каждого $\lambda \geq 0$ перроновы корни $\rho(D(\lambda))$, $\rho(D(x; \lambda))$ и $\rho(D(x, y; \lambda))$ одновременно больше 1, равны 1 или меньше 1.

После применения установленной части теоремы 1 к КВП с множеством катализаторов $W(x)$ или $W(x, y)$ замечаем, что для завершения доказательства теоремы 1 требуется привести выражения вида $a_n(w_{N+1}, w_{N+2})$ к форме (11). Это может быть легко проделано с помощью следующего результата, доказательство которого проводится в том же ключе, что и доказательство леммы 2.

Лемма 4. Для $x, y \in S \setminus W$, $x \neq y$, $i, j = 1, \dots, N$ и $\lambda \geq 0$ справедливости равенства

$$\det(I - D(x; \lambda)) = \Delta(\lambda)(1 - {}_w F_{x,x}^*(\lambda)), \quad (40)$$

$$\det(I - D(x, y; \lambda)) = \Delta(\lambda)(1 - {}_w F_{x,x}^*(\lambda))(1 - {}_{w(x)} F_{y,y}^*(\lambda)), \quad (41)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(x; \lambda)) \right|_{\lambda=\nu} = \Delta'(\nu) \left(1 - {}_w F_{x,x}^*(\nu)\right), \quad (42)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(x, y; \lambda)) \right|_{\lambda=\nu} = \Delta'(\nu) \left(1 - {}_w F_{x,x}^*(\nu)\right) \left(1 - {}_{w(x)} F_{y,y}^*(\nu)\right), \quad (43)$$

$$(-1)^{i+j} \det(I - D(x; \lambda))_{j,i} = \Delta_{j,i}(\lambda) \left(1 - {}_w F_{x,x}^*(\lambda)\right), \quad (44)$$

$$\frac{(-1)^{j+N+1} \det(I - D(x; \lambda))_{j, N+1}}{1 - w F_{x, x}^*(\lambda)} = \sum_{i=1}^N w_i F_{x, w_i}^*(\lambda) \Delta_{j, i}(\lambda), \quad (45)$$

$$(-1)^{i+N+1} \det(I - D(x; \lambda))_{N+1, i} = \sum_{j=1}^N \Delta_{j, i}(\lambda) (1 - \alpha_j) G_j^*(\lambda) w \bar{F}_{w_j, x}^*(\lambda), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \det(I - D(x; \lambda))_{N+1, N+1} \\ &= \Delta(\lambda) + \sum_{i, j=1}^N w_i F_{x, w_i}^*(\lambda) \Delta_{j, i}(\lambda) (1 - \alpha_j) G_j^*(\lambda) w \bar{F}_{w_j, x}^*(\lambda), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\det(I - D(x, y; \lambda))_{N+2, N+1} (1 - w F_{y, y}^*(\lambda))}{(1 - w F_{x, x}^*(\lambda)) (1 - w(x) F_{y, y}^*(\lambda))} \\ &= \Delta(\lambda) w F_{x, y}^*(\lambda) + \sum_{i, j=1}^N w_i F_{x, w_i}^*(\lambda) \Delta_{j, i}(\lambda) (1 - \alpha_j) G_j^*(\lambda) w \bar{F}_{w_j, y}^*(\lambda), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\nu \geq 0$ является единственным решением уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$, существующим, когда $\rho(D) \geq 1$. Если $\nu = 0$, то $\frac{d}{d\lambda} \det(I - D(x; \lambda))|_{\lambda=\nu}$ означает правую производную в 0.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Применения. В разделе 3 с помощью теоремы 1 установлено, что мальтусовский параметр ν играет ключевую роль в асимптотическом поведении как общих, так и локальных численностей частиц в надкритическом КВП. Прежде чем рассмотреть некоторые частные случаи в настоящем разделе, обсудим альтернативный способ нахождения ν . С этой целью введем матрицы $\tilde{D}(\lambda) = (\tilde{d}_{i, j}(\lambda))_{i, j=1}^N$ и $\hat{D}(\lambda) = (\hat{d}_{i, j}(\lambda))_{i, j=1}^N$ с соответствующими элементами

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i, j}(\lambda) &:= \left(\alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) - 1 + (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda) \frac{\lambda - q(w_i, w_i)}{-q(w_i, w_i)} \right) F_{w_i, w_j}^*(\lambda) \\ &\quad + \delta_{i, j} (\alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) - 1) \left(1 - F_{w_i, w_i}^*(\lambda) \right), \quad \lambda \geq 0, \\ \hat{d}_{i, j}(\lambda) &:= \left(\alpha_i f'_i(1) G_i^*(\lambda) - 1 + (1 - \alpha_i) G_i^*(\lambda) \frac{\lambda - q(w_i, w_i)}{-q(w_i, w_i)} \right) G_\lambda(w_i, w_j) \\ &\quad + \delta_{i, j} \frac{1 - \alpha_i}{q(w_i, w_i)} G_i^*(\lambda), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Здесь $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; x, y) dt$, $\lambda > 0$, есть преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t; x, y)$, $x, y \in S$, $t \geq 0$, марковской цепи η . Заметим, что функция $G_0(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} G_\lambda(x, y)$ называется *функцией Грина* и является конечной тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна (см., например, теорему 4 и следствие 2 в [9, гл. 2, § 10]).

Напомним также, что согласно теореме 3 и соотношению (4) из [9, гл. 2, § 12] имеем

$$F_{w_i, w_j}^*(\lambda) = \frac{G_\lambda(w_i, w_j)}{G_\lambda(w_j, w_j)}, \quad F_{w_i, w_i}^*(\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lambda - q(w_i, w_i))G_\lambda(w_i, w_i)} \quad (49)$$

для любых $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$ и $\lambda > 0$.

Из леммы 1 и определения мальтусовского параметра в разделе 3 следует, что параметр ν может быть найден как наибольшее число λ , удовлетворяющее соотношению $\det(D(\lambda) - I) = 0$. Следующая лемма позволяет найти ν как наибольшее число λ , являющееся решением уравнения $\det \tilde{D}(\lambda) = 0$ или равносильного уравнения $\det \hat{D}(\lambda) = 0$. Заметим, что элементы матрицы $D(\lambda)$ выражаются через преобразования Лапласа времен достижения *с запретами* в множествах W_i , $i = 1, \dots, N$, в то время как элементы матрицы $\tilde{D}(\lambda)$ представлены в терминах преобразований Лапласа времен достижения *без запретов*. Наконец, элементы матрицы $\hat{D}(\lambda)$ вовлекают преобразования Лапласа только переходных вероятностей.

Лемма 5. *Для любого $\lambda > 0$ имеем $\det(D(\lambda) - I) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det \tilde{D}(\lambda) = 0$ или, эквивалентно, когда $\det \hat{D}(\lambda) = 0$. Более того, эти соотношения справедливы даже при $\lambda = 0$, если цепь η невозвратна.*

Доказательство. Введем матрицы $\tilde{R}(\lambda) = (\tilde{r}_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$ и $\hat{R}(\lambda) = (\hat{r}_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, $\lambda > 0$, с соответствующими элементами $\tilde{r}_{i,j}(\lambda) := \delta_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})F_{w_i, w_j}^*(\lambda)$ и $\hat{r}_{i,j}(\lambda) := G_\lambda(w_i, w_j)$. Согласно формуле (49) столбец $j = 1, \dots, N$ матрицы $\hat{R}(\lambda)$ получается из j -го столбца матрицы $\tilde{R}(\lambda)$ в результате умножения его на $G_\lambda(w_j, w_j)$, где $G_\lambda(w_i, w_j) > 0$ в силу неразложимости η . Следовательно, $\det \hat{R}(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det \tilde{R}(\lambda) = 0$ для любого $\lambda > 0$. Покажем, что $\det \hat{R}(\lambda) \neq 0$, если $\lambda > 0$. Аналогично доказательству теоремы 8 из [9, гл. 2, § 11] можно вывести, что

$$F_{w_i, w_j}(t) = w_j F_{w_i, w_j}(t) + \sum_{k=1, k \neq j}^N \int_0^t w_k F_{w_i, w_k}(t-u) dF_{w_k, w_j}(u) \quad (50)$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$. Заметим, что последнее соотношение имеет естественную интерпретацию. А именно, путь марковской цепи из w_i в w_j может либо избежать множество W_j , либо пройти через некоторый элемент из W_j и потом уже достичь w_j . Применяя преобразование Лапласа–Стилтьеса к (50), получаем

$$F_{w_i, w_j}^*(\lambda) = w_j F_{w_i, w_j}^*(\lambda) + \sum_{k=1, k \neq j}^N w_k F_{w_i, w_k}^*(\lambda) F_{w_k, w_j}^*(\lambda). \quad (51)$$

Умножая каждую часть равенства (51) на $G_\lambda(w_j, w_j)$ и учитывая (49), мы видим, что

$$G_\lambda(w_i, w_j) - \frac{\delta_{i,j}}{\lambda - q(w_i, w_i)} = \sum_{k=1}^N w_k F_{w_i, w_k}^*(\lambda) G_\lambda(w_k, w_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Перепишем эти тождества в следующем матричном виде:

$$\hat{R}(\lambda) - T(\lambda) = U(\lambda) \hat{R}(\lambda) \quad \text{или, эквивалентно,} \quad \hat{R}(\lambda) (I - U(\lambda)) = T(\lambda),$$

где

$$T(\lambda) := \left(\delta_{i,j} (\lambda - q(w_i, w_i))^{-1} \right)_{i,j=1}^N, \quad U(\lambda) := \left(w_j F_{w_i, w_j}^*(\lambda) \right)_{i,j=1}^N,$$

$\lambda > 0$. Отсюда заключаем, что $\det \hat{R}(\lambda) \neq 0$ для каждого $\lambda > 0$, поскольку определитель $\det T(\lambda)$ строго положителен.

Из (51) следует, что $(D(\lambda) - I) \hat{R}(\lambda) = \tilde{D}(\lambda)$. Рассматривая определители матриц в левой и правой частях последнего равенства, приходим к первому утверждению леммы 5. Ее второе утверждение вытекает из представления $\tilde{d}_{i,j}(\lambda) G_\lambda(w_j, w_j) = \hat{d}_{i,j}(\lambda)$, справедливого для всех $\lambda > 0$ и $i, j = 1, \dots, N$ в силу (49).

Все вышеприведенные рассуждения остаются верными даже при $\lambda = 0$, если марковская цепь η невозвратна. Таким образом, лемма 5 полностью доказана.

Рассмотрим некоторые применения наших результатов к моделям, изучавшимся ранее разными исследователями.

Пример 1. Сосредоточимся на каталитическом ветвящемся случайном блуждании по $\mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbf{N}$, предложенном в [32]. Эта модель является частным случаем КВП, если мы допустим в качестве η симметричное и пространственно-однородное случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков, а также положим $N = 1$, $w_1 = \mathbf{0} \in \mathbf{Z}^d$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 1$ и $f_1(\cdot) = f(\cdot)$. Тогда мы выводим то же условие критичности, которое использовалось в [4], т.е. $D = 1$ или, эквивалентно, $\alpha f'(1) + (1 - \alpha)(1 + q(\mathbf{0}, \mathbf{0})^{-1} G_0^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = 1$. Для возвратной марковской цепи η полагаем $G_0^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ равным 0. Применяя теорему 1 к каталитическому ветвящемуся случайному блужданию по $\mathbf{Z}^d$, приходим к теореме 4.1 и теореме 4.2 из [10], а также некоторым утверждениям теоремы 5 из [4] и теоремы 1 из [16].

Пример 2. Рассмотрим каталитический ветвящийся процесс с одним катализатором (расположенным, скажем, в некоторой точке $w \in S$), изучавшийся в [21]. Здесь перемещение частиц управляется неразложимой марковской цепью η . Тем самым, такая постановка задачи менее ограничительна, чем в примере 1. Как показано в [21], асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц

зависит от того, будет ли среднее число потомков, производимых частицей в месте нахождения катализатора, меньше, равно или больше $G_0^{-1}(w, w) + 1$, а также от возвратности/невозвратности η . Мы приходим к той же классификации, полагая $N = 1$, $w_1 = w$, $\alpha_1 = (1 - q(w, w))^{-1}$, $\beta_1 = 1 - q(w, w)$ и $f'_1(1) = m$ в нашем КВП. Тогда в силу (49) и очевидной формулы $F_{w,w}(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} F_{w,w}^*(\lambda)$ значение $\text{sign}(D - 1)$ совпадает с $\text{sign}(m - G_0^{-1}(w, w) - 1)$. Подчеркнем, что в отличие от [21] мы не предполагаем существование всех моментов числа потомков, т.е. конечности $f_1^{(k)}(1)$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Некоторые утверждения теоремы 1 в случае КВП с одним катализатором сильнее, чем соответствующие утверждения теоремы 1 из [21] (например, стоит сравнить соотношения (29) и (30) в нашей теореме 1 с пунктом (iii) а) в теореме 1 из [21]). Однако часть утверждений теоремы 1 из [21] не охватывается нашей теоремой 1, поскольку они вовлекают асимптотические оценки для моментов численностей частиц в терминах локальных времен уровня w марковской цепи η . При этом авторы статьи [21] не обсуждают асимптотическое поведение таких локальных времен.

Пример 3. Сосредоточимся на ветвящемся случайном блуждании по $\mathbf{Z}^d$, $d \in \mathbf{N}$, с несколькими источниками ветвления, исследованном в [34]. Эта модель является частным случаем КВП таким, что η представляет собой симметричное и пространственно-однородное случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$ с конечной дисперсией скачков, причем симметрия случайного блуждания может нарушаться только в конечном множестве точек из $\mathbf{Z}^d$. Как установлено в [34], скорость экспоненциального роста численностей частиц является наибольшим *положительным* числом λ , удовлетворяющим уравнению $\det \hat{D}(\lambda) = 0$ (что согласуется с нашей леммой 5). Однако необходимые и достаточные условия существования этого *положительного* решения λ не были найдены, как сказано в заключении статьи [34]. Стоит подчеркнуть, что такое необходимое и достаточное условие приводится в настоящей статье и в силу леммы 5 и теоремы 1 состоит в том, что $\rho(D) > 1$, т.е. в наших терминах заключается в надкритичности режима КВП.

Завершая статью, хотелось бы отметить, что наш подход сочетания техники времен достижения с запретом и аппарата вспомогательных многотипных процессов Беллмана–Харриса позволяет получить и обосновать классификацию каталитических ветвящихся процессов с произвольным конечным множеством катализаторов. Результаты данной статьи справедливы при минимальных ограничениях, налагаемых на характер перемещения и размножения частиц. Поэтому эти результаты обобщают ряд предшествующих работ на близкие темы. Развитый подход может быть использован в последующем изучении других характеристик каталитических ветвящихся процессов.

Автор признателен профессорам В. А. Ватутину и М. А. Лифшицу за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания, направленные на улучшение изложения статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинская Е. Вл. Времена достижения с запретом для случайного блуждания. — Матем. тр., 2012, т. 15, № 1, с. 3–26.
2. Булинская Е. Вл. Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков. — Тр. МИАН, 2013, т. 282, с. 69–79.
3. Ватутин В. А. Ветвящиеся процессы с финальными типами частиц и случайные деревья. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 4, с. 699–715.
4. Ватутин В. А., Топчий В. А. Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с ветвлением в нуле. — Матем. тр., 2011, т. 14, № 2, с. 28–72.
5. Ватутин В. А., Топчий В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами. — Тр. МИАН, 2013, т. 282, с. 257–287.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010, 560 с.
7. Лифшиц М. А. Циклическое поведение максимума в иерархической схеме суммирования. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2012, т. 408, с. 268–284.
8. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
9. Чжун К. Л. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964, 425 с.
10. Яровая Е. Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 705–731.
11. Alberverio S., Bogachev L. V. Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations. — Positivity, 2000, v. 4, № 1, p. 41–100.
12. Alberverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. — C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 1998, v. 326, № 8, p. 975–980.
13. Barbour A. D., Luczak M. J. Central limit approximations for Markov population processes with countably many types. — Electron. J. Probab., 2012, v. 17, № 90, p. 1–16.
14. Bertacchi D., Zucca F. Characterization of critical values of branching random walks on weighted graphs through infinite-type branching processes. — J. Statist. Phys., 2009, v. 134, № 1, p. 53–65.
15. Biggins J. D. Spreading speeds in reducible multitype branching random walk. — Ann. Appl. Probab., 2012, v. 22, № 5, p. 1778–1821.
16. Bulinskaya E. Vl. Local particles numbers in critical branching random walk. — J. Theoret. Probab., 2014, v. 27, № 3, p. 878–898.
17. Bulinskaya E. Vl. Finiteness of hitting times under taboo. — Statist. Probab. Lett., 2014, v. 85, p. 15–19.
18. Carmona Ph., Hu Y. The spread of a catalytic branching random walk. — Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist., 2014, v. 50, № 2, p. 327–351.
19. Crump K. S. On systems of renewal equations: The reducible case. — J. Math. Anal. Appl., 1970, v. 31, № 3, p. 517–528.
20. Dawson D., Fleischmann K. A super-Brownian motion with a single point catalyst. — Stochastic Process. Appl., 1994, v. 49, № 1, p. 3–40.
21. Döring L., Roberts M. Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory. — Lecture Notes in Math., 2013, v. 2078, p. 305–322.
22. Fleischmann K., Le Gall J.-F. A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. — Probab. Theory Related Fields, 1995, v. 102, № 1, p. 63–82.
23. Hautphenne S., Latouche G., Nguyen G. T. Extinction probabilities of branching processes with countably infinitely many types. — Adv. Appl. Probab., 2013, v. 45, № 4, p. 1068–1082.

24. *Hu Y., Shi Z.* Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees. — *Ann. Probab.*, 2009, v. 37, № 2, p. 742–789.
25. *Jones G.* Calculations for multi-type age-dependent binary branching processes. — *J. Math. Biol.*, 2011, v. 63, № 1, p. 33–56.
26. *Good I. J.* The multivariate saddlepoint method and chi-squared for the multinomial distribution. — *Ann. Math. Statist.*, 1961, v. 32, № 2, p. 535–548.
27. *Mode Ch. J.* A multidimensional age-dependent branching process with applications to natural selection. I. — *Math. Biosci.*, 1968, v. 3, p. 1–18.
28. *Mode Ch. J.* A multidimensional age-dependent branching process with applications to natural selection. II. — *Math. Biosci.*, 1968, v. 3, p. 231–247.
29. *Moy S.-T. C.* Extensions of a limit theorem of Everett, Ulam and Harris on multitype branching processes to a branching process with countably many types. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 38, № 4, p. 992–999.
30. *Sagitov S.* Linear-fractional branching processes with countably many types. — *Stochastic Process. Appl.*, 2013, v. 123, № 8, p. 2940–2956.
31. *Seneta E.* Non-negative Matrices and Markov Chains. New York: Springer, 2006, 287 p.
32. *Vatutin V. A., Topchii V. A., Yarovaya E. B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. — *Theory Probab. Math. Statist.*, 2004, № 69, p. 1–15.
33. *Yakovlev A. Y., Yanev N. M.* Relative frequencies in multitype branching processes. — *Ann. Appl. Probab.*, 2009, v. 19, № 1, p. 1–14.
34. *Yarovaya E. B.* Branching random walks with several sources. — *Math. Popul. Stud.*, 2013, v. 20, № 1, p. 14–26.

Поступила в редакцию
4.V.2014