Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Беломестный, А. В. Прохоров, Устойчивость характеристики независимости случайных величин по независимости линейных статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 4, 776–781

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:11:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2014 г.

БЕЛОМЕСТНЫЙ Д. В.* , ПРОХОРОВ А. В.**

УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕЗАВИСИМОСТИ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО НЕЗАВИСИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ
СТАТИСТИК¹⁾

Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ — независимые одинаково распределенные двумерные векторы. Будет доказано, что если статистики $L_{\mathbf{X}} = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_N X_N$ и $L_{\mathbf{Y}} = \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_N Y_N$ являются ε -независимыми, то при некоторых условиях $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ являются ε^α -независимыми для некоторого $\alpha > 0$.

Ключевые слова и фразы: устойчивость, независимые линейные статистики, характеристика.

Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ — независимые одинаково распределенные двумерные векторы с общей функцией распределения $F(x, y)$. Иногда при проверке гипотезы независимости приходится анализировать не исходные выборки $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$, а уже преобразованные.

Такое преобразование может быть, например, задано линейной комбинацией элементов выборки. Предположим, что наблюдаемые данные имеют вид

$$L_{\mathbf{X}} = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_N X_N, \quad L_{\mathbf{Y}} = \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_N Y_N.$$

Проблема независимости $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в случае независимости $L_{\mathbf{X}}$ и $L_{\mathbf{Y}}$ уже рассматривалась. Классические результаты нахождения генерального распределения по распределению некоторых статистик и исследования проблемы устойчивости таких характеристик можно найти, например, в [1], [2], [3]. Недавно были получены новые результаты, касающиеся, в частности, характеристики распределения и его свойств по распределению и свойствам линейных статистик ([4], [5], [6], [7]). Предлагаемая статья продолжает исследование устойчивости таких характеристик.

Введем понятие ε -независимости. Будем говорить, что две случайные величины Z_1 и Z_2 являются ε -независимыми, если для функции

$$Q(u, v) = \mathbf{P}\{Z_1 < u, Z_2 < v\} - \mathbf{P}\{Z_1 < u\}\mathbf{P}\{Z_2 < v\}$$

* Московский физико-технический институт и Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия; e-mail: denis.belomestny@uni-due.de

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия; e-mail: a.prokhorov@inbox.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ, грант Правительства Российской Федерации № 11.Г34.31.0073, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00521.

следующее неравенство

$$\left| \int_{\{u+av \leq b\}} \int dQ \right| < \varepsilon$$

справедливо при любых действительных числах $a \neq 0$ и b . Запишем наши линейные статистики в следующей форме

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}} &= b_1(X_{11} + \dots + X_{1k_1}) + \dots + b_n(X_{n1} + \dots + X_{nk_n}), \\ L_{\mathbf{Y}} &= b_1(X_{11} + \dots + Y_{1k_1}) + \dots + b_n(Y_{n1} + \dots + Y_{nk_n}), \end{aligned}$$

где натуральные числа k_i удовлетворяют условию $k_1 + \dots + k_n = N$, а b_i удовлетворяют условию $b_1 < \dots < b_n$. При $n > 1$, положим

$$q_i = \frac{k_i}{k_n}, \quad h_i = \frac{b_i}{b_n}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Пусть λ — такое единственное действительное число, что $q_1 h_1^{-\lambda} + \dots + q_{n-1} h_{n-1}^{-\lambda} = 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- (1) $q_1 + \dots + q_{n-1} \leq 1$,
- (2) $\mathbf{E}|L_{\mathbf{X}}|^m < \infty$, $\mathbf{E}|L_{\mathbf{Y}}|^m < \infty$ для некоторого целого $m \geq 2$,
- (3) $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}^2$ и, кроме того,

$$|\mathbf{E} e^{tL_{\mathbf{X}} + sL_{\mathbf{Y}}}| > p, \quad (t, s) \in \mathbf{R}^2,$$

для некоторого $p > 0$. Если $L_{\mathbf{X}}$ и $L_{\mathbf{Y}}$ являются ε -независимыми при $\varepsilon < \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 = \left(\min \left\{ \frac{p}{2}, \frac{pk_n(1 - h_{n-1}^\lambda)}{8} \right\} \right)^{9m/7(m-1)},$$

то

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} |F(x, y) - F(x, \infty)F(\infty, y)| \leq C\varepsilon^{2(1-1/m)/9}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $L_{\mathbf{X}}$ и $L_{\mathbf{Y}}$ являются ε -независимыми. Тогда $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ являются $4C\varepsilon^{2(1-1/m)/9}$ -независимыми.

В дальнейшем будем обозначать $f(t, s)$ общую характеристическую функцию (X_i, Y_i) . Положим

$$f_1(t) = f(t, 0), \quad f_2(s) = f(0, s), \quad g(t) = f_1(t)f_2(\rho t), \quad \rho > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{i(tL_{\mathbf{X}} + sL_{\mathbf{Y}})} &= f^{k_1}(b_1 t, b_1 s) \dots f^{k_n}(b_n t, b_n s) \\ &= \psi(t, s) + f^{k_1}(b_1 t) \dots f_1^{k_n}(b_n t) f_2^{k_1}(b_1 s) \dots f_2^{k_n}(b_n s), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t, s) = \iint e^{(tu + sv)} dQ_{L_{\mathbf{X}} L_{\mathbf{Y}}}(u, v).$$

Оценим $\psi(t, s)$ на прямой $s = \rho t$, где $\rho \neq 0$. Имеем

$$\psi(t, \rho t) = \iint \exp\{it(u + \rho v)\} dQ_{L_{\mathbf{X}} L_{\mathbf{Y}}}(u, v).$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} u = \frac{x + y}{2}, \\ v = \frac{x - y}{2\rho}, \end{cases}$$

и обозначив

$$R(x) = \int_{u+\rho v < x} dQ_{L_{\mathbf{X}}L_{\mathbf{Y}}}(u, v),$$

мы получим для любого $a > 0$

$$\psi(t, \rho t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} dR(x) = \int_{|x| \leq a} e^{itx} dR(x) + \int_{|x| > a} e^{itx} dR(x) = I_1 + I_2.$$

Далее,

$$|I_1| = \left| R(a)e^{ita} - R(-a)e^{-ita} - 2it \int_{-a}^a e^{itx} R(x) dx \right| \leq 2\varepsilon + 4ta\varepsilon$$

и, используя неравенство Чебышева, получаем

$$|I_2| = \left| \int_{|x| > a} e^{itx} dR(x) \right| \leq \frac{C_0}{a^m}, \quad C_0 > 0,$$

так как $\int |x|^m dR(x) < \infty$. Выбрав $a = \varepsilon^{1/m}$, мы получим для некоторой константы $C_1 > 0$

$$|f^{k_1}(b_1 t) \cdots f^{k_n}(b_n t) - g^{k_1}(b_1 t) \cdots g^{k_n}(b_n t)| \leq C_1 \varepsilon (1 + t\varepsilon^{-1/m}). \quad (1)$$

Далее, обозначим $\Omega_F(t) = f^{k_1}(b_1 t) \cdots f^{k_n}(b_n t)$ и $\Omega_G(t) = g^{k_1}(b_1 t) \cdots g^{k_n}(b_n t)$.

Лемма 1. Пусть $n > 1$,

$$g_1 + \cdots + g_{n-1} < 1$$

и пусть $\lambda > 0$ есть единственное действительное число, удовлетворяющее $q_1 h_1^{-\lambda} + \cdots + g_{n-1} h_{n-1}^{-\lambda} = 1$. Если

$$|\Omega_F(t)| > p, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$|\Omega_F(t) - \Omega_G(t)| \leq \varepsilon < p, \quad t > 0, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{p}{2}, \frac{pk_n(1 - h_{n-1}^\lambda)}{8} \right\},$$

то

$$|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon, \quad t > 0.$$

Доказательство. Так как $|\Omega_F(t)|$ не обращается в нуль на $(0, \infty)$ и выполняется неравенство (3), то $|\Omega_G(t)|$ также не обращается в нуль. Из (3) получаем при $t > 0$

$$\left| \frac{\Omega_G(t)}{\Omega_F(t)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Так как $\Omega_F(t)$ и $\Omega_G(t)$ не обращаются в нуль, мы можем рассмотреть $\ln \Omega_F(t)$ и $\ln \Omega_G(t)$ на $(0, \infty)$. Используя элементарное неравенство $|\ln(1+z)| \leq 2|z|$, которое справедливо при $|z| \leq 1/2$, получим из (3) при $\varepsilon \leq p/2$

$$|\ln \Omega_F(t) - \ln \Omega_G(t)| \leq 2\varepsilon, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Положив $\Delta(t) = \ln f(t) - \ln g(t)$, мы получим

$$|p_1 \Delta^\lambda(h_1 t) + \cdots + p_{n-1} \Delta^\lambda(h_{n-1} t) + \Delta^\lambda(t)| \leq \varepsilon \frac{2}{pk_n} t^\lambda, \quad t > 0,$$

где $p_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n-1} p_k = 1$ и $\Delta^\lambda(t) = \Delta(t)|t|^\lambda$. Так как $g_1 + \cdots + g_{n-1} < 1$, из теоремы о среднем получаем, что

$$|\Delta^\lambda(m(t)t) + \Delta^\lambda(t)| \leq \varepsilon \frac{2}{pk_n} t^\lambda,$$

где $h_1 \leq m(t) \leq h_{n-1} < 1$. Далее, можно показать, что для любого $t > 0$ существует последовательность $m_k(t)$ такая, что $0 < m_k(t) \leq h_{n-1}^k$ и

$$|\Delta^\lambda(m_k(t)t) + (-1)^k \Delta^\lambda(t)| \leq \varepsilon \frac{2}{pk_n} \sum_{j=1}^k m_j^\lambda(t), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Поэтому при $k \rightarrow \infty$

$$|\Delta^\lambda(t)| \leq \varepsilon \frac{2}{pk_n} \sum_{j=1}^{\infty} m_j^\lambda(t) \leq t^\lambda \frac{2}{k_n(1-h_{n-1}^\lambda)} \varepsilon,$$

следовательно

$$|\Delta(t)| \leq \frac{2}{pk_n(1-h_{n-1}^\lambda)} \varepsilon, \quad t > 0.$$

Используя элементарное неравенство $|\ln(1+z)| \geq 2/3|z|$, справедливое для $|z| \leq 1/4$, получим

$$\left| 1 - \frac{f(t)}{g(t)} \right| \leq \frac{3}{k_n(1-h_{n-1}^\lambda)} \varepsilon$$

при $\varepsilon \leq pk_n(1-h_{n-1}^\lambda)/8$. Так как $|g(t)| \leq 1$, окончательно получаем

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{3}{k_n(1-h_{n-1}^\lambda)} \varepsilon, \quad t > 0,$$

где $\varepsilon < \min\{p/2, pk_n(1-h_{n-1}^\lambda)/8\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$L = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — произвольные конечные действительные числа. Тогда при любом $r > 0$, из условия $\mathbf{E}|L|^r < \infty$ следует $\mathbf{E}|X_1|^r < \infty$.

Доказательство. (Сравните с доказательством близкого результата в [8, с. 276]). Без ограничения общности допустим, что $a_1 \neq 0$. Положим $b = -m(a_2 X_2 + \dots + a_n X_n)$, тогда

$$|a_1 X_1 - b| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - m(S_k - S_n)|,$$

где

$$S_k = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

По неравенству Леви

$$\mathbf{P}\{|a_1 X_1 - b| \geq x\} \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - m(S_k - S_n)| \geq x\right\} \leq 2\mathbf{P}\{|S_n| \geq x\},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r \leq 2\mathbf{E}|S_n|^r = 2\mathbf{E}|L|^r.$$

Далее, если $r \leq 1$, то

$$\mathbf{E}|a_1 X_1|^r \leq \mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r + |b|^r < \infty,$$

а если $r > 1$, то

$$\mathbf{E}|a_1 X_1|^r \leq 2^{r-1} \mathbf{E}|a_1 X_1 - b|^r + 2^{r-1} |b|^r < \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$|t| \leq \varepsilon^{-2(1-1/m)/9},$$

где ε выбирается таким образом, чтобы

$$(\varepsilon + \varepsilon^{7(1-1/m)/9}) \leq \min \left\{ \frac{p}{2}, \frac{pk_n(1 - h_{n-1}^\lambda)}{8} \right\}.$$

Из леммы 1 и неравенства (1) следует, что

$$|f(t, \rho t) - f(t, 0)f(0, \rho t)| \leq A(\varepsilon + |t|\varepsilon^{(1-1/m)}), \quad A > 0,$$

и

$$|f(t, \rho t) - f(t, 0)f(0, \rho t)| \leq B\rho t^2, \quad B > 0,$$

так как по лемме 1 функция $f(t, s)$ по крайней мере дважды дифференцируема. Таким образом для любых действительных чисел ρ и t

$$|f(t, \rho t) - f(t, 0)f(0, \rho t)| \leq \min \left\{ A(\varepsilon + |t|e^{(1-1/m)}), B|\rho t|^2 \right\}.$$

В соответствии с двумерным неравенством Эссена (см. [9]) при $T > 0$, $D > 0$

$$\sup |F(x, y) - F(x, \infty)F(\infty, y)| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left| \frac{f(t, s) - f(0, s)f(t, 0)}{st} \right| ds dt + \frac{D}{T},$$

и следовательно при $\alpha > 0$

$$\sup |F(x, y) - F(x, \infty)F(\infty, y)| \leq B\varepsilon^{2\alpha} + 4AT^2(\varepsilon + T\varepsilon^{1-1/m})\varepsilon^{-3\alpha} + \frac{D}{T}.$$

Выбрав $T = \varepsilon^{-2(1-1/m)/9}$ и $\alpha = (1 - 1/m)/9$, мы получим

$$\sup |F(x, y) - F(x, \infty)F(\infty, y)| \leq C\varepsilon^{2(1-1/m)/9}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Для любых $R > 0$, $r > 0$

$$\left| \int_{-R}^R \int_{-r}^{b-ay} dQ(x, y) \right| \leq 4 \sup |F(x, y) - F(x, \infty)F(\infty, y)|.$$

Устремив r и R к ∞ , получим

$$\left| \int_{\{u+av \leq b\}} \int dQ_{\mathbf{XY}} \right| < 4C\varepsilon \frac{2(1-1/m)}{9}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линник Ю. В.* К вопросу о нахождении генерального распределения по распределению статистики. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 4, с. 466–478.
2. *Прохоров Ю. В.* Характеризация класса распределений по распределению некоторых статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 3, с. 479–487.
3. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
4. *Прохоров А. В., Ушаков Н. Г.* О задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 544–556.
5. *Прохоров А. В., Ушакова А. П.* Оценки устойчивости в задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.-мех., 2001, № 2, с. 3–8.
6. *Беломестный Д. В.* К проблеме восстановления генерального распределения по распределению линейной статистики. — Труды XXIII конференции молодых ученых мех.-мат. ф-та МГУ, 2001, с. 34–37.

7. Беломестный Д. В., Прохоров А. В. О задаче восстановления генерального распределения по распределению линейной статистики. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.-мех., 2003, в. 2, с. 3–8.
8. Лозв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 277 с.
9. Садикова С. М. Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 3, с. 369–380.

Поступила в редакцию
9.II.2013

Исправленный вариант
10.III.2014

© 2014 г.

ИВАНОВ М. Ю.*

О СВЯЗИ ЗАДАЧ МАКСИМИЗАЦИИ СТЕПЕННОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЛЕВИ

В данной статье мы решаем задачу максимизации степенной полезности в экспоненциальной модели Леви путем сведения ее к задаче максимизации логарифмической полезности (точнее, к задаче нахождения эталонного портфеля) в той же модели, но с другим процессом Леви. Также получена связь между решениями двойственных задач.

Ключевые слова и фразы: степенная полезность, логарифмическая полезность, экспоненциальная модель Леви.

1. Введение и основные результаты. В данной работе мы рассматриваем задачу, в которой агент на финансовом рынке пытается с помощью выбора правильной стратегии поведения максимизировать ожидаемую полезность своего портфеля в конечный момент времени. Эта проблема достаточно много исследовалась в финансовой математике. В случае, когда множество мартингалов мер состоит из одной-единственной меры и рынок является полным, задача была решена, к примеру, в работе [10]. Д. Крамков и В. Шахермайер в [12] исследовали вопрос максимизации ожидаемой полезности в общей модели неполных рынков, где цены активов являются семимартингалами. Вместе с исходной проблемой решалась и двойственная задача, были найдены различные соотношения между решениями этих двух задач.

Одной из наиболее популярных моделей для неполных рынков является экспоненциальная модель Леви. Некоторые результаты для нее были получены, например, в работах [2], [4], [9], [11], [14].

Цель данной статьи состоит в решении задачи максимизации степенной полезности и двойственной к ней в общей экспоненциальной модели Леви при помощи результатов о максимизации логарифмической полезности из [5]. Исследуется связь между этими двумя случаями, из которой вытекают и другие интересные следствия.

Введем модель семимартингалов рынка с одним активом, следуя известным работам [1], [9], [12]. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ непрерывна справа, рассмотрим семимартингал S с действительными неотрицательными значениями, у которого траектории непрерывны справа и имеют предел слева на интервале времени $[0, T]$. Он моделирует дисконтированную цену

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: m_y.ivanov@mail.ru