Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. I. Конечномерные распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 4, 667–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:20:40

© 2014 г.

ВАТУТИН В. А.*

**СТРУКТУРА РАЗЛОЖИМЫХ РЕДУЦИРОВАННЫХ
ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ. I.
КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾**

Рассматривается ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц, занумерованными числами $1, 2, \dots, N$, в котором частицы типа i могут производить потомков лишь типов $j \geq i$. Такой разложимый процесс можно интерпретировать как модель развития популяции, индивидуумы которой могут находиться на одном из N островов, имеющих номера $1, 2, \dots, N$, причем частица популяции имеет тип i , если она находится на острове i . Новорожденные частицы острова $i \leq N - 1$ либо остаются на родном острове, либо сразу после рождения иммигрируют на один из островов $i + 1, i + 2, \dots, N$. Частицы с острова N не мигрируют.

Пусть $Z_i(m, n)$ — число частиц типа i , существующих в рассматриваемом процессе в момент $m < n$ и имеющих непустое потомство в момент n . Предполагая, что исходный процесс Гальтона–Ватсона является строго критическим, мы исследуем свойства конечномерных распределений процесса

$$\mathbf{Z}(m, n) = (Z_1(m, n), \dots, Z_N(m, n))$$

в зависимости от скорости роста параметра $m = m(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: разложимые ветвящиеся процессы, редуцированные процессы, генеалогические деревья, предельные теоремы.

1. Введение и основные результаты. Будем рассматривать ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц, помеченными числами $1, 2, \dots, N$, и пусть

$$\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_N(n)), \quad \mathbf{Z}(0) = (1, 0, \dots, 0)$$

— размер популяции в момент $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. Наряду с процессом $\mathbf{Z}(\cdot)$ мы будем исследовать процесс

$$\mathbf{Z}(m, n) = (Z_1(m, n), \dots, Z_N(m, n)),$$

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

где $Z_i(m, n)$ — число частиц типа i , существующих в процессе $\mathbf{Z}(\cdot)$ в момент $m < n$ и имеющих непустое потомство в момент n . Условимся считать, что $Z_i(n, n) = Z_i(n)$.

Процесс $\mathbf{Z}(\cdot, n)$ называется редуцированным ветвящимся процессом. Его можно рассматривать как дерево семейства, объединяющее всех индивидуумов, живущих в момент n .

Структура генеалогических деревьев процессов Гальтона–Ватсона с одним типом частиц исследовалась в работах [3], [4], [8] и [17]. Многотипные неразложимые критические марковские ветвящиеся процессы рассматривались в статье [16]. Генеалогические деревья более общих ветвящихся процессов изучались в работах [2], [5], [9]–[11], [13]–[15]. Однако редуцированные процессы для разложимых ветвящихся процессов ранее не анализировались. В настоящей статье мы восполняем этот пробел и исследуем различные свойства генеалогических деревьев для частного, но важного случая разложимых ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона. А именно, мы рассматриваем ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц, в котором частица-родитель типа i может производить потомков только типов $j \geq i$. Эту модель можно интерпретировать как вероятностную модель эволюции популяции, расположенной на N островах, причем остров, на котором находится частица, и задает ее тип. Законы размножения частиц зависят от острова, на котором частицы находятся. Новорожденные частицы острова $i \leq N - 1$ либо остаются на том же самом острове, либо мигрируют сразу после рождения на один из островов $i + 1, i + 2, \dots, N$. Частицы, родившиеся на острове N , не мигрируют.

Мы исследуем асимптотические свойства этого процесса и показываем, что при $n \rightarrow \infty$ конечномерные условные распределения редуцированного процесса

$$\{\mathbf{Z}(n^t \ln n, n), 0 \leq t < 1 \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$$

сходятся к конечномерным распределениям неоднородного ветвящегося процесса $\{\mathbf{R}(t), 0 \leq t < 1\}$ с N типами частиц, в котором при $t \in [0, 2^{-(N-1)})$ имеется лишь одна частица типа 1 и ничего более, в то время как при $t \in [2^{-(N-i+1)}, 2^{-(N-i)})$, $i = 2, \dots, N$, в процессе имеются лишь частицы типа i . Эти частицы родились в момент времени $t = 2^{-(N-i+1)}$ и погибли в момент времени $t = 2^{-(N-i)}$, породив случайное число потомков, имеющих тип $\min(i + 1, N)$. Описанный процесс отражает макроскопическую структуру генеалогического дерева исходного процесса.

С другой стороны, для каждого $i = 1, 2, \dots, N - 1$ конечномерные распределения процесса

$$\{\mathbf{Z}((y + (\ln n)^{-1})n^{2^{-(N-i)}}, n), 0 < y < \infty \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$$

сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям однородного ветвящегося марковского процесса $\{\mathbf{U}_i(y), 0 \leq y < \infty\}$ с N типами частиц и непрерывным временем. Предельный процесс начинается в момент $y = 0$ со случайного числа частиц типа i . Распределение длительности жизни указанных частиц типа i является экспоненциальным. Погибая, каждая из этих частиц производит (независимо от остальных) либо две частицы типа i , либо одну частицу типа $i+1$ (оба события имеет вероятность $1/2$). Частицы типа $i+1$ этого предельного процесса бессмертны и не дают потомства. Описанный процесс отражает микроскопическую структуру генеалогического дерева исходного процесса.

Для представления наших результатов в более формальном виде нам понадобятся новые обозначения. Пусть $\mathbf{e}_i$ — N -мерный вектор, i -я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю. Математические ожидания компонент вектора $\mathbf{Z}(n)$ будем обозначать символами

$$m_{i,j}(n) = \mathbf{E} [Z_j(n) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i],$$

где $m_{i,j} = m_{i,j}(1)$ — математическое ожидание числа непосредственных потомков типа j , произведенных одной частицей типа i .

Поскольку $m_{i,j} = 0$ при $i > j$, то матрица средних $\mathbf{M} = (m_{i,j})_{i,j=1}^N$ разложимого ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & \dots & m_{1,N} \\ 0 & m_{2,2} & \dots & \dots & m_{2,N} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{N,N} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для того чтобы идти дальше, нам будет удобно ввести вероятностные производящие функции законов распределения числа потомков частиц:

$$h_i(s_1, \dots, s_N) = \mathbf{E} [s_1^{\eta_{i,1}} \dots s_N^{\eta_{i,N}}], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где случайная величина $\eta_{i,j}$ равна числу дочерних частиц типа j у частицы типа i .

Скажем, что справедлива **гипотеза А**, если разложимый ветвящийся процесс с N типами частиц является строго критическим, т.е. (см. [7])

$$m_{i,i} = \mathbf{E} [\eta_{i,i}] = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

и, кроме того,

$$m_{i,i+1} = \mathbf{E} [\eta_{i,i+1}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} [\eta_{i,j} \eta_{i,k}] < \infty, \quad i = 1, \dots, N, \quad k, j = i, i+1, \dots, N, \quad (5)$$

причем

$$b_i = \frac{1}{2} \mathbf{D}[\eta_{i,i}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Таким образом, частица рассматриваемого процесса может производить непосредственных потомков своего типа и следующих в порядке возрастания типов (не обязательно в качестве непосредственных потомков), но не потомков предшествующих типов.

Для удобства изложения зафиксируем $N \geq 2$ и будем использовать, когда это понадобится, обозначения

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_i = \gamma_i(N) = 2^{-(N-i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Мы также будем предполагать (если не оговорено иное), что $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1$, т.е. будем считать, что рассматриваемый ветвящийся процесс начинается в момент времени $n = 0$ с одной частицы первого типа.

Пусть $\xi^{(i)}(j)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots$, — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностной производящей функцией

$$f(s) = \mathbf{E} \left[s^{\xi^{(i)}(j)} \right] = 1 - \sqrt{1 - s}.$$

При помощи этого набора мы подробно опишем конструкцию разложимого ветвящегося процесса $\mathbf{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_N(t))$, $0 \leq t < 1$, с N типами частиц, где $R_i(t)$ — число частиц типа i в процессе в момент t . Именно этот процесс описывает макроскопическую структуру генеалогического дерева $\{\mathbf{Z}(m, n), 0 \leq m \leq n\}$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\mathbf{R}(t) = \mathbf{e}_1$ при $\gamma_0 \leq t < \gamma_1$, что означает, что ветвящийся процесс $\mathbf{R}(t)$ начинается в момент $t = 0$ с одной частицы типа 1, которая живет, не производя потомства, вплоть до момента γ_1 (но не включая этот момент). Если $\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, то

$$R_k(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{R_i(\gamma_i - 0)} \xi^{(i)}(j), & \text{если } k = i + 1; \\ 0, & \text{если } k \neq i + 1. \end{cases}$$

Таким образом, в промежутке $\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}$ популяция состоит только из частиц типа $i + 1$. Эти частицы появились в момент $\gamma_i - 0$ и были порождены частицами типа i , которые в промежутке времени $\gamma_{i-1} \leq t < \gamma_i$ не производили потомков. Точнее, j -я частица типа i произвела в момент $\gamma_i - 0$ своей гибели случайное число $\xi^{(i)}(j)$ потомков типа $i + 1$ и ни одной частицы других типов.

В дальнейшем символ $\xrightarrow{\text{f.d.d.}}$ обозначает сходимость конечномерных распределений соответствующих случайных последовательностей.

Кроме того, условимся понимать $\mathbf{Z}(x, n)$ как $\mathbf{Z}([x], n)$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x .

Для $0 \leq t \leq 1$ положим

$$g_n(t) = 1_{\{0 \leq t < \gamma_1\}} + g_n 1_{\{\gamma_1 \leq t \leq 1\}},$$

где g_n — монотонно возрастающая последовательность такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\varepsilon} g_n = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Теорема 1. Пусть справедлива гипотеза А. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{(\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n), 0 \leq t < 1) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \{\mathbf{R}(t), 0 \leq t < 1\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 показывает, что переход к пределу при шкалировании времени $n^t g_n(t)$, $0 \leq t < 1$, преобразует редуцированный процесс в неоднородный ветвящийся процесс, который в любой фиксированный момент времени состоит из частиц только одного типа. В частности, фазовый переход от типа i к типу $i + 1$ в допредельном процессе происходит, нестрого говоря, в момент n^{γ_i} , что и описывает макроскопическую структуру генеалогического дерева редуцированного процесса. Микроскопическая структура генеалогического дерева, описанная в приводимой ниже теореме 2, детализирует природу обнаруженного фазового перехода.

Обозначим $c_{j,i}$, $1 \leq j \leq i \leq N$, набор положительных чисел, в котором $c_{i,i} = b_i^{-1}$ для $i = 1, 2, \dots, N$ и

$$c_{j,i} = \sqrt{b_j^{-1} m_{j,j+1} c_{j+1,i}} \quad \text{при } j \leq i - 1, \quad C_i = c_{1,i}. \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что

$$c_{i,N} = \left(\frac{1}{b_N}\right)^{1/2^{N-i}} \prod_{j=i}^{N-1} \left(\frac{m_{j,j+1}}{b_j}\right)^{1/2^{j-i+1}}. \quad (8)$$

Определим теперь набор

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i(y) &= (U_{i,1}(y), \dots, U_{i,N}(y)), & 0 \leq y < \infty, & \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathbf{U}_N(x) &= (U_{N,1}(x), \dots, U_{N,N}(x)), & 0 \leq x < 1, \end{aligned}$$

N -мерных марковских процессов с непрерывным временем. Опишем сначала структуру процессов $\mathbf{U}_i(y)$, $i \leq N-1$. В этом случае $U_{i,j}(y) \equiv 0$, $0 \leq y < \infty$, $j \neq i, i+1$, в то время как пара

$$(U_{i,i}(y), U_{i,i+1}(y)), \quad 0 \leq y < \infty,$$

образует однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и частицами типов i и $i + 1$. Этот процесс с двумя типами частиц начинается в момент времени $y = 0$ со случайного числа R_i частиц типа i , распределение которого задается вероятностной производящей функцией

$$\mathbf{E} [s_i^{R_i}] = \mathbf{E} [s_i^{U_{i,i}(0)}] = 1 - (1 - s_i)^{1/2^{i-1}} \quad (9)$$

(в частности, $U_{1,1}(0) = 1$ с вероятностью 1). Распределение длительности жизни частиц типа i является экспоненциальным с параметром $2b_i c_{i,N}$. В момент гибели частица типа i порождает (независимо от поведения других частиц и предыстории этого процесса) либо две частицы своего типа, либо одну частицу типа $i + 1$ (каждое событие происходит с вероятностью $1/2$). Частицы типа $i + 1$ процесса $\mathbf{U}_i(\cdot)$ бессмертны и не дают потомства.

Процесс $\mathbf{U}_N(x)$, $0 \leq x < 1$, имеет другую структуру. Если $j < N$, то $U_{N,j}(x) \equiv 0$, $0 \leq x < 1$, в то время как компонента $U_{N,N}(\cdot)$ является неоднородным по времени марковским ветвящимся процессом с одним типом частиц, начинающимся в момент времени $x = 0$ со случайного числа R_N частиц типа N , причем

$$\mathbf{E} [s_N^{R_N}] = \mathbf{E} [s_N^{U_{N,N}(0)}] = 1 - (1 - s_N)^{1/2^{N-1}}. \quad (10)$$

Продолжительность жизни каждой из R_N первоначальных частиц типа N имеет равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. В момент гибели каждая частица порождает ровно двух потомков типа N и ничего более. Если x — момент гибели частицы-родителя, то продолжительность жизни каждого ее потомка имеет равномерное распределение на интервале $[x, 1]$ (независимо от поведения других частиц и предыстории этого процесса). В момент гибели каждая частица процесса порождает ровно две частицы типа N и т.д.

Теперь мы готовы сформулировать еще один важный результат данной работы, описывающий микроскопическую структуру генеалогического дерева.

Обозначим l_n монотонно убывающую последовательность такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\varepsilon l_n = \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Теорема 2. Пусть справедлива гипотеза А. Тогда при $n \rightarrow \infty$

1) для каждого $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\{(\mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y < \infty) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \{\mathbf{U}_i(y), 0 \leq y < \infty\};$$

2) кроме того,

$$\{(\mathbf{Z}((x + l_n)n, n), 0 \leq x < 1) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \{\mathbf{U}_N(x), 0 \leq x < 1\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1 и 2 выявили интересную особенность в развитии критических разложимых ветвящихся процессов, которая в терминах «островной», интерпретации процессов может быть описана следующим образом: если популяция не выродилась к далекому моменту n , то все выжившие индивидуумы находятся в этот момент на острове N и, более того, в каждый момент в прошлом их предки находились не более чем на двух островах.

Структура основной части статьи выглядит следующим образом. Пункт 2 содержит некоторые предварительные утверждения. В частности, мы напоминаем результаты работ [6] и [7], касающиеся асимптотического поведения вероятности невырождения и распределения числа частиц в строго критических разложимых ветвящихся процессах. В п. 3 дано детальное описание предельных процессов. В пп. 4 и 5 мы устанавливаем сходимость одномерных и конечномерных распределений до предельных процессов к предельным.

2. Вспомогательные результаты. Для любого вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p) \in [0, 1]^p$ (размерность p которого будет обычно ясна из контекста) и вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ с целыми неотрицательными координатами положим

$$\mathbf{s}^{\mathbf{k}} = s_1^{k_1} \dots s_p^{k_p}.$$

Обозначим $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ вектор, все компоненты которого равны единице. Иногда нам будет удобно использовать запись $\mathbf{1}^{(i)}$ для i -мерного вектора, состоящего из единиц.

Введем вероятностную производящую функцию

$$H_n^{(i,N)}(\mathbf{s}) = \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(n)} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i \right] = \mathbf{E} \left[s_i^{Z_i(n)} \dots s_N^{Z_N(n)} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i \right]$$

процесса $\mathbf{Z}(\cdot)$ при условии, что этот процесс в нулевой момент времени начался с одной частицы типа i . Ясно, что (см. (2)) $H_1^{(i,N)}(\mathbf{s}) = h_i(\mathbf{s})$ для любого $i \in \{1, \dots, N\}$. Обозначим

$$Q_n^{(i,N)}(\mathbf{s}) = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{s}), \quad Q_n^{(i,N)} = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{0}),$$

положим

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{s}) = (H_n^{(1,N)}(\mathbf{s}), \dots, H_n^{(N,N)}(\mathbf{s})), \quad \mathbf{Q}_n(\mathbf{s}) = (Q_n^{(1,N)}(\mathbf{s}), \dots, Q_n^{(N,N)}(\mathbf{s}))$$

и

$$b_{j,k}(n) = \mathbf{E} [Z_j(n)Z_k(n) - \delta_{j,k}Z_j(n) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_j].$$

Исходным пунктом наших рассуждений будет следующая теорема, являющаяся упрощенной комбинацией результатов работ [6] и [7].

Теорема 3. Пусть $\mathbf{Z}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, — строго критический разложимый ветвящийся процесс, удовлетворяющий условиям (1), (3), (4) и (5). Тогда $m_{j,j}(n) = 1$ и при $n \rightarrow \infty$

$$m_{i,j}(n) \sim a_{i,j} n^{j-i}, \quad i < j, \quad (11)$$

$$b_{j,k}(n) \sim \hat{a}_{j,k} n^{k-j+1}, \quad j \leq k, \quad (12)$$

где $a_{i,j}$ и $\hat{a}_{j,k}$ — положительные константы, явный вид которых известен (см. [7, теорема 1]).

Кроме того (см. [6, теорема 1]), при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n^{(i,N)} = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \sim c_{i,N} n^{-1/2^{N-i}}, \quad (13)$$

где константы $c_{i,N}$ те же, что и в (8).

В данной работе мы докажем следующую теорему ягломовского типа, дополняющую теорему 3.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(n)}{b_N n} \right\} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i \right] = 1 - \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{1/2^{N-i}}. \quad (14)$$

Положим $d_{i,i} = \sqrt{b_i^{-1} m_{i,i+1}}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и для $j = 1, 2, \dots, i-1$ введем величины

$$d_{j,i} = \sqrt{b_j^{-1} m_{j,j+1} d_{j+1,i}}, \quad D_i = d_{1,i}. \quad (15)$$

Заметим, что для $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ (см. (7))

$$\begin{aligned} d_{i-k,i} &= (b_i m_{i,i+1})^{1/2^{k+1}} c_{i-k,i}, \\ D_i &= (b_i m_{i,i+1})^{1/2^i} c_{1,i} = (b_i m_{i,i+1})^{1/2^i} C_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1$ и обозначим

$$T_i = \min \{n \geq 1: Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_i(n) = 0\}$$

момент вырождения популяции, порожденной частицами первых i типов. Согласно (13),

$$Q_n^{(1,i)} = \mathbf{P}(T_i > n) \sim c_{1,i} n^{-2^{-(i-1)}}. \quad (17)$$

Пусть $\eta_{r,j}(k, l)$ — число дочерних частиц типа j у l -й частицы типа r , принадлежащей k -му поколению, а

$$W_{p,i,j} = \sum_{r=p}^i \sum_{k=0}^{T_i} \sum_{q=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,j}(k, q)$$

— общее число дочерних частиц типа $j \geq i + 1$, порожденных всеми частицами типов $p, p + 1, \dots, i$, когда-либо родившимися в процессе, при условии, что в момент $n = 0$ процесс начался с одной частицы типа $p \leq i$. Наконец, положим

$$W_{p,i} = \sum_{j=i+1}^N W_{p,i,j} = \sum_{j=i+1}^N \sum_{r=p}^i \sum_{k=0}^{T_i} \sum_{q=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,j}(k, q).$$

Следующая лемма описывает асимптотическое поведение хвостов распределений случайных величин $W_{1,i,i+1}$ и $W_{1,i}$.

Лемма 1. Пусть справедлива гипотеза А. Тогда при $\lambda \downarrow 0$

$$1 - \mathbf{E} [e^{-\lambda W_{1,i,i+1}} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1] \sim d_{1,i} \lambda^{1/2^i} = D_i \lambda^{1/2^i} \quad (18)$$

и существует константа $F_i > 0$ такая, что

$$1 - \mathbf{E} [e^{-\lambda W_{1,i}} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1] \sim F_i \lambda^{1/2^i}. \quad (19)$$

Доказательство. Положим

$$W_{p,i,i+1}(n) = \sum_{r=p}^i \sum_{k=0}^n \sum_{q=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,j}(k, q),$$

обозначим

$$\begin{aligned} K_{p,i,n}(\mathbf{s}; t) &= \mathbf{E} [s_p^{Z_p(n)} \dots s_i^{Z_i(n)} t^{W_{p,i,i+1}(n)} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_p], \\ K_{p,i,n}(t) &= K_{p,i,n}(\mathbf{1}^{(i-p+1)}; t) \end{aligned}$$

и пусть

$$K_{p,i}(t) = \mathbf{E} [t^{W_{p,i,i+1}} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_p] = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{p,i,n}(t)$$

(этот предел существует, поскольку случайные величины $W_{p,i,i+1}(n)$, $p = 1, 2, \dots, i$, не убывают с ростом n). Для доказательства первой части леммы достаточно показать, что при $t \uparrow 1$

$$1 - K_{1,i}(t) = 1 - \mathbf{E} [t^{W_{1,i,i+1}} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1] \sim d_{1,i} (1 - t)^{1/2^i}.$$

Используя свойства ветвящихся процессов, нетрудно проверить, что

$$K_{p,i,n+1}(\mathbf{s}; t) = h_p (K_{p,i,n}(\mathbf{s}; t), \dots, K_{i,i,n}(\mathbf{s}; t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)}),$$

что в свою очередь влечет равенства

$$\begin{aligned} K_{p,i,n+1}(t) &= h_p (K_{p,i,n}(t), \dots, K_{i,i,n}(t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)}), \\ K_{p,i}(t) &= h_p (K_{p,i}(t), \dots, K_{i,i}(t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)}). \end{aligned}$$

В частности,

$$K_{i,i}(t) = h_i \left(K_{i,i}(t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)} \right).$$

Поскольку $\mathbf{E}[\eta_{i,i}] = 1$ и $b_i = \mathbf{D}[\eta_{i,i}]/2 \in (0, \infty)$, то при $t \uparrow 1$

$$\begin{aligned} 1 - K_{i,i}(t) &= 1 - h_i \left(K_{i,i}(t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)} \right) \\ &= 1 - K_{i,i}(t) - b_i(1 - K_{i,i}(t))^2(1 + o(1)) + m_{i,i+1}(1 - t), \end{aligned}$$

или

$$1 - K_{i,i}(t) \sim \sqrt{b_i^{-1} m_{i,i+1}(1 - t)}.$$

Это, среди прочего, доказывает утверждение леммы для $i = 1$.

Теперь мы используем индукцию и предполагаем, что

$$1 - K_{q,i}(t) \sim d_{q,i}(1 - t)^{1/2^{i-q+1}}, \quad q = p+1, \dots, i.$$

Тогда при $t \uparrow 1$

$$\begin{aligned} 1 - K_{p,i}(t) &= 1 - h_p \left(K_{p,i}(t), \dots, K_{i,i}(t), t, \mathbf{1}^{(N-i-1)} \right) \\ &= 1 - K_{p,i}(t) - b_p(1 - K_{p,i}(t))^2(1 + o(1)) \\ &\quad + (1 + o(1)) \left(m_{p,p+1}(1 - K_{p+1,i}(t)) + \sum_{q=p+2}^i m_{p,q}(1 - K_{q,i}(t)) \right) \\ &\quad + (1 + o(1)) m_{p,i+1}(1 - t), \end{aligned}$$

что влечет за собой соотношения

$$\begin{aligned} 1 - K_{p,i}(t) &\sim \sqrt{b_p^{-1} m_{p,p+1}(1 - K_{p+1,i}(t))} \\ &\sim \sqrt{b_p^{-1} m_{p,p+1} d_{p+1,i}(1 - t)^{1/2^{i-p+1}}} = d_{p,i}(1 - t)^{1/2^{i-p+1}} \end{aligned}$$

и доказывает (18).

Для проверки справедливости соотношения (19) необходимо использовать аналогичные рассуждения, которые мы опускаем. Доказательство леммы 1 завершено.

Начиная с этого момента и до конца раздела мы считаем, что

$$s_k = \exp \left\{ -\lambda_k n^{-2^{-(N-k)}} \right\} = \exp \left\{ -\lambda_k n^{-\gamma_k} \right\}, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

и, имея в виду это предположение, исследуем в леммах 2–5 асимптотическое поведение разности $Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) = 1 - H_m^{(j,N)}(\mathbf{s})$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Если

$$m \ll n^{2^{-(N-j)}} = n^{\gamma_j}, \quad (21)$$

то для $j < N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_j} Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) = \lambda_j.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить справедливость леммы только для $j = 1$. Пусть r — натуральное число такое, что

$$1 - H_r^{(1,1)}(0) \leq 1 - s_1 \leq 1 - H_{r-1}^{(1,1)}(0).$$

Поскольку $1 - s_1 \sim \lambda_1 n^{-\gamma_1}$ и $1 - H_r^{(1,1)}(0) \sim (b_1 r)^{-1}$ при $n, r \rightarrow \infty$, то $r \sim (b_1 \lambda_1)^{-1} n^{\gamma_1}$. В силу свойства ветвления наших вероятностных производящих функций имеем при $m \ll n^{\gamma_1}$:

$$\begin{aligned} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) &\geq 1 - H_m^{(1,1)}(s_1) \geq 1 - H_m^{(1,1)}(H_r^{(1,1)}(0)) \\ &= 1 - H_{m+r}^{(1,1)}(0) \sim b_1^{-1}(m+r)^{-1} \sim \lambda_1 n^{-\gamma_1}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) &\leq 1 - H_m^{(1,1)}(s_1) + \mathbf{E} \left[\left(1 - s_2^{Z_2(m)} \dots s_N^{Z_N(m)} \right) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] \\ &\leq 1 - H_{m+r-1}^{(1,1)}(0) + \sum_{k=2}^N (1 - s_k) \mathbf{E} [Z_k(m) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1]. \end{aligned}$$

Согласно (11) и (20), найдется число $C > 0$ такое, что

$$\sum_{k=2}^N (1 - s_k) \mathbf{E} [Z_k(m) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1] \leq C \sum_{k=2}^N \lambda_k n^{-\gamma_k} m^{k-1}.$$

В силу (21) последнее пренебрежимо мало по сравнению с величиной

$$C \max_{2 \leq i \leq N} \lambda_i \cdot \sum_{k=2}^N n^{-\gamma_k} (n^{\gamma_1})^{k-1} = C \max_{2 \leq i \leq N} \lambda_i \cdot \sum_{k=2}^N n^{(k-1) \cdot 2^{-(N-1)} - 2^{-(N-k)}}.$$

Поскольку $k \cdot 2^{-(N-1)} - 2^{-(N-k)} = 2^{-(N-1)}(k - 2^{k-1}) \leq 0$ для $k \geq 2$, то

$$n^{2^{-(N-1)}} \sum_{k=2}^N n^{(k-1) \cdot 2^{-(N-1)} - 2^{-(N-k)}} = \sum_{k=2}^N n^{k \cdot 2^{-(N-1)} - 2^{-(N-k)}} \leq N - 1.$$

Следовательно, $Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) \sim 1 - H_m^{(1,1)}(s_1) \sim \lambda_1 n^{-\gamma_1}$ при $n \rightarrow \infty$, что доказывает лемму.

Для того чтобы сформулировать следующее утверждение, введем набор функций $\phi_i = \phi_i(\lambda_1, \lambda_2)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, являющихся при $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ решениями системы уравнений

$$\lambda_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_1} + 2\lambda_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_2} = -b_i \phi_i^2 + \phi_i + m_{i,i+1} \lambda_2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

с начальными условиями

$$\phi_i(\mathbf{0}) = 0, \quad \frac{\partial \phi_i(\mathbf{0})}{\partial \lambda_1} = 1, \quad \frac{\partial \phi_i(\mathbf{0})}{\partial \lambda_2} = m_{i,i+1}.$$

Как указано в теореме 1 работы [7], это уравнение имеет единственное решение. Более того, можно проверить, что для любого $y > 0$

$$\frac{\phi_i(\lambda_1 y, \lambda_2 y^2)}{y} = \sqrt{\frac{m_{i,i+1} \lambda_2}{b_i}} \frac{b_i \lambda_1 + \sqrt{b_i m_{i,i+1} \lambda_2} \tanh(y \sqrt{b_i m_{i,i+1} \lambda_2})}{b_i \lambda_1 \tanh(y \sqrt{b_i m_{i,i+1} \lambda_2}) + \sqrt{b_i m_{i,i+1} \lambda_2}}. \quad (22)$$

Лемма 3. Пусть выполнено условие (20). Если $m \sim yn^{\gamma_i}$, $y > 0$, при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_i} Q_m^{(i,N)}(\mathbf{s}) = y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2).$$

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, достаточно рассмотреть лишь случай $i = 1$. Из теорем 1 и 2 работы [7] вытекает, что при $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{Z_k(m)}{m^k} \right\} \right] \right) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - H_m^{(1,N)} \left(e^{-\lambda_1/m}, e^{-\lambda_2/m^2}, \dots, e^{-\lambda_N/m^N} \right) \right) \\ = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \end{aligned}$$

где функция $\Phi = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ является единственным решением дифференциального уравнения

$$\sum_{k=1}^N k \lambda_k \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} = -b_1 \Phi^2 + \Phi + \sum_{k=2}^N f_k \lambda_k$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{0}) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{0})}{\partial \lambda_1} = 1, \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{0})}{\partial \lambda_k} = \frac{f_k}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} m_{j,j+1}, \quad k = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Поскольку $m^{2^{k-1}} = m^k$ при $k = 1, 2$ и $m^{2^{k-1}} \gg m^k$ при $k > 2$, то в силу непрерывности функции Φ при $\max_{1 \leq k \leq N} \lambda_k \downarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_1} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) &= y^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} m Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) \\ &= y^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{Z_k(m)}{n^{1/2^{N-k}}} \right\} \right] \right) \\ &= y^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \sum_{k=1}^N \lambda_k y^{2^{k-1}} \frac{Z_1(m)}{m^{2^{k-1}}} \right\} \right] \right) \\ &= y^{-1} \Phi(\lambda_1 y, \lambda_2 y^2, 0, \dots, 0) = y^{-1} \phi_1(\lambda_1 y, \lambda_2 y^2). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполнено условие (20). Если

$$n^{\gamma_i} \ll m \ll n^{\gamma_{i+1}} \quad (23)$$

для некоторого $i \leq N-1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_i} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) = D_i (\lambda_{i+1})^{1/2^i}.$$

Доказательство. Из соотношений (17) и (23) следует, что

$$\mathbf{P}(T_i > m) \sim c_{1i} m^{-2^{-(i-1)}} = o(n^{-\gamma_1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[1 - s_1^{Z_1(m)} s_2^{Z_2(m)} \dots s_N^{Z_N(m)} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(1 - s_{i+1}^{Z_{i+1}(m)} \dots s_N^{Z_N(m)} \right); T_i \leq m \right] + o(n^{-\gamma_1}) \\ &= 1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(i)}, s_{i+1}, \dots, s_N) + o(n^{-\gamma_1}). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для нашего разложимого ветвящегося процесса

$$\begin{aligned} H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(i)}, s_{i+1}, \dots, s_N) &= \mathbf{E} \left[\prod_{k=0}^{m-1} \prod_{r=1}^i \prod_{l=1}^{Z_r(k)} \prod_{j=i+1}^N \left(H_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \right)^{\eta_{r,j}(k,l)} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{k=0}^{m-1} \prod_{r=1}^i \prod_{l=1}^{Z_r(k)} \prod_{j=i+1}^N \left(H_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \right)^{\eta_{r,j}(k,l)}; T_i \leq \sqrt{mn^{\gamma_i}} \right] \\ &\quad + O \left(\mathbf{P} \left(T_i > \sqrt{mn^{\gamma_i}} \right) \right). \end{aligned}$$

Замечая, что $\lim_{m \rightarrow \infty} H_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) = 1$ при $k \leq T_i \leq \sqrt{mn^{\gamma_i}} = o(m)$ и $j \geq i+1$, заключаем, что на множестве $T_i \leq \sqrt{mn^{\gamma_i}}$

$$\begin{aligned} & \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{r=1}^i \prod_{l=1}^{Z_r(k)} \prod_{j=i+1}^N \left(H_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \right)^{\eta_{r,j}(k,l)} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{r=1}^i \sum_{k=0}^{T_i} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \sum_{j=i+1}^N \eta_{r,j}(k,l) Q_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) (1 + o(1)) \right\}. \end{aligned}$$

Для $j \geq i+1$ лемма 2 и оценки $m \ll n^{\gamma_{i+1}} \leq n^{\gamma_j}$ дают

$$Q_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \sim Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) \sim \lambda_j n^{-\gamma_j}.$$

Отсюда следует, что на множестве $T_i \leq \sqrt{mn^{\gamma_i}} = o(m) = o(n^{\gamma_{i+1}})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^i \sum_{k=0}^{T_i} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \sum_{j=i+1}^N \eta_{r,j}(k,l) Q_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \\ &= (1 + o(1)) \sum_{j=i+1}^N Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) \sum_{r=1}^i \sum_{k=0}^{T_i} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,j}(k,l) \\ &= (1 + o(1)) \sum_{j=i+1}^N W_{1,i,j} Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) \\ &= (1 + o(1)) W_{1,i,i+1} Q_m^{(i+1,N)}(\mathbf{s}) + O \left(Q_m^{(i+2,N)}(\mathbf{s}) \right) \sum_{j=i+2}^N W_{1,i,j} \\ &= (1 + o(1)) W_{1,i,i+1} \lambda_{i+1} n^{-\gamma_{i+1}} + O(n^{-\gamma_{i+2}} W_{1,i}). \end{aligned}$$

Используя оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -(1 + o(1)) W_{1,i,i+1} \lambda_{i+1} n^{-\gamma_{i+1}} \right\} \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -(1 + o(1)) W_{1,i,i+1} \lambda_{i+1} n^{-\gamma_{i+1}} - O(n^{-\gamma_{i+2}} W_{1,i}) \right\} \right] \\ &\leq 1 - \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -O(n^{-\gamma_{i+2}} W_{1,i}) \right\} \right] = O \left((n^{-\gamma_{i+2}})^{1/2^i} \right) = O(n^{-\gamma_2}), \end{aligned}$$

при выводе предпоследней из которых мы опирались на соотношение (19), и обращаясь к (18), заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & 1 - H_m^{(1,N)} \left(\mathbf{1}^{(i)}, s_{i+1}, \dots, s_N \right) \\ &= (1 + o(1)) \mathbf{E} \left[1 - \exp \left\{ -(1 + o(1)) W_{1,i,i+1} \lambda_{i+1} n^{-\gamma_{i+1}} \right\} \right] \\ &\quad + O \left(\mathbf{P} \left(T_i > \sqrt{mn^{\gamma_i}} \right) \right) \\ &= (1 + o(1)) D_i \left(\lambda_{i+1} n^{-\gamma_{i+1}} \right)^{1/2^i} + o(n^{-\gamma_1}) \sim D_i \left(\lambda_{i+1} \right)^{1/2^i} n^{-\gamma_1}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнено условие (20). Если $m \sim yn^{\gamma_i}$, $y > 0$, для некоторого $i \in \{2, 3, \dots, N-1\}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_1} Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) = D_{i-1}(y^{-1}\phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2))^{1/2^{i-1}}.$$

Доказательство. Если $m \sim yn^{\gamma_i}$ и $j \geq i$, то $n^{\gamma_j} \sim (y^{-1}m)^{2^{j-i}}$ и, следовательно,

$$s_j = \exp\{-\lambda_j n^{-\gamma_j}\} = \exp\left\{-(1+o(1))\lambda_j y^{2^{j-i}} m^{-2^{j-i}}\right\}.$$

Поэтому мы можем применить лемму 3 и вывести, что при $n \rightarrow \infty$

$$n^{\gamma_i} Q_m^{(i,N)}(\mathbf{s}) \sim y^{-1} m Q_m^{(i,N)}(s_i, s_{i+1}, \dots, s_N) \sim y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2).$$

Далее, по тем же соображениям, как и в предыдущей лемме, имеем

$$Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) = 1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(i-1)}, s_i, \dots, s_N) + o(n^{-\gamma_1})$$

и, следовательно, на множестве $T_{i-1} \leq \sqrt{mn^{\gamma_{i-1}}} \ll m \sim yn^{\gamma_i}$

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{T_{i-1}} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \sum_{j=i}^N \eta_{r,j}(k, l) Q_{m-k}^{(j,N)}(\mathbf{s}) \\ &= (1+o(1)) \sum_{j=i}^N W_{1,i-1,j} Q_m^{(j,N)}(\mathbf{s}) \\ &= (1+o(1)) W_{1,i-1,i} Q_m^{(i,N)}(\mathbf{s}) + O\left(Q_m^{(i+1,N)}(\mathbf{s})\right) \sum_{j=i+1}^N W_{1,i-1,j} \\ &= (1+o(1)) W_{1,i-1,i} (y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2))^{1/2^{i-1}} n^{-\gamma_{i+1}} \\ & \quad + O_n(n^{-\gamma_{i+1}} W_{1,i-1}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & 1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(i-1)}, s_i, \dots, s_N) \\ &= \mathbf{E} [1 - \exp\{-(1+o(1)) W_{1,i-1,i} y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2) n^{-\gamma_i}\}] \\ & \quad + O\left(\mathbf{P}(T_{i-1} \geq \sqrt{mn^{\gamma_{i+1}}})\right) \\ &= (1+o(1)) D_{i-1}(y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2) n^{-\gamma_i})^{1/2^{i-1}} + o(n^{-\gamma_1}) \\ & \quad \sim D_{i-1}(y^{-1} \phi_i(\lambda_i y, \lambda_{i+1} y^2))^{1/2^{i-1}} n^{-\gamma_1}. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$C_N = C_i(m_{i,i+1} b_i c_{i+1,N})^{1/2^i} = D_i(c_{i+1,N})^{1/2^i}. \quad (24)$$

Доказательство. Используя (7), имеем

$$c_{i,N} = \sqrt{b_i^{-1} m_{i,i+1} c_{i+1,N}} = b_i^{-1} \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}} = c_{i,i} \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}},$$

что ввиду (8) и (16) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} C_N &= c_{1,N} = \left(\frac{1}{b_N} \right)^{1/2^{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m_{j,j+1}}{b_j} \right)^{1/2^j} \\ &= c_{1,i} (b_i m_{i,i+1})^{1/2^i} \left(\left(\frac{1}{b_N} \right)^{1/2^{N-i}} \prod_{j=i+1}^{N-1} \left(\frac{m_{j,j+1}}{b_j} \right)^{1/2^{j-i}} \right)^{1/2^i} \\ &= c_{1,i} (b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N})^{1/2^i} = D_i (c_{i+1,N})^{1/2^i}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 6 доказана.

3. Свойства предельных процессов. В этом пункте мы дадим более детальное описание свойств предельных процессов.

Из определения процесса $\mathbf{R}(\cdot)$ следует, что если $\mathbf{S}_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,N})$ и $t_i \in [\gamma_{i-1}, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, то

$$\mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^N \mathbf{S}_i^{\mathbf{R}(t_i)} \right] = \Omega_N(s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{N,N}), \quad (25)$$

где $\Omega_1(s) = s$ и

$$\Omega_{i+1}(s_1, s_2, \dots, s_{i+1}) = s_1 \left(1 - \sqrt{1 - \Omega_i(s_2, \dots, s_{i+1})} \right), \quad i = 1, 2, \dots. \quad (26)$$

В частности,

$$\Omega_N(\mathbf{1}^{(i-1)}, s_i, \mathbf{1}^{(N-i)}) = \Omega_i(\mathbf{1}^{(i-1)}, s_i) = 1 - (1 - s_i)^{2^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (27)$$

Если какие-либо из интервалов $[\gamma_{i-1}, \gamma_i)$ содержат более одной точки наблюдения над процессом $\mathbf{R}(\cdot)$, скажем, $\gamma_{i-1} \leq t_{i,1} < \dots < t_{i,k_i} < \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, и $\mathbf{S}_i(j) = (s_{i,1}(j), s_{i,2}(j), \dots, s_{i,N}(j)) \in [0, 1]^N$, то, очевидно,

$$\mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{k_i} (\mathbf{S}_i(j))^{\mathbf{R}(t_{i,j})} \right] = \Omega_N \left(\prod_{j=1}^{k_1} s_{1,1}(j), \prod_{j=1}^{k_2} s_{2,2}(j), \dots, \prod_{j=1}^{k_N} s_{N,N}(j) \right). \quad (28)$$

Для описания характеристик процессов $\mathbf{U}_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N-1$, определим для $(s_i, s_{i+1}) \in [0, 1]^2$ функцию

$$\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}) = \sqrt{1 - s_{i+1}} \frac{(1 - s_i) + \sqrt{1 - s_{i+1}} \tanh(b_i c_{i,N} y \sqrt{1 - s_{i+1}})}{(1 - s_i) \tanh(b_i c_{i,N} y \sqrt{1 - s_{i+1}}) + \sqrt{1 - s_{i+1}}}, \quad (29)$$

условившись считать, что

$$\varphi_i(y; 1, 1) = 0, \quad \varphi_i(y; s_i, 1) = \frac{1 - s_i}{b_i c_{i,N} y(1 - s_i) + 1}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} X_i(y; \mathbf{s}) &= X_i(y; s_i, s_{i+1}) = \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{U}_i(y)} \mid \mathbf{U}_i(0) = \mathbf{e}_i \right] \\ &= \mathbf{E} \left[s_i^{U_{i,i}(y)} s_{i+1}^{U_{i,i+1}(y)} \mid \mathbf{U}_i(0) = \mathbf{e}_i \right] \end{aligned}$$

и положим

$$\overline{X}_{R_i}(y; \mathbf{s}) = \overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}) = \mathbf{E}_{R_i} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{U}_i(y)} \right] = \mathbf{E}_{R_i} \left[s_i^{U_{i,i}(y)} s_{i+1}^{U_{i,i+1}(y)} \right],$$

где $\mathbf{E}_{R_i}[\cdot]$ означает, что процесс стартовал со случайного числа частиц R_i типа i с распределением (9).

Из описания механизма ветвления процесса $\mathbf{U}_i(\cdot)$ и общей теории ветвящихся процессов следует (см., например, [1, с. 201]), что функция $X_i(y; s_i, s_{i+1})$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} X_i(y; s_i, s_{i+1}) = 2b_i c_{i,N} \left(\frac{1}{2} X_i^2(y; s_i, s_{i+1}) - X_i(y; s_i, s_{i+1}) + \frac{1}{2} s_{i+1} \right)$$

с начальным условием $X_i(0; s_i, s_{i+1}) = s_i$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$X_i(y; s_i, s_{i+1}) = 1 - \varphi_i(y; s_i, s_{i+1}) \quad (30)$$

и, как результат,

$$\overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}) = 1 - (\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}))^{1/2^{i-1}}. \quad (31)$$

Используя (29) и (31), можно проверить, что

$$\lim_{y \downarrow 0} \overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}) = 1 - (1 - s_i)^{1/2^{i-1}} \quad (32)$$

и

$$\lim_{y \uparrow \infty} \overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}) = 1 - (1 - s_{i+1})^{1/2^i}. \quad (33)$$

Для $y_k \in [0, \infty)$, $(s_{k,i}, s_{k,i+1}) \in [0, 1]^2$, $k = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, \dots, N - 1$, положим $\mathbf{y}_{l,p} = (y_l, \dots, y_p)$ и $\mathbf{S}_{l,p}^{(i)} = (s_{l,i}, s_{l,i+1}, s_{l+1,i}, s_{l+1,i+1}, \dots, s_{p,i}, s_{p,i+1})$.

Отталкиваясь от (30), введем функцию

$$X_i^{(2)}(\mathbf{y}_{1,2}; \mathbf{S}_{1,2}^{(i)}) = X_i(y_1; s_{1,i} X_i(y_2; s_{2,i}, s_{2,i+1}), s_{1,i+1} s_{2,i+1})$$

и, по индукции

$$X_i^{(p)}(\mathbf{y}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}^{(i)}) = X_i\left(y_1; s_{1,i} X_i^{(p-1)}(\mathbf{y}_{2,p}; \mathbf{S}_{2,p}^{(i)}), \prod_{r=1}^p s_{r,i+1}\right).$$

Наконец, вспоминая (31), положим

$$\overline{X}_{R_i}(\mathbf{y}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}^{(i)}) = 1 - \left(1 - X_i^{(p)}(\mathbf{y}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}^{(i)})\right)^{1/2^{i-1}}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\overline{X}_{R_i}(\mathbf{y}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}^{(i)}) = \mathbf{E}_{R_i} \left[s_{1,i}^{U_{i,i}(y_1)} s_{1,i+1}^{U_{i,i+1}(y_1)} \dots s_{p,i}^{U_{i,i}(y_p)} s_{p,i+1}^{U_{i,i+1}(y_p)} \right]. \quad (34)$$

Для завершения описания интересующих нас предельных процессов, введем функцию

$$\psi(x; s) = \frac{1}{x + (1-x)/(1-s)}, \quad s \in [0, 1], \quad x \in [0, 1],$$

и рассмотрим N -мерный процесс $\mathbf{U}_N(\cdot) = (U_{N,1}(\cdot), \dots, U_{N,N}(\cdot))$, в котором все компоненты, кроме последней, равны нулю, в то время как процесс $U_{N,N}(\cdot)$ можно получить путем замены времени из следующего марковского ветвящегося процесса $\sigma(t)$, $0 \leq t < \infty$, с непрерывным временем. Продолжительность жизни частиц процесса $\sigma(\cdot)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром 1. В момент гибели каждая частица производит ровно двух потомков. Можно проверить (сравните, например, с примером 3 из §8 главы 1 книги Б. А. Севастьянова [12]), что

$$\mathbf{E} \left[s^{\sigma(t)} \mid \sigma(0) = 1 \right] = 1 - \psi(1 - e^{-t}; s).$$

Предполагая, что $\sigma(0) \stackrel{d}{=} R_N$ (см. (10)) и делая замену времени $x = 1 - e^{-t}$, $0 \leq t < \infty$, мы получаем неоднородный ветвящийся процесс $U_{N,N}(\cdot)$ с одним типом частиц такой, что

$$\overline{G}_{R_N}(x; s) = \mathbf{E}_{R_N} \left[s^{U_{N,N}(x)} \right] = 1 - (\psi(x; s))^{1/2^{N-1}}$$

и

$$\mathbf{E} \left[s^{U_{N,N}(x+\Delta)} \mid U_{N,N}(x) = 1 \right] = 1 - \psi\left(\frac{\Delta}{1-x}; s\right), \quad 0 < x + \Delta < 1.$$

Пусть, далее, для $x_j \in [0, 1]$ и $\mathbf{S}_{j,p} = (s_j, \dots, s_p)$, $j = 1, 2, \dots, p$,

$$G^{(1)}(x_1; s_1) = G(x_1; s_1) = 1 - \psi(x_1; s_1) = 1 - \psi(x_1; \mathbf{S}_{1,1})$$

и, по индукции,

$$G^{(p)}(\mathbf{x}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}) = G\left(x_1; s_{1N} G^{(p-1)}\left(\frac{\mathbf{x}_{2,p}}{1-x_1}; \mathbf{S}_{2,p}\right)\right).$$

Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \overline{G}_{R_N}(\mathbf{x}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p}) &= \mathbf{E}_{R_N} \left[s_1^{U_{N,N}(x_1)} s_2^{U_{N,N}(x_2)} \dots s_p^{U_{N,N}(x_p)} \right] \\ &= 1 - \left(1 - G^{(p)}(\mathbf{x}_{1,p}; \mathbf{S}_{1,p})\right)^{1/2^{N-1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

4. Сходимость одномерных распределений. В качестве первого шага в доказательстве основных результатов данной работы мы установим сходимость одномерных распределений процесса $\{\mathbf{Z}(m, n), 0 \leq m \leq n\}$ при условии $\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}$. Пусть

$$\begin{aligned} H_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m,n)} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_k \right], \\ J_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m,n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_k \right], \\ \mathbf{H}_{m,n}(\mathbf{s}) &= \left(H_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}), \dots, H_{m,n}^{(N,N)}(\mathbf{s}) \right), \\ \mathbf{J}_{m,n}(\mathbf{s}) &= \left(J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}), \dots, J_{m,n}^{(N,N)}(\mathbf{s}) \right). \end{aligned}$$

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ положим $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_N y_N)$ и обозначим

$$\begin{aligned} s'_k &= s_k Q_{n-m}^{(k,N)} + (1 - Q_{n-m}^{(k,N)}) = 1 - (1 - s_k) Q_{n-m}^{(k,N)}, \\ \mathbf{s}' &= (s'_1, \dots, s'_N) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-m}. \end{aligned} \quad (36)$$

Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} H_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) &= H_m^{(k,N)}(\mathbf{s}') = H_m^{(k,N)}(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-m}), \\ J_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m,n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_k \right] = 1 - \frac{Q_m^{(k,N)}(\mathbf{s}')}{Q_n^{(k,N)}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Лемма 7. Пусть справедлива гипотеза А.

1) Если $m \ll n^{\gamma_1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m,n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] = s_1. \quad (38)$$

2) Если $n^{\gamma_i} \ll m \ll n^{\gamma_{i+1}}$ для некоторого $i \leq N-1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}) = 1 - (1 - s_{i+1})^{1/2^i}. \quad (39)$$

3) Если $m = (y + l_n) n^{\gamma_i}$, $y \in [0, \infty)$, для некоторого $i \leq N-1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}) = \overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}). \quad (40)$$

4) Если $m = (x + l_n)n$, $x \in [0, 1)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}) = \overline{G}_{R_N}(x; s_N). \quad (41)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $m \ll n$, то

$$\begin{aligned} 1 - s'_i &= (1 - s_i)Q_{n-m}^{(i,N)} \sim (1 - s_i)Q_n^{(i,N)} \\ &\sim 1 - \exp\left\{-(1 - s_i)Q_n^{(i,N)}\right\} \sim 1 - \exp\left\{-(1 - s_i)c_{i,N}n^{-\gamma_i}\right\}. \end{aligned}$$

Это представление позволяет нам использовать предыдущие результаты, в которых s_i и λ_i заменяются на s'_i и $(1 - s_i)c_{i,N}$ соответственно.

Вспоминая (13) и применяя лемму 2, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}')}{Q_n^{(1,N)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2^{-(N-1)}} \frac{1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}')}{C_N} = 1 - s_1.$$

Отсюда вытекает (38).

Используя лемму 4 при $n^{\gamma_i} \ll m \ll n^{\gamma_{i+1}}$ и обращаясь к лемме 6, заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}')}{Q_n^{(1,N)}} = \frac{D_i}{C_N} ((1 - s_{i+1})c_{i+1,N})^{1/2^i} = (1 - s_{i+1})^{1/2^i},$$

что влечет за собой (39).

Доказательство соотношения (40). Если $y = 0$, то нужное утверждение вытекает из (38) и (39). Если $i \leq N-1$ зафиксировано и $m \sim yn^{\gamma_i}$, $y > 0$, то для $j \geq i$

$$\begin{aligned} 1 - s'_j &\sim 1 - \exp\left\{-(1 - s_j)c_{j,N}n^{-\gamma_j}\right\} \\ &\sim 1 - \exp\left\{-(1 - s_j)c_{j,N}y^{2^{j-i}}m^{-2^{j-i}}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (13) и лемм 3 и 5, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_m^{(1,N)}(\mathbf{s}')}{Q_n^{(1,N)}} = \frac{D_{i-1}}{C_N} \left(\frac{\phi_i(c_{i,N}(1 - s_i)y, c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})y^2)}{y} \right)^{1/2^{i-1}},$$

где мы считаем, что $D_0 = 1$. В силу (22) и (7)

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i(c_{i,N}(1 - s_i)y, c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})y^2)}{y} &= \sqrt{\frac{m_{i,i+1}c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})}{b_i}} \\ &\times \frac{b_i c_{i,N}(1 - s_i) + \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})} \tanh\left(y \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})}\right)}{b_i c_{i,N}(1 - s_i) \tanh\left(y \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})}\right) + \sqrt{b_i m_{i,i+1} c_{i+1,N}(1 - s_{i+1})}} \\ &= c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}} \frac{b_i c_{i,N}(1 - s_i) + b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}} \tanh(y b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}})}{b_i c_{i,N}(1 - s_i) \tanh(y b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}}) + b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}}} \\ &= c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}} \frac{1 - s_i + \sqrt{1 - s_{i+1}} \tanh(y b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}})}{(1 - s_i) \tanh(y b_i c_{i,N} \sqrt{1 - s_{i+1}}) + \sqrt{1 - s_{i+1}}}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства соотношения (40) осталось вспомнить (24).

Доказательство соотношения (41). Если $x = 0$, то (41) следует из (39). Рассмотрим теперь случай $m \sim xn$, $0 < x < 1$. Заметим, что для $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N) \in [0, 1]^N$

$$\begin{aligned} H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(N-1)}, s_N) - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[\left(1 - s_1^{Z_1(m)} \dots s_{N-1}^{Z_{N-1}(m)} \right) s_N^{Z_N(m)} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[1 - s_1^{Z_1(m)} \dots s_{N-1}^{Z_{N-1}(m)} \right] \leq \mathbf{P}(T_{N-1} > m) \leq cm^{-2^{-(N-2)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом,

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}) = 1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(N-1)}, s_N) + \varepsilon_{m,n}(\mathbf{s})Q_m^{(1,N)},$$

где $\varepsilon_{m,n}(\mathbf{s}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \sim xn$ равномерно по $\mathbf{s} \in [0, 1]^N$. Следовательно,

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}') = 1 - H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, 1 - (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)}) + \varepsilon'_{m,n}(\mathbf{s}')Q_n^{(1,N)},$$

где $\varepsilon'_{m,n}(\mathbf{s}') \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \sim xn$ равномерно по значениям $\hat{\mathbf{s}} = (s'_1, \dots, s'_{N-1}) \in [0, 1]^{N-1}$.

Выберем теперь целое число $r = r(m, n) \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ таким, чтобы выполнялись неравенства

$$H_{r-1}^{(N,N)}(0) \leq 1 - (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)} \leq H_r^{(N,N)}(0),$$

или

$$Q_r^{(N,N)} = 1 - H_r^{(N,N)}(0) \leq (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)} \leq Q_{r-1}^{(N,N)} = 1 - H_{r-1}^{(N,N)}(0).$$

Это можно сделать, поскольку в силу (13)

$$Q_{n-m}^{(N,N)} \sim \frac{1}{(n-m)b_N} \rightarrow 0, \quad n-m \rightarrow \infty. \quad (43)$$

В частности,

$$r \sim \frac{n-m}{1-s_N}. \quad (44)$$

При указанном выборе, для любого $\hat{\mathbf{s}} \in [0, 1]^{N-1}$ имеем

$$\begin{aligned} H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, H_{r-1}^{(N,N)}(0)) &\leq H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, 1 - (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)}) \\ &\leq H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, H_r^{(N,N)}(0)). \end{aligned}$$

Полагая $\hat{\mathbf{s}} = (H_r^{(1,N)}(\mathbf{0}), \dots, H_r^{(N-1,N)}(\mathbf{0}))$ и используя свойство ветвления производящих функций, приходим к оценке

$$H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, 1 - (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)}) \leq H_m^{(1,N)}(\mathbf{H}_r(\mathbf{0})) = H_{m+r}^{(1,N)}(\mathbf{0}),$$

которая влечет за собой соотношения

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}') \geq 1 - H_{m+r}^{(1,N)}(\mathbf{0}) + \varepsilon'_{m,n} Q_n^{(1,N)} = Q_{m+r}^{(1,N)} + \varepsilon'_{m,n} Q_n^{(1,N)},$$

где $\varepsilon'_{m,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \sim xn$, в то время как выбор $\hat{\mathbf{s}} = (H_{r-1}^{(1,N)}(\mathbf{0}), \dots, H_{r-1}^{(N-1,N)}(\mathbf{0}))$ дает неравенство

$$H_m^{(1,N)}(\hat{\mathbf{s}}, 1 - (1 - s_N)Q_{n-m}^{(N,N)}) \geq H_m^{(1,N)}(\mathbf{H}_r(\mathbf{0})) = H_{m+r-1}^{(1,N)}(\mathbf{0}),$$

ведущее в рассматриваемом диапазоне к оценке

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}') \leq Q_{m+r-1}^{(1,N)} + \varepsilon'_{m,n} Q_n^{(1,N)}.$$

Таким образом,

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}') = Q_{m+r}^{(1,N)} + \varepsilon''_{m,n} Q_n^{(1,N)},$$

где $\varepsilon''_{m,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \sim xn$. Отсюда и из (13) заключаем, что

$$1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}') \sim Q_{m+r}^{(1,N)} \sim C_N(m+r)^{-2^{-(N-1)}}.$$

Принимая во внимание (44) и соотношение $m \sim xn$, $0 < x < 1$, получаем, что (см. (7))

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - H_m^{(1,N)}(\mathbf{s}')}{Q_n^{(1,N)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{nx + n(1-x)/(1-s_N)} \right)^{2^{-(N-1)}} \\ &= \left(\frac{1}{x + (1-x)/(1-s_N)} \right)^{2^{-(N-1)}}, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство соотношения (41). Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 4. Поскольку наш процесс неразложим и является строго критическим, достаточно проверить справедливость (14) только при $i = 1$. Для $\hat{s}_N = \exp\{-\lambda/(nb_N)\}$ имеем

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(n)}{b_N n} \right\} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right] = 1 - \frac{1 - H_n^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(N-1)}, \hat{s}_N)}{Q_n^{(1,N)}}.$$

Выберем теперь целое число $r = r(\lambda, n) \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ так, чтобы

$$H_{r-1}^{(N,N)}(0) \leq \hat{s}_N \leq H_r^{(N,N)}(0).$$

Из (43) следует, что $r \sim n\lambda^{-1}$. Полагая $s_i = H_r^{(i,N)}(\mathbf{0})$, $i = 1, 2, \dots, N$, и $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$, а также привлекая (42), после очевидных оценок получаем

$$\left| H_n^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(N-1)}, \hat{s}_N) - H_n^{(1,N)}(\mathbf{s}) \right| \leq cn^{-1/2^{N-2}}.$$

Отсюда, используя (13) при $i = 1$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1 - H_n^{(1,N)}(\mathbf{1}^{(N-1)}, \widehat{s}_N)}{Q_n^{(1,N)}} &\sim \frac{1 - H_n^{(1,N)}(\mathbf{s})}{Q_n^{(1,N)}} = \frac{Q_{r+n}^{(1,N)}}{Q_n^{(1,N)}} \\ &\sim \left(\frac{n}{r+n}\right)^{1/2^{N-1}} \sim \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{1/2^{N-1}}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема 4 доказана.

5. Доказательство теорем 1 и 2. В этом пункте мы, опираясь на полученные ранее результаты, изучим предельное поведение конечно-мерных распределений редуцированного процесса $\{\mathbf{Z}(m, n), 0 \leq m \leq n\}$.

Для $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_p \leq n$ положим $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_p)$ и обозначим $\Delta_i = m_i - m_{i-1}$. Пусть, далее, $\mathbf{S}_l = (s_{l,1}, \dots, s_{l,N})$, $l = 1, 2, \dots, p$, а

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{m_0, m_1, \dots, m_p, n}^{(i, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) &= \widehat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(i, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{S}_l^{\mathbf{Z}(m_l, n)} \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{e}_i \right] \end{aligned}$$

и

$$\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) = \left(\widehat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p), \dots, \widehat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(N, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) \right).$$

Следующее утверждение является простым наблюдением, вытекающим из следствия 2 работы [14].

Лемма 8. Для любого набора $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_p \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) &= \widehat{J}_{m_0, m_1, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \widehat{\mathbf{J}}_{m_1, m_2, \dots, m_p, n}(\mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_p)) \\ &= J_{\Delta_1, n-m_0}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{\Delta_2, n-m_1}(\mathbf{S}_2 \otimes \dots (\mathbf{S}_{p-1} \otimes \mathbf{J}_{\Delta_p, n-m_{p-1}}(\mathbf{S}_p)) \dots)). \end{aligned}$$

В частности, если $\mathbf{m} = (0, m_1, m_2)$, то

$$\widehat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = J_{m_1, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{\Delta_2, n-m_1}(\mathbf{S}_2)),$$

а если $\mathbf{m} = (m_0, m_1)$, то для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$

$$\widehat{J}_{m_0, m_1, n}^{(k, N)}(\mathbf{s}) = J_{\Delta_1, n-m_0}^{(k, N)}(\mathbf{s}) = 1 - \frac{1 - H_{\Delta_1}^{(k, N)}(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-m_1})}{Q_{n-m_0}^{(k, N)}}. \quad (45)$$

Используя (37) и лемму 7, мы видим, что

1) если $m \ll n^{\gamma_k}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m, n}^{(k, N)}(\mathbf{s}) = s_k; \quad (46)$$

2) если $m = (y + l_n)n^{\gamma_k} = (y + l_n)n^{1/2^{N-k}}$, $y \in [0, \infty)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) = X_k(y; s_k, s_{k+1});$$

3) если $m = (x + l_n)n$, $x \in [0, 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n}^{(N,N)}(\mathbf{s}) = G(x; s_N). \quad (47)$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала ситуацию, когда набор $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < 1$ таков, что $\gamma_{i-1} \leq t_i < \gamma_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда для $m_i \sim n^{t_i} g_n(t_i)$ имеем

$$n^{\gamma_{i-1}} \ll m_i \ll n^{\gamma_i}, \quad \Delta_i = m_i - m_{i-1} \sim m_i, \quad n - m_i \sim n.$$

Эти соотношения, (39), (46) и непрерывность соответствующих вероятностных производящих функций влекут (см. (25) и (26))

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{J}_{\mathbf{m},n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N) &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{m_1,n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{m_2,n}(\mathbf{S}_2 \otimes \dots (\mathbf{S}_{N-1} \otimes \mathbf{J}_{m_N,n}(\mathbf{S}_N)) \dots)) \\ &= s_{1,1} \left(1 - \sqrt{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} J_{m_2,n}^{(2,N)}(\mathbf{S}_2 \otimes \dots (\mathbf{S}_{N-1} \otimes \mathbf{J}_{m_N,n}(\mathbf{S}_N)) \dots)} \right) \\ &= s_{1,1} \left(1 - \sqrt{1 - s_{2,2} \left(1 - \sqrt{1 - \Omega_{N-2}(s_{3,3}, \dots, s_{N,N})} \right)} \right) \\ &= \dots = \Omega_N(s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{N,N}). \end{aligned}$$

Исследуем другой экстремальный случай, а именно ситуацию, когда набор $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < 1$ таков, что $\gamma_{i-1} \leq t_1 < t_p < \gamma_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. В силу (27) и (28) нам надо показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{Z}_l^{\mathbf{Z}(m_l,n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right] = 1 - \left(1 - \prod_{l=1}^p s_{l,i} \right)^{1/2^{i-1}}. \quad (48)$$

Пусть $p = 2$ и $\mathbf{m} = (0, m_1, m_2)$. Согласно лемме 8,

$$\widehat{J}_{\mathbf{m},n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = J_{m_1,n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{\Delta_2,n-m_1}(\mathbf{S}_2)). \quad (49)$$

Из (39) вытекает, что для $n^{\gamma_{i-1}} \ll m_1 \ll n^{\gamma_i}$

$$J_{m_1,n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1) \rightarrow 1 - (1 - s_{1,i})^{1/2^{i-1}}$$

при $n \rightarrow \infty$. Далее, в силу оценки $\Delta_2 = m_2 - m_1 \ll n^{\gamma_i}$ и равенства (46), $J_{\Delta_2,n-m_1}^{(i,N)}(\mathbf{S}_2) \rightarrow s_{2,i}$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, используя непрерывность рассматриваемых функций и тождество (49), выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{J}_{\mathbf{m},n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = 1 - (1 - s_{1,i} s_{2,i})^{1/2^{i-1}},$$

что доказывает (48) при $p = 2$.

В справедливости (48) для любого $p \geq 3$ можно убедиться по индукции, используя лемму 8.

Случай, когда имеется несколько полуинтервалов вида $[\gamma_{i-1}, \gamma_i)$, содержащих более одного элемента, входящего в множество $t_1, \dots, t_p$, может быть проанализирован путем комбинации предыдущих рассуждений. Доказательство теоремы 1 завершено.

Доказательство теоремы 2. В силу свойств предельных процессов, установленных в п. 3, для доказательства теоремы 2 нужно убедиться в справедливости следующих утверждений (см. (34), (35)).

1) Если $0 = Y_1 < Y_2 < \dots < Y_p < \infty$ — набор неотрицательных чисел, $y_1 = 0$, $y_l = Y_l - Y_{l-1}$, $l = 2, \dots, p$, и для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$

$$m_1 \sim l_n n^{\gamma_i}, \quad m_l \sim Y_l n^{\gamma_i}, \quad l = 2, \dots, p,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{s}_l^{\mathbf{Z}(m_l, n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right] = \bar{X}_{R_i}(\mathbf{y}_{1,p}; \mathbf{s}_{1,p}^{(i)}). \quad (50)$$

2) Если $0 = X_1 < X_2 < \dots < X_p < 1$ — набор неотрицательных чисел, $x_1 = 0$, $x_l = X_l - X_{l-1}$, $l = 2, \dots, p$, и $m_1 \sim l_n n$, $m_l \sim X_l n$, $l = 2, \dots, p$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{s}_l^{\mathbf{Z}(m_l, n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right] = \bar{G}_{R_N}(\mathbf{x}_{1,p}; \mathbf{s}_{1,p;N}), \quad (51)$$

где $\mathbf{s}_{1,p;N} = (s_{1,N}, s_{2,N}, \dots, s_{p,N})$.

Проверяя справедливость соотношения (50), мы рассмотрим лишь случай $p = 2$. Из (40) следует, что если $m_l \sim Y_l n^{\gamma_i}$, $l = 1, 2$, а $Y_1 = y_1$, то

$$J_{m_1, n}^{(1, N)}(\mathbf{s}) \rightarrow \bar{X}_{R_i}(y_1; s_i, s_{i+1})$$

при $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\Delta_2, n-m_1}^{(i, N)}(\mathbf{S}_2) = X_i(y_2; s_{2,i}, s_{2,i+1}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\Delta_2, n-m_1}^{(i+1, N)}(\mathbf{S}_2) = s_{2,i+1}.$$

Отсюда, используя непрерывность рассматриваемых функций и тождество (49), заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \bar{X}_{R_i}(y_1; s_{1,i} X_i(y_2; s_{2,i}, s_{2,i+1}), s_{1,i+1} s_{2,i+1}).$$

Это доказывает (50) для $p = 2$.

Для проверки справедливости (50) при $p \geq 3$ необходимо использовать лемму 8 и индукцию. Мы опускаем соответствующие рассуждения.

Докажем теперь (51) и, как и раньше, рассмотрим лишь случай $p = 2$ и положим $\mathbf{m} = (0, (x_1 + l_n)n, (x_1 + x_2 + l_n)n)$. В силу (49), (41) и (47)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{J}_{\mathbf{m},n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{(x_1+l_n)n,n}^{(1,N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{x_2n,n(1-x_1-l_n)}(\mathbf{S}_2)) \\ &= \overline{G}_{R_N} \left(x_1; s_{1,N} G \left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1}; s_{2,N} \right) \right) = \overline{G}_{R_N}(\mathbf{x}_{1,2}; \mathbf{S}_{1,2;N}). \end{aligned}$$

Желаемое утверждение для $p > 2$ можно проверить по индукции. Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору А. М. Зубкову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
2. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* Reduced critical branching processes in random environment. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 71, № 2, p. 225–240.
3. *Fleischmann K., Prehn U.* Ein Grenzwertsatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen. — *Math. Nachr.*, 1974, v. 64, p. 357–362.
4. *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton–Watson processes. — *Math. Nachr.*, 1977, v. 79, p. 233–241.
5. *Fleischmann K., Vatutin V. A.* Reduced subcritical Galton–Watson processes in a random environment. — *Adv. Appl. Probab.*, 1999, v. 31, № 1, p. 88–111.
6. *Foster J., Ney P.* Decomposable critical multi-type branching processes. — *Sankhyā A*, 1976, v. 38, № 1, p. 28–37.
7. *Foster J., Ney P.* Limit laws for decomposable critical branching processes. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1978, v. 46, № 1, p. 13–43.
8. *Lagerås A. N., Sagitov S.* Reduced branching processes with very heavy tails. — *J. Appl. Probab.*, 2008, v. 45, № 1, p. 190–200.
9. *Сажитов С. М.* Редуцированный критический ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1985, т. 30, в. 4, с. 737–749.
10. *Сажитов С. М.* Многомерные предельные теоремы для ветвящегося процесса с одним типом частиц. — *Матем. заметки*, 1987, т. 42, в. 1, с. 157–165.
11. *Сажитов С. М.* Три предельные теоремы для редуцированных критических ветвящихся процессов. — *Успехи матем. наук*, 1995, т. 50, в. 5, с. 183–202.
12. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
13. *Ватутин В. А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 1, с. 21–38.
14. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 2, с. 271–300.
15. *Ватутин В. А.* О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса. — *Матем. заметки*, 1979, т. 25, в. 5, с. 733–741.
16. *Якымив А. Л.* Редуцированные ветвящиеся процессы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, т. 25, в. 3, с. 593–596.
17. *Зубков А. М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1975, т. 20, в. 3, с. 614–623.

Поступила в редакцию
12.III.2014