Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Вероятностные неравенства для процессов Гальтона–Ватсона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 4, 693–726

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:29:53

© 2014 г.

НАГАЕВ С. В.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА¹⁾

Выводятся вероятностные неравенства для всего спектра возможных значений коэффициента размножения A в ветвящемся процессе. Ранее рассматривался только случай $A = 1$. Отдельно изучаются случаи, когда выполняется условие Крамера и когда существует лишь конечное число моментов. Одно из полученных неравенств затем используется для вывода моментного неравенства типа Розенталя в случае $A \geq 1$.

Ключевые слова и фразы: производящая функция, процесс Гальтона–Ватсона, рекуррентная последовательность, субстохастический ветвящийся процесс.

1. Введение. Пусть Z_n , $n \geq 0$, — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. В дальнейшем мы всюду предполагаем, если не оговорено противное, что $Z_0 = 1$, т.е. процесс Z_n начинается с одной частицы. Положим

$$p_k = \mathbf{P}(Z_1 = k), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad A = \mathbf{E} Z_1, \quad B = \mathbf{E} Z_1(Z_1 - 1),$$

$$B_t = \sum_{k=2}^{\infty} k^{t-1}(k-1)p_k, \quad t > 1.$$

Пусть $f_n(z)$ есть n -я итерация функции $f(z)$. Обозначим через R радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

Первая верхняя оценка для вероятностей больших отклонений процесса Z_n была получена в [1]. При этом предполагалось, что $A = 1$, а $R > 1$. Следующий шаг был сделан лишь 30 лет спустя в работе [2], в которой в случае $A = 1$ были выведены верхние оценки для $\mathbf{P}(M_n > x)$, где $M_n = \max_{k \leq n} Z_k$, как в случае $R > 1$, так и для $R = 1$. Последние уже нашли применение в работах по критическим процессам Гальтона–Ватсона (см. [3], [4]). Дело в том, что эти неравенства очень удобны при

*Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00238-а).

доказательстве предельных теорем. Их значение можно сравнить с ролью неравенств Нагаева–Фука [5] в теории суммирования независимых случайных величин.

В настоящей работе неравенства, полученные в [2], обобщаются на докритические и надкритические процессы Гальтона–Ватсона.

Теорема 1.1. Пусть $A \geq 1$, $B > 0$, $R > 1$. Тогда для любого $0 < y_0 < R - 1$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{B_0(A^n - 1)}{2(A - 1)} \right)^{-1} \right)^{-k}, \quad (1.1)$$

где $B_0 = f''(1 + y_0)$.

Полагая в (1.1) $A = 1$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1.1. Если $A = 1$, $B > 0$, $R > 1$, то для любого $0 < y_0 < R - 1$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \left(\frac{1}{y_0} + n \frac{B_0}{2} \right)^{-1} \right)^{-k}. \quad (1.2)$$

Неравенство (1.2) уточняет результат, полученный в [1]:

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + y_0) \left(1 + \left(\frac{1}{y_0} + n \frac{B_0}{2} \right)^{-1} \right)^{-k}.$$

При $y_0 = \mathbf{P}(Z_n > 0)$ и $k = o(n^2)$

$$(y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \left(\frac{1}{y_0} + n \frac{B_0}{2} \right)^{-1} \right)^{-k} \sim \frac{4}{Bn} e^{-k/(Bn)},$$

так как $\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim 2/(Bn)$ ($a_n \sim b_n$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$). Это вполне согласуется с асимптотическими результатами, полученными в [6], [7].

Полагая в (1.1) $y_0 = 2(A - 1)/(B(1 - A^{-n}))$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1.2. Пусть $A \geq 1$, $B > 0$, $R > 1$. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \left(\frac{2(A - 1)}{B(1 - A^{-n})} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) \left(1 + \frac{A - 1}{B_0(A^n - 1)} \right)^{-k}, \quad (1.3)$$

если

$$\frac{2(A - 1)}{B(1 - A^{-n})} < R - 1.$$

З а м е ч а н и е 1.1. Пусть $A > 1$ фиксировано. Тогда, полагая $k = [A^n x]$, находим, что при $n \rightarrow \infty$ предел правой части (1.3) равен

$$\left(\frac{2}{B}(A-1) + \lambda\right) \exp\left\{\frac{1-A}{B^*}x\right\}, \quad (1.4)$$

где λ — меньший корень уравнения $f(x) = x$, а $B^* = f''(2(A-1)/B+1)$. Это вполне согласуется с предельной теоремой для Z_n/A^n . Нетрудно видеть, что предел (1.4) дает верхнюю оценку для вероятности $\mathbf{P}(W > x)$, где $W = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n/A^n$ (см. [8, теорема 8.1]).

Перейдем к случаю $A < 1$, $R > 1$. Определим x_0 как отличный от 1 корень уравнения $f(x) = x$, если последний существует. В противном случае положим $x_0 = \infty$. Обозначим $A_0 = f'(x_0)$, если $x_0 \neq \infty$.

Теорема 1.2. Пусть $A < 1$, $B > 0$, $R > 1$, $x_0 \neq \infty$. Тогда

а) для любого $y_0 > 0$ такого, что $x_0 + y_0 < R$,

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (x_0 + y_0 - \mathbf{P}(Z_n = 0)) \left(x_0 + \left(\frac{A_0^n}{y_0} + \frac{B_0(A_0^n - 1)}{2(A_0 - 1)}\right)^{-1}\right)^{-k}; \quad (1.5)$$

б) если y_0 удовлетворяет условию

$$0 < y_0 < \frac{2}{B_0}(1 - A), \quad (1.6)$$

то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{1}{(1 + y_0)^k} \left(\left(A + \frac{B_0}{2} y_0\right)^n + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right), \quad (1.7)$$

где $B_0 = f''(1 + y_0)$;

с) если выполнено условие (1.6) и, кроме того, $A/y_0 > B_0(1 - A^n) \times (2(1 - A))^{-1}$, то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{1}{(1 + y_0)^k} \left(A^{n+1} \left(\frac{A}{y_0} - \frac{B_0(1 - A^n)}{2(1 - A)} \right)^{-1} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right). \quad (1.8)$$

Устремляя y_0 в (1.5) к нулю, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.3. В условиях теоремы 1.2

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq \frac{x_0 - \mathbf{P}(Z_n = 0)}{x_0^k}. \quad (1.9)$$

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть $f''(x)$ строго возрастает. Тогда, как нетрудно видеть, для любого $1 < x < R$

$$1 + A(x-1) + \frac{B}{2}(x-1)^2 < f(x) < 1 + A(x-1) + \frac{B(x)}{2}(x-1)^2, \quad (1.10)$$

где $B(x) = f''(x)$. Отсюда

$$(A-1)(x-1) + \frac{B(x)}{2}(x-1)^2 > f(x) - x > (A-1)(x-1) + \frac{B}{2}(x-1)^2.$$

Следовательно, $f(x) - x > 0$ при $0 < x-1 \geq (2/B)(1-A)$ и $f(x) - x < 0$ при $0 < x-1 \leq (2/B(x))(1-A)$. Если для $x > 1$ выполняется неравенство $f(x) - x > 0$, то $x > x_0$. Таким образом,

$$x_0 < 1 + \frac{2}{B}(1-A). \quad (1.11)$$

Условие $x-1 < (2/B(x))(1-A)$ выполняется только при $x < x^*$, где x^* — корень уравнения

$$A + \frac{B(x)}{2}(x-1) = 1. \quad (1.12)$$

Очевидно, что x^* является отличным от 1 корнем уравнения

$$1 + A(x-1) + \frac{B(x)}{2}(x-1)^2 = x. \quad (1.13)$$

Сравним x^* и x_0 . Нетрудно видеть, что x_0 удовлетворяет уравнению

$$x = 1 + A(x-1) + \int_1^x B(u)(x-u) du. \quad (1.14)$$

Поскольку для любого $x > 1$

$$\int_1^x B(u)(x-u) du < \frac{B(x)}{2}(x-1)^2,$$

то $x^* < x_0$. Комбинируя последнюю оценку с (1.11), мы видим, что $x^* < x_0 < 1 + (2/B)(1-A)$. Условие (1.6) равносильно условию $1 + y_0 < x^*$. Таким образом, в неравенствах (1.5) и (1.8) используются соответственно значения $x = x_0 + y_0 > x_0$ и $x = 1 + y_0 < x^*$. Последнее относится и к (1.7). Мы видим, что в случае $B(x) \neq \text{const}$ области применимости оценок (1.5) и (1.8) не пересекаются.

Если $B(x) \equiv B$, то (1.12) приобретает вид $A + (B/2)(x-1) = 1$. С другой стороны, в данном случае

$$f(x) = 1 + A(x-1) + \frac{B}{2}(x-1)^2.$$

Это означает, что

$$x_0 = x^* = \frac{2}{B}(1-A) + 1.$$

Таким образом, зона значений $x^* < x < x_0$, которая не участвует в неравенствах (1.5)–(1.7), в данном случае пуста.

Следствие 1.4. Если $A < 1$, $B > 0$, $R > 1$ и $x_0 \neq \infty$, то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + y^*)^{-k} (2A^n y^* + \mathbf{P}(Z_n > 0)), \quad (1.15)$$

где $y^* = A(1 - A)/B(x_0)$.

Доказательство. Положим $g(x) = 1 + A(x - 1) + (B(x_0)/2)(x - 1)^2$. Очевидно, что $g(x) \geq f(x)$ и, следовательно, $g(x_0) \geq x_0$. Нетрудно видеть, что в точке $x_1 = 1 + (1 - A)/B(x_0)$ производная $g'(x_1)$ равна 1. Это означает, что $x_1 < x_0$. Пусть $y^* = A(x_1 - 1) = A(1 - A)/B(x_0)$. Тогда

$$\frac{A}{y^*} = \frac{B(x_0)}{1 - A} > \frac{B(x_1)}{1 - A} = \frac{B(1 + y^*)}{1 - A}.$$

Полагая теперь в (1.8) $y_0 = y^*$, получаем (1.15).

Замечание 1.3. Умножая обе части неравенства (1.15) на A^{-n} , получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A^{-n} \mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq (2y^* + c_0)(1 + y^*)^{-k}, \quad (1.16)$$

где c_0 — постоянная в асимптотическом выражении $\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim c_0 A^n$. Напомним, что по теореме Яглома (см., например, [8, гл. 1, теорема 9.1]) для любого фиксированного $k > 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_n = k)}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} = b_k. \quad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) следует, что

$$\sum_{j=k}^{\infty} b_j \leq (2y^* + c_0)(1 + y^*)^{-k}. \quad (1.18)$$

Перейдем к случаю $R = 1$. Для любого $N \geq 2$ положим

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= \sum_{k=0}^N p_k z^k, \quad \bar{A} = \bar{f}'(1), \quad \bar{B} = \sum_{k=2}^N k(k-1)p_k, \\ \mathcal{B}(x) &= \bar{f}''(x), \quad \bar{B}_0 = \mathcal{B}(1 + y_0), \quad \bar{B}_t = \sum_{k=2}^N k^{t-1}(k-1)p_k, \quad t > 1. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Gamma_t(y, N) = \frac{e^{t-2}}{2} \bar{B} + \frac{\bar{B}_t}{2} \frac{(1 + y)^{N-2}}{N^{t-2}}.$$

Если $R = 1$, $\bar{B} > 0$, то уравнение $\bar{f}(u) = u$ имеет корень $u_N > 1$. Положим $A_N = f'(u_N)$. Очевидно, что $A_N > 1$.

Теорема 1.3. Пусть $A \geq 1$, $\bar{B} > 0$, $R = 1$. Тогда

а) для любых $y_0 > 0$, $t > 2$ и целых $n > 1$, $k > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) \right)^{-1} \right)^{-k} \\ &\quad + \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}; \end{aligned} \quad (1.19)$$

б) для любых целых $n > 1$, $k > 0$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{u_N + \mathbf{P}(Z_n > 0) - 1}{u_N^k} + \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}. \quad (1.20)$$

Асимптотика $\mathbf{P}(Z_n > A^n x)$ при фиксированном $A > 1$ и $x \rightarrow \infty$ в случае, когда распределение Z_1 имеет тяжелый хвост, исследуется в работах [9]–[11].

Следующий пример иллюстрирует точность неравенства (1.19).

Пример 1.1. Положим $y_0 = (t - 2)N^{-1} \ln N$. Тогда $N^{2-t}(1 + y_0)^{N-2} < e$ и, следовательно, $\Gamma_t(y_0, N) < 2^{-1}(e^{t-2}\bar{B} + e\bar{B}_t)$. Это означает, что при фиксированных A и n

$$\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) < \frac{2A^n}{y_0},$$

лишь только N достаточно велико. Отсюда следует, что при $N > N_0$

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) \right)^{-1} \right)^{-k} &< \left(1 + \frac{y_0}{2A^n} \right)^{-k} \\ &< \exp \left\{ - \frac{k(t-2)}{4A^n} \frac{\ln N}{N} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $x = kA^{-n}$. Если $(4N)^{-1}x = 1$, то, как нетрудно видеть,

$$\exp \left\{ - \frac{x}{4} \frac{\ln N}{N} \right\} = x^{-1}.$$

Из двух последних соотношений вытекает неравенство

$$\left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) \right)^{-1} \right)^{-k} < x^{2-t}. \quad (1.21)$$

Подставляя (1.21) в (1.19) и учитывая, что $N = 4^{-1}x$, получаем для достаточно больших x

$$\mathbf{P}(Z_n \geq A^n x) < 2x^{2-t} + \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1} \mathbf{P}(Z_1 > 4^{-1}x).$$

Пусть $\mathbf{P}(Z_1 > y) \leq y^{2-t}$. Тогда для $x > 4N_0$

$$\mathbf{P}(W_n > x) < (2 + 4^{t-2}c_n)x^{2-t}, \quad (1.22)$$

где $W_n = A^{-n}Z_n$, $c_n = (\bar{A}^n - 1)/(\bar{A} - 1)$. Эта оценка вполне согласуется с результатами, полученными в [9]–[11].

Мы видим, что коэффициент при x^{2-t} в правой части (1.22) быстро растет с увеличением n . С другой стороны, как показано в [11, лемма 11], для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}(W_n > x) \leq (1 + \varepsilon)\mathbf{P}(W_{n(\varepsilon)} > (1 - \varepsilon)x).$$

При этом предполагается, что распределение Z_1 меняется достаточно правильно. Таким образом, при оценке вероятности $\mathbf{P}(W_n > x)$ для $n > n(\varepsilon)$ можно использовать (1.22) для $n = n(\varepsilon)$.

Перейдем теперь к случаю $A < 1$. В связи с этим нам понадобятся дополнительные обозначения. Положим $A^c = \sum_{m=N+1}^{\infty} mp_m$ и

$$K_n(N) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(A^c \bar{A}^j + \mathbf{P}(Z_1 > N) \bar{B} \bar{A}^{j-1} \frac{1 - \bar{A}^j}{1 - \bar{A}} \right) \mathbf{P}(Z_{n-j-1} > 0),$$

где $\mathbf{P}(Z_0 > 0) := 1$. Обозначим

$$\bar{K}_n(N) = \min \left\{ \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}, K_n(N) \right\}.$$

Заметим, что $\mathbf{P}(Z_1 > N)(\bar{A}^n - 1)/(\bar{A} - 1) < K_n(N)$, если A^n достаточно близко к 1. Асимптотическое поведение $K_n(N)$ при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ обсуждается ниже в замечании 1.4.

Теорема 1.4. Пусть $R = 1$, $A \leq 1$, $\bar{B} > 0$, $t > 2$. Тогда для любых целых $n > 1$, $k > 0$ справедливы следующие утверждения:

а) выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{u_N + y_0 - \mathbf{P}(Z_n = 0)}{(u_N + (A_N^n/y_0 + ((A_N^n - 1)/(A_N - 1))\Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N))^{-1})^k + \bar{K}_n(N)}, \quad (1.23)$$

где $y_0 > 0$;

б) если y_0 удовлетворяет условию

$$0 < y_0 < \frac{2}{\bar{B}_0} (1 - \bar{A}), \quad (1.24)$$

то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{1}{(1 + y_0)^k} \left(\left(\bar{A} + \frac{\bar{B}_0}{2} y_0 \right)^n + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) + \bar{K}_n(N); \quad (1.25)$$

с) если $\bar{A}/y_0 > \bar{B}_0(1 - \bar{A}^n)/(2(1 - \bar{A}))$, то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq \frac{1}{(1 + y_0)^k} \left(\frac{\bar{A}^{n+1}}{\bar{A}/y_0 - \bar{B}_0(1 - \bar{A}^n)/(2(1 - \bar{A}))} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) + \bar{K}_n(N). \quad (1.26)$$

Устремляя y_0 в (1.23) к нулю, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5. В условиях теоремы 1.4

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{u_N - \mathbf{P}(Z_n = 0)}{u_N^k} + \bar{K}_n(N). \quad (1.27)$$

З а м е ч а н и е 1.4. Как известно, $\mathbf{P}(Z_j > 0) \sim c_0 A^j$ при $A < 1$, где постоянная c_0 зависит от распределения Z_1 . С другой стороны, если $R = 1$, то $\bar{A} < A$ при любом N . Следовательно, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}^j / \mathbf{P}(Z_j > 0)$ сходится. Отсюда при фиксированном N и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{A}^j \mathbf{P}(Z_{n-j-1} > 0) &\sim c_0 A^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right)^j, \\ \sum_{j=1}^{n-1} \bar{A}^{2j-1} \mathbf{P}(Z_{n-j-1} > 0) &\sim c_0 A^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{A}^{j-1} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right)^j. \end{aligned}$$

В результате получаем, что при фиксированном N

$$\begin{aligned} K_n(N) &\sim c_0 A^{n-1} \left(A^c + \bar{A} \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{B}}{1 - \bar{A}} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right)^j \\ &- c_0 A^n \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}\bar{B}}{1 - \bar{A}} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{A}^{j-1} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right)^j \equiv c_0 K(N) A^n. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Пусть $h_N = \max\{h: \mathcal{B}(e^h) \leq 2\bar{B}\}$. Очевидно, что $h_N \downarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, существует N_0 такое, что при $h \leq h_N$

$$e^h - 1 < \frac{(1 - \bar{A})\bar{A}}{2\mathcal{B}(e^h)},$$

лишь только $N > N_0$.

Применим теперь для оценки $\mathbf{P}(Z_n \geq k)$ неравенство (1.26), положив $y_0 = e^{h_N} - 1$. Тогда

$$(1 + y_0)^{-k} = e^{-kh_N}. \quad (1.29)$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{A}^{n+1} \left(\frac{\bar{A}}{y_0} - \frac{\bar{B}_0}{2} \frac{1 - \bar{A}^n}{1 - \bar{A}} \right)^{-1} = o(A^n). \quad (1.30)$$

Из (1.26) и (1.28)–(1.30) следует, что при фиксированных k и $N > N_0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_n \geq k)}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} \leq 1 + K(N). \quad (1.31)$$

Сравнивая (1.17) и (1.31), мы видим, что $K_n(N)$ имеет правильный порядок убывания по n . Что касается соотношения между $\sum_{j=k}^{\infty} b_j$ и правой частью неравенства (1.31), по этому поводу нельзя сказать что-то определенное ввиду отсутствия явных выражений для b_k и c_0 . Заметим, что для $N > N(\varepsilon)$

$$K_n(N) < c_0(1 + \varepsilon)nA^{n-1}A^c, \quad (1.32)$$

поскольку $\mathbf{P}(Z_n > 0) < c_0(1 + \varepsilon)A^n$ и $\mathbf{P}(Z_1 > N) = o(A^c)$. Кроме того,

$$\frac{\bar{A}}{y_0} - \frac{\bar{B}_0}{2} \frac{1 - \bar{A}^n}{1 - \bar{A}} > \frac{1}{\varepsilon^{-1}}. \quad (1.33)$$

Это означает, ввиду (1.26) и (1.29), что при $N > N(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + \varepsilon)A^{n-1}(e^{-kh_N} + c_0nA^c).$$

Выбирая k достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + 2\varepsilon)c_0nA^{n-1}A^c.$$

Пример 1.2. Предположим, что $A < 1$ и $p_k \sim k^{-l}$, $l > 3$. Пусть $F(x) = \mathbf{P}(Z_1 < x)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e^h) &= \int_0^N u(u-1)e^{hu} dF(u) \\ &= \int_0^{1/h} u(u-1)e^{hu} dF(u) + \int_{1/h}^N u(u-1)e^{hu} dF(u) \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1 < e\bar{B}. \quad (1.34)$$

Далее,

$$I_2 < c \int_{1/h}^N u^{2-l} e^{hu} du, \quad (1.35)$$

где $c > 1$ — некоторая постоянная. Для любых $t > 0$ и $y > 1/h$

$$\int_{1/h}^y u^{-t} e^{hu} du = h^{t-1} \int_1^{hy} u^{-t} e^u du.$$

Так как $\int_1^x u^{-t} e^u du = t \int_1^x u^{-t-1} e^u du + x^{-t} e^x - e$, то $\int_1^x u^{-t} e^u du \sim x^{-t} e^x$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, при $hy \rightarrow \infty$

$$\int_{1/h}^y u^{-t} e^{hu} du \sim \frac{e^{hy}}{hy^t}. \quad (1.36)$$

Из (1.35) и (1.36) следует, что

$$I_2 < c \frac{e^{hN}}{hN^{l-2}}. \quad (1.37)$$

Выберем $h = h_N$ так, чтобы было выполнено равенство $N^{1-l} e^{hN} = 1$, т.е. $h_N = (l-1)N^{-1} \ln N$. Тогда

$$I_2 < \frac{c}{(l-1) \ln N}. \quad (1.38)$$

Ввиду (1.34) и (1.38) имеем

$$\mathcal{B}(e^{hN}) < e\overline{B} + \frac{c}{(l-1) \ln N}.$$

Это означает, что при достаточно больших N

$$\mathcal{B}(e^h) < 2e\overline{B},$$

если $h \leq h_N$. Следовательно, существует N_0 такое, что при $N > N_0$

$$e^h - 1 < \frac{2(1 - \overline{A})\overline{A}}{\mathcal{B}(e^h)},$$

лишь только $h < h_N$. Применим теперь для оценки $\mathbf{P}(Z_n \geq k)$ неравенство (1.26), положив $k = 2N$, $y_0 = e^{h_N} - 1$. Тогда

$$(1 + y_0)^{-k} = e^{-kh_N} = N^{-2(l-1)}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае имеют место неравенства (1.32) и (1.33). Далее, при $N \rightarrow \infty$ и фиксированном n

$$\overline{A}^{n+1} \left(\frac{\overline{A}}{y_0} - \frac{\overline{B}_0(1 - \overline{A}^n)}{2(1 - \overline{A})} \right)^{-1} \sim \overline{A}^n h_N.$$

В результате мы получаем, что при достаточно больших N

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq (1 + \varepsilon) \cdot 2^{l-1} (l-1) n \overline{A}^{n-1} k^{1-l}.$$

Аналогичным образом можно получить оценки для $\mathbf{P}(Z_n \geq k)$ в случае более быстрого, чем степенное, убывания $1 - F(x)$, например, в случае $1 - f(x) \sim e^{-x^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Степенные оценки для вероятностей $\mathbf{P}(Z_n \geq k)$ можно получить с помощью неравенств вида

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq \frac{\mathbf{E} Z_n^m}{k^m}.$$

Выражения для моментов $\mathbf{E} Z_n^m$ находятся рекуррентно путем повторного дифференцирования равенства $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Однако возникающие при этом выражения весьма сложны. Поэтому возникает потребность в компактных верхних оценках для $\mathbf{E} Z_n^m$. Для сумм независимых случайных величин такие оценки легко выводятся из вероятностных неравенств (см. [12]–[14]). Мы используем этот подход для процессов Гальтона–Ватсона, но здесь он приводит, как мы увидим ниже, к весьма сложным выкладкам. Прежде всего, мы преобразуем неравенства в теоремах 1.3 и 1.4 к виду, удобному для вывода моментных неравенств. С этой целью введем несколько новых обозначений.

Пусть y_0 определяется равенством

$$\overline{B}_t \frac{e^{y_0(N-2)}}{N^{t-2}} = \overline{B}. \quad (1.39)$$

В дальнейшем мы будем обозначать это значение y_0 через $y_t(N)$. Нетрудно видеть, что

$$y_t(N) = \frac{1}{N-2} \ln \left(\frac{\overline{B}}{\overline{B}_t} N^{t-2} \right). \quad (1.40)$$

Поскольку $N^{t-2} > \overline{B}_t / \overline{B}$, то $y_t(N) > 0$.

Положим

$$P_1 = (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \frac{A-1}{\overline{B}(A^n-1)} (e^{t-2} + 1)^{-1} \right)^{-k}, \quad (1.41)$$

$$P_2 = (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(\left(\frac{\overline{B}_t}{\overline{B} N^{t-2}} \right)^{0.43k/(A^n(N-2))} \vee \left(\frac{4}{5} \right)^k \right). \quad (1.42)$$

Теорема 1.5. Пусть $A \geq 1$, $\overline{B} > 0$. Тогда для любых $t > 2$ и любых целых $n > 1$ и $k > 0$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < P_1 + \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\overline{A}^n - 1}{\overline{A} - 1}, \quad (1.43)$$

если

$$\frac{A^n}{y_t(N)} \leq \frac{\overline{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1),$$

и

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < P_2 + \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\overline{A}^n - 1}{\overline{A} - 1}, \quad (1.44)$$

если

$$\frac{A^n}{y_t(N)} \geq \frac{\bar{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1).$$

Введем обозначения $\varepsilon_N = 1 - \bar{f}(1) \equiv \mathbf{P}(Z_1 > N)$,

$$A_t = (e^{t-2} + 1) \left(1 - \bar{A} + \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2\varepsilon_N \bar{B}} \right) + \bar{A},$$

$$v_0 = 1 + \frac{1 - \bar{A}}{\bar{B}} + \frac{1}{\bar{B}} \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2\varepsilon_N \bar{B}}, \quad v_t = 1 + \frac{2(1 - \bar{A})}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}}.$$

Теорема 1.6. Пусть $A \leq 1$, $\bar{B} > 0$ и $t > 2$. Тогда для любых $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:

а) если

$$y_t(N) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\bar{A}(1 - \bar{A})}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \right\}, \quad (1.45)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< \left(\frac{\bar{B}_t}{\bar{B}N^{t-2}} \right)^{2k/(3N)} \left(\frac{2\bar{A}^{n+1}(1 - \bar{A})}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}(1 - \bar{A}^n)} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) \\ &+ \bar{K}_n(N); \end{aligned} \quad (1.46)$$

б) если

$$\frac{1}{2} \leq \min \left\{ y_t(N), \frac{1 - \bar{A}}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \right\}, \quad (1.47)$$

то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \left(1 + \frac{\bar{A}}{2} \right)^{-k} (\bar{A}^{n+1} + \mathbf{P}(Z_n > 0)) + \bar{K}_n(N); \quad (1.48)$$

в) если

$$\frac{1 - \bar{A}}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, y_t(N) \right\}, \quad (1.49)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< \left(\frac{2\bar{A}^{n+1}(1 - \bar{A})}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) \exp \left\{ -\frac{2k(1 - \bar{A})\bar{A}}{3(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \right\} \\ &+ \bar{K}_n(N); \end{aligned} \quad (1.50)$$

г) если $y_0 > 0$ и

$$y_t(N) \geq v_0 + y_0 - 1, \quad (1.51)$$

то

$$\mathbf{P}(Z_1 \geq k) \leq v_0 + y_0 - \mathbf{P}(Z_n = 0) \left(v_t + \left(\frac{A_t^n}{y_0} + (e^{t-2} + 1) \frac{\bar{B}}{2} \frac{A_t^n - 1}{A_t - 1} \right)^{-1} \right)^{-k} + \bar{K}_n(N). \quad (1.52)$$

Из приведенных выше результатов можно сравнительно просто получать вероятностные неравенства для $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} Z_k$. С этой целью воспользуемся следующим неравенством из [15]: для любого $0 < \nu \leq 1$

$$\mathbf{P}(M_n \geq k) \leq \frac{\mathbf{P}(Z_n \geq \nu k)}{\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq \nu k \mid Z_0 = k\}}. \quad (1.53)$$

Доказательство этого неравенства приводится в приложении. Мы ограничимся случаем $A \geq 1$. Для любой случайной величины ξ обозначим через $\mathbf{D}\{\xi\}$ ее дисперсию. Очевидно, что

$$\mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = k\} = k \mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = 1\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = k\} = k D\{Z_i \mid Z_0 = 1\} = k \frac{\sigma^2 A^{i-1} (A^i - 1)}{A - 1}$$

(см., например, [8, гл. 1, формула 5.3]), то

$$\mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = k\} = k \Omega_i \sigma^2, \quad \text{где} \quad \Omega_i = \frac{A^{i-1} (A^i - 1)}{A - 1}.$$

Отсюда по неравенству Чебышёва для любых $0 < i < n$ и $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_i < (1 - \varepsilon)k \mid Z_0 = k\} &= \mathbf{P}\{Z_i - \mathbf{E} Z_i < (1 - \varepsilon)k - k A^i \mid Z_0 = k\} \\ &< \mathbf{P}\{Z_i - \mathbf{E} Z_i < -\varepsilon k \mid Z_0 = k\} < \frac{\Omega_i \sigma^2}{\varepsilon^2 k} < \frac{\Omega_n \sigma^2}{\varepsilon^2 k}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Из (1.53) и (1.54) следует, что при $k > \Omega_n \sigma^2 / \varepsilon^2$

$$\mathbf{P}(M_n > k) < \frac{\mathbf{P}(Z_n > (1 - \varepsilon)k)}{1 - \Omega_n \sigma^2 / (\varepsilon^2 k)}. \quad (1.55)$$

Отсюда, используя оценку (1.2), получаем, что для любого $0 < y_0 < R - 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n > k) &< (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 - \frac{\Omega_n \sigma^2}{\varepsilon^2 k} \right)^{-1} \\ &\times \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \frac{B_0}{2} \right) \right)^{(\varepsilon - 1)k}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

если $k > \Omega_n \sigma^2 / \varepsilon^2$. В случае $R = 1$ вместо (1.2) воспользуемся оценкой (1.19). В результате, с учетом (1.55), получаем, что для любых $y_0 > 0$, $t > 2$ и целых $N > 1$, $k > \Omega_n \sigma^2 / \varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n \geq k) &< (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 - \frac{\Omega_n \sigma^2}{\varepsilon^2 k}\right)^{-1} \\ &\times \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N)\right)^{-1}\right)^{(\varepsilon - 1)k} \\ &+ \frac{A^n - 1}{A - 1} \left(1 - \frac{\Omega_n \sigma^2}{\varepsilon^2 k}\right)^{-1} \mathbf{P}(Z_1 > N). \end{aligned} \quad (1.57)$$

В случае $A < 1$ описанный выше подход, как это явствует из (1.54), можно применить лишь для A , достаточно близких к 1, например при $A^n > 1 - \varepsilon/2$. Разумеется, при этом нужно использовать теорему 1.2 и теорему 1.3.

Сформулируем теперь моментное неравенство в случае $A \geq 1$, которое выводится с помощью теоремы 1.5. Положим $\beta_t = \mathbf{E} Z_1^t$.

Теорема 1.7. Пусть $B_t < \infty$ и $A \geq 1$. Тогда для любого $t > 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z_n^t &< c_1(t) A^{nt} \left(\frac{B_t}{B}\right)^{t/(t-2)} + c_2(t) + c_3(t) B^t \left(\frac{A^n - 1}{A - 1}\right)^t \\ &+ c_4(t) A^{nt} \frac{A^n - 1}{A - 1} \beta_t, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(t) &= 1.02t \left(\frac{5et}{t-2}\right)^t, \quad c_2(t) = t(t+1)e^{1.5t-1}\Gamma(t), \\ c_3(t) &= 2^{-t}e^{-t-1}t(t+1)(t+3.5)^t\Gamma(t), \quad c_4(t) = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{2t}\left(\frac{t}{t-2}\right)^t \end{aligned}$$

(здесь $\Gamma(t)$ — функция Эйлера).

Мы видим, что неравенство (1.58) достаточно просто по форме. Заметим также, что порядок роста по t участвующих в нем постоянных примерно такой же, как в вероятностных неравенствах для сумм независимых случайных величин (см. в этой связи [14], [16]).

Полагая в (1.58) $A = 1$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1.6. Если $A = 1$, то для любого $t > 2$

$$\mathbf{E} Z_n^t < c_1(t) \left(\frac{B_t}{B}\right)^{t/(t-2)} + c_2(t) + c_3(t) B^t n^t + c_4(t) n \beta_t. \quad (1.59)$$

По сравнению со случаем независимых случайных величин неравенство (1.59) содержит в правой части дополнительный член

$c_1(t)(B_t/B)^{t/(t-2)} + c_2(t)$, который, впрочем, не зависит от n . Тем не менее его нельзя опустить, поскольку $(B_t/B)^{t/(t-2)}$ может оказаться больше, чем $n\beta_t$, если квазиляпуновское отношение $B_t/B^{t/2}$ достаточно велико.

Моментные неравенства (1.58) и (1.59) являются еще одним подтверждением точности оценок теоремы 1.3.

2. Доказательство теоремы 1.1. Для любого $0 < y < R - 1$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq \frac{f_n(1+y) - f_n(0)}{(1+y)^k}. \quad (2.1)$$

Очевидно, что для $0 < y < R - 1$

$$f(1+y) \leq 1 + Ay + B_0 \frac{y^2}{2}. \quad (2.2)$$

Определим теперь рекуррентную последовательность $y_n > 0$, $n \geq 0$, равенствами

$$y_{n-1} = Ay_n + \frac{B_0 y_n^2}{2}. \quad (2.3)$$

Последовательность y_n , очевидно, убывает. Поэтому, деля обе части (2.3) на $y_{n-1}y_n$, имеем $1/y_n < A/y_{n-1} + B_0/2$. Отсюда

$$\frac{1}{y_n} < \frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \frac{B_0}{2}.$$

Следовательно,

$$y_n > \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \frac{B_0}{2} \right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Далее, в силу (2.2)

$$f(1+y_n) \leq 1 + Ay_n + \frac{B_0}{2} y_n^2 = 1 + y_{n-1},$$

$$f_2(1+y_n) = f(f(1+y_n)) < f(1+y_{n-1}) < 1 + Ay_{n-1} + \frac{B_0}{2} y_{n-1}^2 = 1 + y_{n-2}$$

и т.д. Таким образом,

$$f_n(1+y_n) < 1 + y_0. \quad (2.5)$$

Полагая в (2.1) $y = y_n$, имеем

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{f_n(1+y_n) - f_n(0)}{(1+y_n)^k}, \quad k > 0. \quad (2.6)$$

Вследствие (2.5)

$$f_n(1+y_n) - f_n(0) < \mathbf{P}(Z_n > 0) + y_0. \quad (2.7)$$

Из (2.4), (2.6) и (2.7) следует утверждение теоремы.

3. Доказательство теоремы 1.2. Доказательство пункта а). Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$y_{n-1} = A_0 y_n + \frac{B_0}{2} y_n^2, \quad (3.1)$$

считая, что $0 < y_0 < R - x_0$. Так как $A_0 > 1$, то последовательность y_n убывает. Поэтому, повторяя рассуждения, использованные при выводе (2.4), мы заключаем, что

$$y_n > \left(\frac{A_0^n}{y_0} + \frac{A_0^n - 1}{A_0 - 1} \frac{B_0}{2} \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Вследствие (3.1) имеем $f(x_0 + y_n) \leq f(x_0) + A_0 y_n + (B_0/2) y_n^2 = x_0 + y_{n-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} f_2(x_0 + y_n) &= f(f(x_0 + y_n)) \leq f(x_0 + y_{n-1}) \\ &\leq f(x_0) + A_0 y_{n-1} + \frac{B_0}{2} y_{n-1}^2 = x_0 + y_{n-2}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, мы приходим к выводу, что

$$f_n(x_0 + y_n) \leq x_0 + y_0. \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &\leq \frac{f_n(x_0 + y_n) - f_n(0)}{(x_0 + y_0)^k} \\ &< (x_0 + y_0 - \mathbf{P}(Z_n = 0)) \left(x_0 + \left(\frac{A_0^n}{y_0} + \frac{A_0^n - 1}{A_0 - 1} \frac{B_0}{2} \right)^{-1} \right)^{-k}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали пункт а) теоремы.

Доказательство пункта с). Очевидно, что для любого $1 < x < R$

$$f(x) \leq 1 + A(x - 1) + \frac{f''(x)}{2} (x - 1)^2.$$

Нетрудно видеть, что для любого $1 < x < R$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(f_{n-1}(x)) \\ &< 1 + A(f_{n-1}(x) - 1) + \frac{f''(f_{n-1}(x))}{2} (f_{n-1}(x) - 1)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Положим $x = 1 + y_0$, где y_0 удовлетворяет условию (1.6). Как показано выше (см. замечание 1.2), в этом случае $x < x_0$. Это означает, что $f(x) < x$, и, следовательно, $f_n(x)$ убывает по n . Отсюда в силу (3.4)

$$f_n(x) < 1 + A(f_{n-1}(x) - 1) + \frac{B_0}{2} (f_{n-1}(x) - 1)^2.$$

Рассмотрим теперь рекуррентную последовательность

$$y_n = Ay_{n-1} + \frac{B_0}{2} y_{n-1}^2, \quad n \geq 1. \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что

$$f_n(1 + y_0) - 1 \leq y_n. \quad (3.6)$$

Если $A + (B_0/2)y_{n-1} < 1$, то

$$y_n = y_{n-1} \left(A + \frac{B_0}{2} y_{n-1} \right) < y_{n-1}. \quad (3.7)$$

Из условия (1.6) следует, что (3.7) выполняется для $n = 1$. Отсюда по индукции $y_n < y_{n-1}$ для любого n , т.е. последовательность y_n убывает. Деля обе части (3.5) на $y_n y_{n-1}$, имеем

$$\frac{1}{y_{n-1}} = \frac{A}{y_n} + \frac{B_0}{2} \frac{y_{n-1}}{y_n}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{y_n} = \frac{1}{Ay_{n-1}} - \frac{B_0}{2A} \frac{y_{n-1}}{y_n}.$$

Поскольку вследствие (3.7) $y_{n-1}/y_n < A^{-1}$, то $1/y_n > 1/(Ay_{n-1}) - B_0/(2A^2)$. Отсюда

$$\frac{1}{y_n} > \frac{1}{A^n y_0} - \frac{B_0}{2} \frac{1 - A^n}{A^{n+1}(1 - A)},$$

т.е.

$$y_n < A^{n+1} \left(\frac{A}{y_0} - \frac{B_0}{2} \frac{1 - A^n}{1 - A} \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Далее, в силу (2.1)

$$\mathbf{P}_n(Z_n \geq k) \leq \frac{f_n(1 + y_0) - 1 + \mathbf{P}_n(Z_n > 0)}{(1 + y_0)^k}. \quad (3.9)$$

Собирая оценки (3.6)–(3.9), мы получаем неравенство (1.8).

Доказательство пункта б). Воспользуемся соотношением (3.7). Поскольку последовательность y_n убывает, то $y_n < y_0$. Следовательно,

$$y_n < y_{n-1} \left(A + \frac{B_0}{2} y_0 \right), \quad \text{т.е.} \quad y_n < \left(A + \frac{B_0}{2} y_0 \right)^n.$$

Применяя теперь (3.6), имеем

$$f_n(1 + y_0) - 1 < \left(A + \frac{B_0}{2} y_0 \right)^n.$$

Отсюда, полагая в (2.1) $y = y_0$, получаем желаемый результат. Теорема 1.2 теперь полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 1.3. Обозначим через $\bar{Z}_n$ субстохастический ветвящийся процесс с производящей функцией $\bar{f}(z)$. Пусть $\bar{f}_n(z)$ есть n -я итерация $\bar{f}(z)$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) - \mathbf{P}(\bar{Z}_n > k) \leq 1 - \bar{f}_n(1). \quad (4.1)$$

Далее,

$$\bar{f}_j(1) - \bar{f}_{j+1}(1) = \bar{f}(\bar{f}_{j-1}(1)) - \bar{f}(\bar{f}_j(1)) \leq \bar{A}(\bar{f}_{j-1}(1) - \bar{f}_j(1)).$$

Отсюда $\bar{f}_j(1) - \bar{f}_{j+1}(1) \leq \bar{A}^j(1 - \bar{f}(1)) = \bar{A}^j \mathbf{P}(Z_1 > N)$.

Следовательно,

$$1 - \bar{f}_n(1) = \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{f}_i(1) - \bar{f}_{i+1}(1)) \leq \mathbf{P}(Z_1 > N) \sum_{j=0}^{n-1} \bar{A}^j. \quad (4.2)$$

Возвращаясь теперь к (4.1), заключаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) - \mathbf{P}(\bar{Z}_n > k) < \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1} \mathbf{P}(Z_1 > N). \quad (4.3)$$

Таким образом, мы свели задачу к оценке $\mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k)$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n > k) \leq \frac{\bar{f}_n(1+y) - \bar{f}_n(0)}{(1+y)^k} \quad (4.4)$$

для любого $y > 0$.

Доказательство пункта а). Положим $n(y, t) = \min\{j: j \geq 2 + (t - 2)/\ln(1+y)\}$. Пусть $n(y, t) < N$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{f}(1+y) &= \sum_{j=0}^{n(y,t)-1} ((1+y)^j - 1 - jy)p_j + \sum_{j=0}^N p_j + y \sum_{j=0}^N jp_j \\ &\quad + \sum_{j=n(y,t)}^N ((1+y)^j - 1 - jy)p_j \\ &=: \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$(1+y)^j - 1 - jy < 2^{-1}j(j-1)y^2(1+y)^{j-2}.$$

Если $j < n(y, t)$, то $(1+y)^{j-2} < e^{t-2}$. Следовательно, $\sum_1 < (\bar{B}/2)e^{t-2}y^2$. Последовательность $(1+y)^{j-2}/j^{t-2}$ возрастает по j при $j \geq (t-2) \times (\ln(1+y))^{-1}$. Поэтому

$$\sum_4 < \frac{y^2}{2} \frac{(1+y)^{N-2}}{N^{t-2}} \sum_{j=n(y,t)}^N (j-1)j^{t-1}p_j < y^2 \bar{B}_t \frac{(1+y)^{N-2}}{2N^{t-2}}.$$

Далее, $\sum_2 = \bar{f}(1)$, $\sum_3 \leq Ay$. В результате мы получаем, что

$$\bar{f}(1+y) < \bar{f}(1) + Ay + y^2 \Gamma_t(y, N). \quad (4.5)$$

В случае $n(y, t) \geq N$ эта оценка тем более верна. Рассмотрим теперь рекуррентную последовательность

$$y_{n-1} = Ay_n + y_n^2 \Gamma_t(y_0, N). \quad (4.6)$$

Последовательность y_n , очевидно, убывает. Поэтому, деля обе части (4.6) на $y_n y_{n-1}$, имеем $1/y_n < A/y_{n-1} + \Gamma_t(y_0, N)$. Отсюда

$$\frac{1}{y_n} < \frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N),$$

т.е.

$$y_n > \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Вследствие (4.5) $\bar{f}(1+y_n) < \bar{f}(1) + Ay_n + y_n^2 \Gamma_t(y_0, N) = \bar{f}(1) + y_{n-1}$. Далее,

$$\bar{f}_2(1+y_n) < \bar{f}_2(1) + Ay_{n-1} + y_{n-1}^2 \Gamma_t(y_0, N) < \bar{f}_2(1) + y_{n-2}.$$

Продолжая этот процесс, мы заключаем, что $\bar{f}_n(1+y_n) < \bar{f}_n(1) + y_0$. Отсюда

$$\bar{f}_n(1+y_n) - \bar{f}_n(0) < y_0 + \bar{f}_n(1) - \bar{f}_n(0) \leq y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0). \quad (4.8)$$

Полагая теперь в (4.4) $y = y_n$, получаем вследствие (4.7) и (4.8), что

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k) < (y_0 + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_0} + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Gamma_t(y_0, N) \right)^{-1} \right)^{-k}. \quad (4.9)$$

Из (4.1), (4.2) и (4.9) следует утверждение пункта а) теоремы.

Доказательство пункта б). Чтобы получить неравенство (1.20), достаточно в (4.4) положить $1+y = u_N$, а затем воспользоваться оценками (4.1) и (4.2).

5. Доказательство теоремы 1.4. Мы сохраним обозначения $\bar{f}_n(z)$ и $\bar{Z}_n$, используемые при доказательстве теоремы 1.3. Предварительно докажем несколько лемм.

Введем обозначения

$$T_n(x) = f^c(f_{n-1}(x)) + \sum_{k=1}^{n-1} f^c(f_{n-k-1}(x)) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(k) g_m(f_{n-k-1}(x)),$$

$$\bar{T}_n(x) = f^c(\bar{f}_{n-1}(x)) + \sum_{k=1}^{n-1} f^c(\bar{f}_{n-k-1}(x)) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(k) g_m(\bar{f}_{n-k-1}(x)),$$

где $f^c(x) = f(x) - \bar{f}(x)$, $f_0(x) = x$, $\bar{p}_m(k) = \mathbf{P}(\bar{Z}_k = m)$, $g_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j$.

Лемма 5.1. Для любых $n > 1$ и $0 \leq x \leq 1$

$$\bar{T}_n(x) < f_n(x) - \bar{f}_n(x) \leq T_n(x). \quad (5.1)$$

Доказательство. Предположим, что правое неравенство в (5.1) верно для некоторого $n \geq 1$. Покажем, что тогда оно верно и для $n + 1$. Действительно, согласно (5.1)

$$f_{n+1}(x) \leq \bar{f}_n(f(x)) + f^c(f_n(x)) + \sum_{k=1}^{n-1} f^c(f_{n-k}(x)) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(k) g_m(f_{n-k}(x)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(f(x)) &= \bar{f}_{n+1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(n) (f^m(x) - \bar{f}^m(x)) \\ &= \bar{f}_{n+1}(x) + f^c(x) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(n) \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x) \bar{f}^{n-j-1}(x) \\ &\leq \bar{f}_{n+1}(x) + f^c(x) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(n) g_m(f(x)). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений следует, что формула (5.1) остается верной для $n + 1$. Очевидно, что

$$f_2(x) = f^c(f(x)) + \bar{f}(f(x)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \bar{f}(f(x)) &= f^c(x) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(1) \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x) \bar{f}^{n-j-1}(x) \\ &< \bar{f}_2(x) + f^c(x) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(1) g_m(f(x)). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$f_2(x) < \bar{f}_2(x) + f^c(f(x)) + f^c(x) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m(1) g_m(f(x)).$$

Таким образом, правое неравенство в (5.1) справедливо при $n = 2$. При $n = 1$ равенство тривиально.

Левое неравенство доказывается аналогично. Следовательно, (5.1) выполняется при всех $n \geq 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 5.2. Для любого $n \geq 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \bar{p}_m(n) \leq \bar{A}^n, \quad (5.2)$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) \bar{p}_m(n) < \bar{B} \bar{A}^{n-1} \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}. \quad (5.3)$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{E} \bar{Z}_n := \sum_{m=1}^{\infty} m \bar{p}_m(n) = \bar{f}'_n(1)$. Дифференцируя равенство

$$\bar{f}_{n+1}(x) = \bar{f}(\bar{f}_n(x)), \quad (5.4)$$

имеем $\bar{f}'_{n+1}(1) = \bar{f}'(\bar{f}_n(1))\bar{f}'_n(1) \leq \bar{A}\bar{f}'_n(1)$. Отсюда по индукции следует (5.2).

Далее,

$$\mathbf{E} \bar{Z}_n(\bar{Z}_n - 1) := \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\bar{p}_m(n) = \bar{f}''_n(1).$$

Дважды дифференцируя (5.4), получаем

$$\bar{f}''_{n+1}(1) = \bar{f}''(\bar{f}_n(1))[\bar{f}'_n(1)]^2 + \bar{f}''_n(1)\bar{f}'(\bar{f}_n(1)) < \bar{B}\bar{A}^{2n} + \bar{A}\bar{f}''_n(1).$$

Отсюда по индукции следует (5.3).

Лемма 5.3. Для любых $n > 1$ и $k \geq 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_n \geq k) - \mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k) \\ & < \sum_{j=0}^{n-1} \left(A^c \bar{A}^j + \mathbf{P}(Z_1 > N) \bar{B} \bar{A}^{j-1} \frac{1 - \bar{A}^j}{1 - \bar{A}} \right) \mathbf{P}(Z_{n-j-1} > 0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при любых $k \geq 1$ и $n > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) - \mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k) & \leq \mathbf{P}(Z_n > 0) - \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0) \\ & = 1 - f_n(0) - \bar{f}_n(1) + \bar{f}_n(0) \leq T_n(1) - \bar{T}_n(0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее,

$$f_k^j(1) - \bar{f}_k^j(0) = (f_k(1) - \bar{f}_k(0)) \sum_{l=0}^{j-1} f_k^l(1) \bar{f}_k^{j-l-1}(0) < j \mathbf{P}(Z_k > 0). \quad (5.7)$$

Отсюда

$$g_m(f_k(1)) - g_m(f_k(0)) < m(m-1) \mathbf{P}(Z_k > 0). \quad (5.8)$$

В силу (5.7)

$$f^c(f_k(1)) - f^c(f_k(0)) = \sum_{m=N+1}^{\infty} p_m(f_k^m(1) - f_k^m(0)) < A^c \mathbf{P}(Z_k > 0). \quad (5.9)$$

Комбинируя (5.8) и (5.9), имеем

$$\begin{aligned} & f^c(f_k(1))g_m(f_k(1)) - f^c(f_k(0))g_m(f_k(0)) \\ & < mA^c \mathbf{P}(Z_k > 0) + m(m-1) \mathbf{P}(Z_1 > N) \mathbf{P}(Z_k > 0). \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (5.6), получаем, с учетом (5.2) и (5.3), желаемый результат.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.4.

Доказательство пункта а). Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$y_{n-1} = A_N y_n + \Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N) y_n^2 \quad (5.10)$$

при $y_0 > 0$. Поскольку $A_N > 1$, то $y_{n-1} > y_n$, т.е. последовательность y_n убывает. Поэтому к ней применимы те же рассуждения, что и к последовательности (4.6). Следовательно,

$$y_n > \left(\frac{A_N^n}{y_0} + \frac{A_N^n - 1}{A_N - 1} \Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N) \right)^{-1}. \quad (5.11)$$

Точно так же, как (4.5), доказывается, что

$$\bar{f}(u_N + y) < \bar{f}(u_N) + A_N y + y^2 \Gamma_t(u_N + y - 1, N).$$

Отсюда, в силу (5.10),

$$\begin{aligned} \bar{f}(u_N + y_n) &< \bar{f}(u_N) + A_N y_n + y_n^2 \Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N) = u_N + y_{n-1}, \\ \bar{f}_2(u_N + y_n) &= \bar{f}(\bar{f}(u_N + y_n)) < \bar{f}(u_N + y_{n-1}) \\ &< \bar{f}(u_N) + A_N y_{n-1} + y_{n-1}^2 \Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N) = u_N + y_{n-2} \end{aligned}$$

и т.д. В результате мы получаем, что

$$\bar{f}_n(u_N + y_n) < u_N + y_0. \quad (5.12)$$

Нетрудно видеть, что для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k) \leq \frac{\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(0)}{x^k}. \quad (5.13)$$

Полагая в (5.13) $x = u_N + y_n$ и используя (5.11) и (5.12), получаем первое утверждение теоремы 1.4.

Доказательство пункта с). Нетрудно видеть, что для любого $x > 1$

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(x) &= \bar{f}(\bar{f}_{n-1}(x)) = \bar{f}_n(1) + \bar{A}(\bar{f}_{n-1}(x) - \bar{f}_{n-1}(1)) \\ &\quad + \frac{\bar{f}''(\theta_n(x) \bar{f}_{n-1}(x))}{2} (\bar{f}_{n-1}(x) - \bar{f}_{n-1}(1))^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$0 < \theta_n(x) < 1$, $n \geq 1$. Здесь $\bar{f}_0(x) = x$, $\bar{f}_0(1) = 1$. Обозначая

$$\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(1) = y_n, \quad \bar{f}''(\theta_n(x) \bar{f}_n(x)) = \tilde{B}_n,$$

мы можем записать (5.14) в виде

$$y_n = \bar{A}y_{n-1} + \frac{\bar{B}_{n-1}}{2}y_{n-1}^2, \quad n \geq 1. \quad (5.15)$$

По определению $y_0 = \bar{f}(x) - \bar{f}(1) = x - 1$. Если y_0 удовлетворяет условию (1.24), то

$$\bar{f}(x) < \bar{f}(1) + \bar{A}y_0 + \frac{\bar{B}_0}{2}y_0^2 < \bar{f}(1) + y_0 = \bar{f}(1) + x - 1 < x.$$

Следовательно, последовательность $\bar{f}_n(x)$ убывает. Это означает, что $\bar{B}_n \leq \bar{B}_0$. Таким образом,

$$y_n < \bar{A}y_{n-1} + \frac{\bar{B}_0}{2}y_{n-1}^2 = y_{n-1} \left(\bar{A} + \frac{\bar{B}_0}{2}y_{n-1} \right). \quad (5.16)$$

Поэтому $y_n < y_{n-1}$, если

$$\bar{A} + \frac{\bar{B}_0}{2}y_{n-1} < 1. \quad (5.17)$$

Из условия (1.24) следует, что (5.17) выполняется для $n = 1$. Отсюда по индукции $y_n < y_{n-1}$, т.е. последовательность y_n убывает.

Деля обе части (5.16) на $y_n y_{n-1}$, получаем

$$\frac{1}{y_{n-1}} < \frac{\bar{A}}{y_n} + \frac{\bar{B}_0}{2} \frac{y_{n-1}}{y_n}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{y_n} > \frac{1}{\bar{A}y_{n-1}} - \frac{\bar{B}_0}{2\bar{A}} \frac{y_{n-1}}{y_n}.$$

В силу (5.15) $y_n > \bar{A}y_{n-1}$. Поэтому $1/y_n > 1/(\bar{A}y_{n-1}) - \bar{B}_0/(2\bar{A}^2)$. Отсюда

$$\frac{1}{y_n} > \frac{1}{\bar{A}^n y_0} - \frac{\bar{B}_0(\bar{A}^{-n} - 1)}{2\bar{A}^2(\bar{A}^{-1} - 1)}, \quad (5.18)$$

или

$$y_n < \bar{A}^{n+1} \left(\frac{\bar{A}}{y_0} - \frac{\bar{B}_0}{2} \frac{1 - \bar{A}^n}{1 - \bar{A}} \right)^{-1}. \quad (5.19)$$

Далее, для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq k) \leq \frac{\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(0)}{x^k} = \frac{\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(1) + \bar{f}_n(1) - \bar{f}_n(0)}{x^k}. \quad (5.20)$$

Отсюда, полагая $x = 1 + y_0$, а затем используя (5.19) и неравенство $\bar{f}_n(1) - \bar{f}_n(0) < f_n(1) - f_n(0) \equiv \mathbf{P}(Z_n > 0)$, получаем оценку

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n \geq 0) \leq \frac{1}{(1 + y_0)^k} \left(\bar{A}^{n+1} \left(\frac{\bar{A}}{y_0} - \frac{\bar{B}_0(1 - \bar{A}^n)}{2(1 - \bar{A})} \right)^{-1} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right). \quad (5.21)$$

Неравенство (1.26) следует из (4.1), (4.2), (5.5), (5.21).

Доказательство пункта б). По определению $\bar{f}_n(1 + y_0) - \bar{f}_n(1) = y_n$. С другой стороны, из (5.16) следует, что $y_n < (\bar{A} + (\bar{B}_0/2)y_0)^n$. Отсюда, полагая в (5.20) $x = 1 + y_0$, получаем, с учетом (4.1), (4.2), (5.5), неравенство (1.25). Теорема 1.4 теперь полностью доказана.

6. Доказательство теоремы 1.5. Напомним, что $\bar{B}_t < N^{t-2}\bar{B}$. Заметим, что

$$(1 + y_0)^{N-2} < e^{y_0(N-2)}. \quad (6.1)$$

Полагая в (1.19) $y_0 = y_t(N)$, имеем, в силу (6.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< \frac{y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n \geq 0)}{\left(1 + \left(\frac{A^n}{y_t(N)} + \frac{A^n-1}{A-1} \left(e^{t-2} \frac{\bar{B}}{2} + \frac{\bar{B}}{2}\right)\right)^{-1}\right)^k} \\ &+ \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Пусть

$$\frac{A^n}{y_t(N)} > \frac{\bar{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1).$$

Тогда

$$\left(1 + \left(\frac{A^n}{y_t(N)} + \frac{\bar{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1)\right)^{-1}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{y_t(N)}{2A^n}\right)^{-1}. \quad (6.3)$$

Предположим, что $y_t(N)/A^n \leq 1/2$. Нетрудно видеть, что для любого $u > 0$ выполнено неравенство $1 + u > \exp\{u - u^2/2\}$. Полагая в этом неравенстве $u = y_t(N)/(2A^n)$, имеем

$$1 + \frac{y_t(N)}{2A^n} > \exp\left\{\frac{0.43y_t(N)}{A^n}\right\} = \left(\frac{\bar{B}_t}{\bar{B}N^{t-2}}\right)^{-0.43A^{-n}(N-2)^{-1}}.$$

Следовательно,

$$\left(1 + \frac{y_t(N)}{2A^n}\right)^{-k} < \left(\frac{\bar{B}_t}{\bar{B}N^{t-2}}\right)^{0.43A^{-n}k(N-2)^{-1}}. \quad (6.4)$$

Если $y_t(N)/A^n > 1/2$, то

$$\left(1 + \frac{y_t(N)}{2A^n}\right)^{-k} < \left(\frac{4}{5}\right)^k. \quad (6.5)$$

Из (6.2)–(6.5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(\left(\frac{\bar{B}_t}{\bar{B}N^{t-2}}\right)^{0.43A^{-n}k(N-2)^{-1}} \vee \left(\frac{4}{5}\right)^k\right) \\ &+ \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В силу (1.42) неравенство (6.6) с точностью до обозначений совпадает с (1.44).

Пусть теперь

$$\frac{A^n}{y_t(N)} \leq \frac{\bar{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left(\frac{A^n}{y_t(N)} + \frac{\bar{B}}{2} \frac{A^n - 1}{A - 1} (e^{t-2} + 1) \right)^{-1} \right)^{-1} \\ & < \left(1 + \frac{1}{\bar{B}} \frac{A - 1}{A^n - 1} (e^{t-2} + 1)^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из (6.2) и (6.7) следует неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) & < (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \left(1 + \frac{1}{\bar{B}} \frac{A - 1}{A^n - 1} (e^{t-2} + 1)^{-1} \right)^{-k} \\ & + \mathbf{P}(Z_1 > N) \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В силу (1.41) неравенство (6.8) с точностью до обозначений совпадает с (1.43).

7. Доказательство теоремы 1.6. Предварительно мы докажем несколько лемм.

Лемма 7.1. *Если*

$$\frac{2}{\bar{B}} \frac{1 - \bar{A}}{e^{t-2} + 1} \leq y_t(N), \quad (7.1)$$

то

$$u_N - 1 > \frac{1 - \bar{A}}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} + \frac{1}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2(e^{t-2} + 1)\bar{B}\varepsilon_N}, \quad (7.2)$$

где $\varepsilon_N = 1 - \bar{f}(1)$.

Доказательство. Точно так же, как (4.5), доказывается, что

$$\bar{f}(1 + y) < \bar{f}(1) + \bar{A}y + y^2\Gamma_t(y, N).$$

Так как $(1 + y)^{N-2} < e^{(N-2)y}$, то

$$\Gamma_t(y_t(N), N) < \frac{\bar{B}}{2} (e^{t-2} + 1). \quad (7.3)$$

Следовательно, при $0 < y \leq y_t(N)$

$$\bar{f}(1 + y) - 1 - y < \frac{\bar{B}}{2} (e^{t-2} + 1)y^2 + (\bar{A} - 1)y - \varepsilon_N.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\bar{B}}{2}(e^{t-2} + 1)y^2 + (\bar{A} - 1)y - \varepsilon_N < 0,$$

если

$$0 < y < \frac{1 - \bar{A}}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} + \frac{1}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}} \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2(e^{t-2} + 1)\bar{B}\varepsilon_N}.$$

Из трех последних неравенств следует утверждение леммы.

Следствие 7.1. *При условии (7.1)*

$$u_N - 1 > \frac{2(1 - \bar{A})}{(e^{t-2} + 1)\bar{B}}. \quad (7.4)$$

Лемма 7.2. *Для любого $N \geq 1$*

$$u_N - 1 \leq \frac{1 - \bar{A}}{\bar{B}} + \frac{1}{\bar{B}} \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2\varepsilon_N \bar{B}}, \quad (7.5)$$

где $\varepsilon_N = 1 - \bar{f}(1)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если $x > 1$, то $\bar{f}(x) > \bar{f}(1) + \bar{A}(x - 1) + (\bar{B}/2)(x - 1)^2$, т.е. для любого $y > 0$

$$\bar{f}(1 + y) - 1 - y > \frac{\bar{B}}{2}y^2 + (\bar{A} - 1)y - \varepsilon_N.$$

Отсюда следует, что $\bar{f}(1 + y) > 1 + y$ при

$$y > \frac{1 - \bar{A}}{\bar{B}} + \frac{1}{\bar{B}} \sqrt{(1 - \bar{A})^2 + 2\varepsilon_N \bar{B}},$$

что равносильно утверждению леммы.

Лемма 7.3. *Для любых $t > 2$ и $N \geq 2$*

$$\mathcal{B}(1 + y_t(N)) < (e^{t-2} + 1)\bar{B}. \quad (7.6)$$

Напомним, что $\mathcal{B}(x) := \bar{f}''(x) \equiv \sum_{j=2}^N j(j-1)p_j x^{j-2}$.

Доказательство. Мы начнем с представления

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(1 + y) &= \sum_{j=2}^{n(y,t)-1} j(j-1)(1+y)^{j-2}p_j + \sum_{j=n(y,t)}^N j(j-1)(1+y)^{j-2}p_j \\ &= \sum_1 + \sum_2, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $n(y, t) = \min\{j: j \geq 2 + (t-2)/\ln(1+y)\}$. Если $j < n(y, t)$, то выполнено неравенство $(1+y)^{j-2} < e^{t-2}$. Следовательно,

$$\sum_1 < e^{t-2}\bar{B}. \quad (7.8)$$

Далее, нетрудно видеть, что $\sum_2 < \bar{B}_t \max_{n(y,t) \leq j \leq N} (1+y)^j / j^{t-2}$. Последовательность $(1+y)^{j-2} / j^{t-2}$ возрастает при $j > n(y, t)$. Поэтому

$$\sum_2 < \bar{B}_t \frac{(1+y)^{N-2}}{N^{t-2}} < \bar{B}_t \frac{e^{y(N-2)}}{N^{t-2}}.$$

Если $y = y_t(N)$, то

$$\sum_2 < \bar{B}. \quad (7.9)$$

Из (7.7)–(7.9) следует утверждение леммы.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.6.

Доказательство пункта а). В силу леммы 7.3 условие (1.45) влечет оценку

$$y_t(N) < \frac{1 - \bar{A}}{\mathcal{B}(1 + y_t(N))}.$$

Таким образом, выполняется условие (1.24) для $y_0 = y_t(N)$. Применяя теперь оценку (1.26), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< \frac{1}{(1 + y_t(N))^k} \left(\frac{\bar{A}^{n+1}}{\frac{\bar{A}}{y_t(N)} - \frac{1 - \bar{A}^n}{1 - \bar{A}} \frac{\bar{B}_0}{2}} + \mathbf{P}(Z_n > 0) \right) \\ &+ \mathbf{P}(Z_1 > N) \bar{K}_n(N). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Поскольку по условию $y_t(N) \leq 1/2$, то $\ln(1 + y_t(N)) > (2/3)y_t(N)$. Мы воспользовались здесь тем, что при $0 < x \leq 1/2$

$$\ln(1 + x) > \frac{2}{3}x. \quad (7.11)$$

Отсюда при $y_t(N) \leq 1/2$

$$(1 + y_t(N))^k > \exp \left\{ \frac{2}{3} k y_t(N) \right\} = \left(\frac{\bar{B} N^{t-2}}{\bar{B}_t} \right)^{2k/(3(N-2))}. \quad (7.12)$$

Заметим также, что при условии (1.45)

$$\frac{\bar{A}}{y_t(N)} - \frac{\bar{B}(1 - \bar{A}^n)}{2(1 - \bar{A})} > \frac{1}{2y_t(N)} > (e^{t-2} + 1) \frac{\bar{B}(1 - \bar{A}^n)}{2(1 - \bar{A})}. \quad (7.13)$$

Из (7.10)–(7.13) следует, что при условии (1.45) выполняется неравенство (1.46). Таким образом, мы доказали пункт а) теоремы 1.6.

Доказательство пункта б). Пусть выполнено условие (1.47). Покажем, что в этом случае выполнено условие (1.24) с $y_0 = \bar{A}/2$. Действительно, в силу леммы 7.3

$$\bar{B}_0 < \mathcal{B}(1 + y_t(N)) < (e^{t-2} + 1) \bar{B}. \quad (7.14)$$

Отсюда

$$\frac{2}{\overline{B}_0} (1 - \overline{A}) > \frac{2(1 - \overline{A})}{(e^{t-2} + 1)\overline{B}} > 1 = \frac{2y_0}{\overline{A}} > y_0. \quad (7.15)$$

Таким образом, выполняется условие (1.24).

Заметим также, что ввиду (7.15)

$$\frac{\overline{B}_0(1 - \overline{A}^n)}{2(1 - \overline{A})} < \frac{\overline{B}_0}{2(1 - \overline{A})} < \frac{\overline{A}}{2y_0}. \quad (7.16)$$

Полагая в (1.26) $y_0 = \overline{A}/2$ и учитывая (7.14) и (7.16), получаем неравенство (1.48), что и требовалось доказать.

Доказательство пункта с). В данном случае положим $y_0 = \overline{A}(1 - \overline{A})/((e^{t-2} + 1)\overline{B})$. Тогда в силу (7.6) имеем $(2/\overline{B}_0)(1 - \overline{A}) > 2y_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае выполнено условие (1.24), что дает возможность воспользоваться оценкой (1.26). Заметим, что

$$\frac{\overline{B}_0(1 - \overline{A}^n)}{2(1 - \overline{A})} < \frac{\overline{B}_0}{2(1 - \overline{A})} < \frac{\overline{A}}{2y_0}.$$

Поэтому

$$\frac{\overline{A}}{y_0} - \frac{\overline{B}_0(1 - \overline{A})^n}{2(1 - \overline{A})} > \frac{\overline{A}}{2y_0} > \frac{(e^{t-2} + 1)\overline{B}}{2(1 - \overline{A})}. \quad (7.17)$$

Далее, поскольку в рассматриваемом случае $y_0 \leq 1/2$, то вследствие (7.11) выполнено неравенство $1 + y_0 > \exp\{(2/3)y_0\}$. Следовательно,

$$(1 + y_0)^{-k} < \exp\left\{-\frac{2k(1 - \overline{A})\overline{A}}{3(e^{t-2} + 1)\overline{B}}\right\}. \quad (7.18)$$

Заменяя в (1.26) величины $\overline{A}/y_0 - \overline{B}_0(1 - \overline{A})^n/(2(1 - \overline{A}))$ и $(1 + y_0)^{-k}$ их оценками (7.17) и (7.18), мы получаем неравенство (1.50).

Доказательство пункта d). Очевидно, что

$$\bar{f}'(u_N) - \overline{A} < \overline{B}(u_N)(u_N - 1). \quad (7.19)$$

Поскольку при условии (1.51) $u_N - 1 < y_t(N)$, то ввиду (7.6)

$$\overline{B}(u_N) < (e^{t-2} + 1)\overline{B}. \quad (7.20)$$

Из (7.5), (7.19) и (7.20) следует неравенство

$$A_N < (e^{t-2} + 1)\left(1 - \overline{A} + \sqrt{(1 - \overline{A})^2 + 2\varepsilon_N \overline{B}}\right) + \overline{A} =: A_t. \quad (7.21)$$

Далее, в силу следствия 7.1 и леммы 7.2

$$v_t < u_N < v_0. \quad (7.22)$$

Если $y_0 < y_t(N) - v_0 + 1$, то в силу (7.22) $u_N + y_0 - 1 < y_t(N)$. Отсюда вследствие (7.3)

$$\Gamma_t(u_N + y_0 - 1, N) < \Gamma_t(y_t, N) < \frac{e^{t-2} + 1}{2} \bar{B}. \quad (7.23)$$

Заменяя в (1.23) A_N , u_N , $\Gamma_t(u_N - 1 + y_0, N)$ их оценками (7.21)–(7.23), мы получаем неравенство (1.52), что и требовалось доказать.

8. Доказательство теоремы 1.7. Положим

$$\Omega_n(A) = \frac{A - 1}{(A^n - 1)(e^{t-2} + 1)\bar{B}}, \quad \bar{b}_{t-2} = \frac{\bar{B}_t}{\bar{B}}, \quad b_{t-2} = \frac{B_t}{B}.$$

В силу (1.43) и (1.44)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) \\ &\times \left(\left(\frac{\bar{b}_{t-2}}{N^{t-2}} \right)^{0.43k/(A^n(N-2))} \vee \left(\frac{4}{5} \right)^k \right) \\ &+ \frac{A^n - 1}{A - 1} \mathbf{P}(Z_1 > N), \end{aligned} \quad (8.1)$$

если $y_t(N)A^{-n} \leq 2\Omega_n(A)$, и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &< (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0))(1 + \Omega_n(A))^{-k} \\ &+ \frac{A^n - 1}{A - 1} \mathbf{P}(Z_1 > N), \end{aligned} \quad (8.2)$$

если $y_t(N)A^{-n} \geq 2\Omega_n(A)$. Пусть

$$N = \left\lceil \frac{0.215}{A^n} \left(\frac{t-2}{t} \right) k \right\rceil =: d_k.$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.1. Пусть функция распределения $G(y)$ сосредоточена на неотрицательной полуоси. Тогда функция

$$b_{t-2}(x) = \frac{\int_1^x y^{t-1}(y-1) dG(y)}{\int_1^x y(y-1) dG(y)} \quad (8.3)$$

не убывает по $x > 1$ для любого $t > 2$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_1^x y(y-1) dG(y) \right)^2 db_{t-2}(x) \\ &= x(x-1) \left(x^{t-2} \int_1^x y(y-1) dG(y) - \int_1^x y^{t-1}(y-1) dG(y) \right) dG(x). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$x^{t-2} \int_1^x y(y-1) dG(y) > \int_1^x y^{t-1}(y-1) dG(y).$$

Лемма 8.1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.7. В силу (8.3) $\bar{b}_t < b_t$. Следовательно,

$$\left(\frac{\bar{b}_{t-2}}{N^{t-2}} \right)^{1/(N-2)} < \exp \left\{ \frac{\ln(N^{2-t} b_{t-2})}{N-2} \right\}.$$

Функция $(x-2)^{-1} \ln(ax)$, где $a > 0$, убывает при $x > ea^{-1} \vee 2$. Поэтому при $N \geq eb_{t-2}^{1/(t-2)}$

$$\left(\frac{b_{t-2}}{N^{t-2}} \right)^{1/(N-2)} < \left(\frac{b_{t-2}}{\gamma_n^{t-2} k^{t-2}} \right)^{\gamma_n^{-1} k^{-1}}, \quad (8.4)$$

где

$$\gamma_n = \frac{0.215}{A^n} \frac{t-2}{t}.$$

Далее,

$$\mathbf{E} Z_n^t = \sum_{k=1}^{\infty} (k^t - (k-1)^t) \mathbf{P}(Z_n \geq k) < t \sum_{k=1}^{\infty} k^{t-1} \mathbf{P}(Z_n \geq k). \quad (8.5)$$

Очевидно, что

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^m k^{t-1} \mathbf{P}(Z_n \geq k) < m^{t-1} \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq m^t. \quad (8.6)$$

Полагая в (8.6)

$$m = m_n := \left\lceil \frac{et}{t-2} \frac{A^n}{0.215} b_{t-2}^{1/(t-2)} \right\rceil,$$

имеем

$$\Sigma_1 \leq \frac{A^{nt}}{0.215^t} \left(\frac{et}{t-2} \right)^t b_{t-2}^{t/(t-2)} < A^{nt} \left(\frac{5et}{t-2} \right)^t b_{t-2}^{t/(t-2)}. \quad (8.7)$$

Оценим теперь

$$\Sigma_2 := \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{t-1} \left(\frac{b_{t-2}}{d_k^{t-2}} \right)^{0.43k/(A^n d_k)}.$$

Вследствие (8.4)

$$\Sigma_2 < \frac{b_{t-2}^{2t/(t-2)}}{\gamma_n^{2t}} \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{-1-t}.$$

Далее, $\sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{-1-t} < t^{-1} m_n^{-t}$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< t^{-1} \gamma_n^{-2t} m_n^{-t} b_{t-2}^{2t/(t-2)} \\ &< t^{-1} \left(0.215e \frac{t-2}{t} \right)^{-t} A^{nt} b_{t-2}^{t/(t-2)} < t^{-1} \left(\frac{5e^{-1}t}{t-2} \right)^t A^{nt} b_t^{t/(t-2)}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &:= \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{t-1} \left(\frac{4}{5} \right)^k < \int_0^{\infty} x^{t-1} \exp \{x \ln 0.8\} dx \\ &= (-\ln 0.8)^{-t} \Gamma(t) < e^{1.5t} \Gamma(t). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Следующий шаг — оценка суммы

$$\Sigma_4 := \sum_{k=m_n+1}^{l_n} k^{t-1} (1 + \Omega_n(A))^{-k},$$

где

$$l_n = \max \{k: y_t(d_k) A^{-n} \geq 2\Omega_n(A)\}.$$

Последовательность $y_t(d_k)$ убывает при $k > m_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{k>m_n} y_t(d_k) &< \frac{\ln([(m_n+1)\gamma_n]^{t-2} b_{t-2}^{-1})}{[(m_n+1)\gamma_n]} \\ &< \frac{\ln((m_n\gamma_n)^{t-2} b_{t-2}^{-1})}{m_n\gamma_n} \leq \frac{t-2}{eb_{t-2}^{1/(t-2)}}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Мы использовали здесь неравенство $x^{-1} \ln x \leq e^{-1}$.

Если $l_n \leq m_n$, то $\Sigma_4 := 0$. В силу (8.10) $l_n \leq m_n$, если $2\Omega_n(A) \geq (t-2)/(eb_{t-2}^{1/(t-2)})$. Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что $\Omega_n(A) < (t-2)/(2e)$. Заметим, что для $0 < x \leq (t-2)/(2e)$

$$\ln(1+x) > \left(1 + \frac{t-2}{2e}\right)^{-1} x. \quad (8.11)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Sigma_4 < \int_0^{\infty} x^{t-1} \exp \{-x \ln(1 + \Omega_n(A))\} dx = \frac{\Gamma(t)}{\ln^t(1 + \Omega_n(A))}. \quad (8.12)$$

Из (8.11) и (8.12) следует, что

$$\Sigma_4 < \left(1 + \frac{t-2}{2e}\right)^t \Gamma(t) \Omega_n^{-t}(A). \quad (8.13)$$

Приступим теперь к оценке суммы

$$\Sigma_5 := \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{t-1} \mathbf{P}(Z_1 > d_k).$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}(Z_1 > d_k) \leq \mathbf{P}\left(Z_1 \geq \frac{0.215}{A^n} \left(\frac{t-2}{t}\right) k\right).$$

Для любой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ при $k \geq 4$ имеем

$$\int_k^{k+1} x^{t-1} (1-F(x)) dx > k^{t-1} (1-F(k+1)) > \left(\frac{4}{5}\right)^{t-1} (k+1)^{t-1} (1-F(k+1)).$$

Отсюда

$$\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)^{t-1} (1-F(k+1)) \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{t-1} \int_0^{\infty} x^{t-1} (1-F(x)) dx = \left(\frac{5}{4}\right)^{t-1} t^{-1} \mathbf{E} X^t.$$

Следовательно,

$$\Sigma_5 < t^{-1} \left(\frac{5}{4}\right)^{t-1} \mathbf{E} \left(\frac{A^n}{0.215} \frac{t}{t-2} Z_1 \right)^t < \frac{4}{5t} \left(\frac{5}{2}\right)^{2t} \left(\frac{t}{t-2}\right)^t A^{nt} \beta_t. \quad (8.14)$$

Согласно (8.1), (8.2) и (8.5)

$$\mathbf{E} Z_n^t < t \left(\Sigma_1 + (y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0)) (\Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4) + \frac{A^n - 1}{A - 1} \Sigma_5 \right). \quad (8.15)$$

Заметим, что в силу (8.10)

$$y_t(N) + \mathbf{P}(Z_n > 0) < \frac{t-2}{e} + 1. \quad (8.16)$$

Подставляя оценки (8.7)–(8.9), (8.12), (8.14) и (8.16) в правую часть (8.15), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z_n^t &< c'_1(t) A^{nt} b_{t-2}^{t/(t-2)} + c'_2(t) + c'_3(t) B^t \left(\frac{A^n - 1}{A - 1} \right)^t \\ &\quad + c'_4(t) A^{nt} \frac{A^n - 1}{A - 1} \beta_t, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где

$$\begin{aligned} c'_1(t) &= (t + (t-2)e^{-2t-1} + e^{-2t}) \left(\frac{5et}{t-2} \right)^t, \quad c'_2(t) = t \left(\frac{t-2}{e} + 1 \right) e^{1.5t} \Gamma(t), \\ c'_3(t) &= t \left(\frac{t-2}{e} + 1 \right) \left(\frac{t-2}{2e} + 1 \right)^t \Gamma(t), \quad c'_4(t) = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^{2t} \left(\frac{t}{t-2} \right)^t. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $c'_1(t) < c_1(t) := 1.02t(5et/(t-2))^t$. Ввиду (8.16)

$$\begin{aligned} c'_2(t) &< c_2(t) := t(t+1)e^{1.5t-1}\Gamma(t), \\ c'_3(t) &< c_3(t) := 2^{-t}e^{-t-1}t(t+1)(t+3.5)^t\Gamma(t). \end{aligned}$$

Из (8.17) и приведенных выше оценок для $c'_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, следует утверждение теоремы 1.7.

9. Приложение. Доказательство неравенства (1.53). Пусть $N_x = \min\{n: Z_n \geq x\}$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq m) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(Z_n \geq m, N_x = k). \quad (9.1)$$

Далее,

$$\mathbf{P}(Z_n \geq m, N_x = k) = \mathbf{E} \mathbf{P}(Z_n \geq m \mid \xi_k), \quad (9.2)$$

где ξ_k — индикатор события $\{N_x = k\}$. Так как ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона является марковским, то

$$\mathbf{P}(Z_n \geq m \mid \xi_k) = \mathbf{P}(Z_n \geq m \mid Z_k) \eta_k, \quad (9.3)$$

где η_k — индикатор события $\{Z_k \geq x\}$. Нетрудно видеть, что для любого $y > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}(Z_n \geq m \mid Z_k = y) = \mathbf{P}(Z_{n-k} \geq m \mid Z_0 = y). \quad (9.4)$$

Из (9.1)–(9.4) следует, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq m) \geq \min_{0 \leq k \leq m-1} \min_{y \geq x} \mathbf{P}(Z_k \geq m \mid Z_0 = y) \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_x = k).$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbf{P}(Z_k \geq m \mid Z_0 = y)$ не убывает по y и

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_x = k) = \mathbf{P}(M_n \geq x),$$

получаем (1.53).

Я очень благодарен рецензентам за внимательное отношение к рукописи и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев С. В., Вахрушев Н. В. Оценка вероятностей больших уклонений для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, в. 1, с. 181–182.
2. Нагаев С. В., Вахтель В. И. Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 266–291.
3. Ватутин В. А., Вахтель В. И., Фляйшманн К. Критические процессы Гальтона–Ватсона: Максимум общего числа частиц внутри большого окна. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 419–445.
4. Вахтель В. И. Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений критического процесса Гальтона–Ватсона со степенными хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 4, с. 644–659.
5. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
6. Макаров Г. Д. Большие уклонения для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 3, с. 490–501.
7. Нагаев С. В., Вахтель В. И. Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений процесса Гальтона–Ватсона. — Дискрет. матем., 2003, т. 15, в. 1, с. 3–27.
8. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М: Мир, 1966, 355 с.
9. Bingham N. H., Doney R. A. Asymptotic properties of supercritical branchings processes. I. The Galton–Watson process. — Adv. Appl. Probab., 1974, v. 6, p. 711–731.
10. De Meyer A. On a theorem of Bingham and Doney. — J. Appl. Probab., 1982, v. 19, № 1, p. 217–220.
11. Вахтель В. И., Денисов Д. Э., Коршунов Д. А. Об асимптотике хвоста распределения надкритического процесса Гальтона–Ватсона в случае тяжелых хвостов. — Тр. МИАН, 2013, т. 282, с. 288–314.
12. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 254–263.
13. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
14. Нагаев С. В. Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 832–838.
15. Карпенко А. В. Предельные теоремы и вероятностные неравенства для полного и максимального числа потомков ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Дис. . . канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1990.
16. Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J. Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 1, p. 234–253.

Поступила в редакцию
10.IX.2012

Исправленный вариант
3.IV.2014