Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шевцова, Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 622–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:31:29

7. Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces, Probability and analysis (Varenna, 1985). Lecture Notes in Math., v. 1206. Berlin: Springer-Verlag, 1986, p. 167–241.

Поступила в редакцию
13.VI.2006

© 2006 г.

ШЕВЦОВА И. Г.*

УТОЧНЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ АБСОЛЮТНОЙ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ БЕРРИ–ЭССЕЕНА¹⁾

Для абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные моменты третьего порядка, получена оценка $C \leq 0,7056$.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, оценка скорости сходимости.

1. Постановка задачи и ее история. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = 1. \quad (1)$$

$$\beta^3 \equiv \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty. \quad (2)$$

Тогда, согласно неравенству Берри–Эссеена, для равномерного расстояния ρ между функцией распределения $F_n(x)$ нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ и стандартной нормальной функцией распределения $\Phi(x)$ справедлива оценка

$$\rho \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\beta^3}{\sqrt{n}},$$

а C — положительная абсолютная постоянная [9], [10]. История отыскания значения абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена интересна и богата результатами. Так, Э. Берри [9] утверждал, что $C \leq 1,88$, однако, как обнаружил позднее П. Л. Сюй [12], вычисления Берри содержали ошибку. К.-Г. Эссеен [10] показал, что $C \leq 7,59$. Х. Бергстрем [8] показал, что $C \leq 4,8$. К. Такано [14] получил оценку $C \leq 2,031$. По-видимому, работа Такано (опубликованная на японском языке) выпала из поля зрения некоторых исследователей, так как в нескольких более поздних публикациях приводятся немного худшие оценки. В частности, в работе [11] имеется упоминание о неопубликованных вычислениях, дающих $C \leq 2,9$. В работе Д. Л. Уоллеса [15] приведена оценка $C \leq 2,05$. В. Феллер [4], упоминая результат Уоллеса, также обходит вниманием работу Такано. Вычислению наименьшего возможного значения абсолютной постоянной C придавал большое значение А. Н. Колмогоров.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: irina_shevtsova@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-0039906, 05-07-90103.

В работе [2] он высказал предположение о том, что $C = 1/\sqrt{2\pi}$. К сожалению, это предположение оказалось не совсем точным: в 1956 г., решая несколько иную задачу, К.-Г. Эссеен [11] показал, что в (3) постоянная C не может быть меньше, чем

$$C_1 = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0,0107899 \dots$$

Этот результат получен как следствие решения задачи о наименьшей постоянной C_* , обеспечивающей асимптотическую оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_* L_n^3 + o(L_n^3).$$

Эссеен показал, что в рассматриваемой ситуации $C_* = C_1$. Поскольку $C \geq C_*$, была найдена нижняя оценка для C . Однако, как показал Б. А. Рогозин [3],

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{a, b} \frac{\sigma^3 \sqrt{n}}{\beta^3} \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0,3990.$$

Тем самым предположение Колмогорова было в определенном смысле подтверждено.

Тем не менее, наименьшее возможное значение константы C в классическом неравенстве Берри-Эссеена до сих пор неизвестно. В 1966–67 гг. В. М. Золотарев показал, что $C \leq 0,9051$ [1] и $C \leq 0,8197$ [16]. В 1971–72 гг. П. Ван Беек [6], [7], модифицировав метод Золотарева, получил оценку $C \leq 0,7975$. Наконец, в 1982 г. с помощью еще более глубокой модификации того же метода И. С. Шиганов [5] получил оценку $C \leq 0,7655$.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия (1) и (2). Тогда неравенство (3) имеет место с*

$$C \leq 0,7056.$$

Доказательство. В основе доказательства лежит неравенство сглаживания Золотарева [1], [16], улучшенное Ван Бееком [6], [7], а также результат Г. Правитца, который еще в 1972 г. показал, что, если $\varepsilon \leq 0,1$, то $\rho \leq 0,51513 \cdot \varepsilon$ [13]. По-видимому, по какой-то причине этот результат Правитца выпал из поля зрения И. С. Шиганова, соответствующая модификация алгоритма которого позволяет получить оценку, объявленную в формулировке теоремы. Доказательство существенно опирается на вычисления, произведенные при помощи компьютера. Ниже мы опишем лишь ключевые этапы доказательства, формулируя соответствующие утверждения в виде лемм.

Для каждого фиксированного ε и n существует число $D(\varepsilon, n)$, такое, что $\rho \leq D(\varepsilon, n)\varepsilon$, поэтому абсолютная постоянная C из неравенства (3) может быть вычислена как

$$C = \sup_{\varepsilon} D(\varepsilon), \quad D(\varepsilon) = \sup_n D(\varepsilon, n);$$

при этом предполагается, что супремум по всем распределениям с фиксированными ε и n уже взят. Следующая лемма, в которой приводится неравенство сглаживания Золотарева, дает оценку для величины $D(\varepsilon, n)$.

Пусть $p(x) \in L_1$ — некоторая интегрируемая функция. Обозначим ее преобразование Фурье

$$\hat{p}(x) = \int e^{itx} p(t) dt$$

и норму $\|p\| = \int |p(x)| dx$. Для произвольных $x, y > 0$ введем функции

$$V(x) = x \cdot v(x), \quad v(x) = \int_0^x p^+(u) du, \quad p^+(u) = \max\{p(u), 0\},$$

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left| \hat{p}\left(\frac{t}{y}\right) \right| \frac{\delta(t)}{t} dt, \quad \delta(t) = |f_n(t) - e^{-t^2/2}|,$$

где $f_n(t)$ — характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F_n(x)$. Обозначим Λ класс всех непрерывных симметричных функций $p \in L_1$, таких, что $\hat{p} \in L_1$.

Лемма 1 (см. [1]). Для любых $y > 0$, $x > \chi_p$ и $p \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$D(\varepsilon, n) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{V(x)y^{-1} + q(y)}{\varepsilon(4v(x) - \|p\|)},$$

где χ_p — единственный положительный корень уравнения

$$4v(x) - \|p\| = 0$$

(если таковой существует).

Следующая лемма указывает характер зависимости оценки $D(\varepsilon, n)$ от n .

Лемма 2 (см. [1]). 1°. Для $|t| < \sqrt{2n}$

$$\delta(t) \leq \delta_1(t) = e^{-t^2/2} (\exp\{t^2 \tau(|t|, \varepsilon, n)\} - 1),$$

где

$$\tau(|t|, \varepsilon, n) = \frac{\varepsilon|t|}{6} - \frac{n}{t^2} \left[\ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right) + \frac{t^2}{2n} \right].$$

2°. Для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\delta(t) \leq \delta_2(t) = e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} \exp\{k\varepsilon|t|^3\} + 1 \right),$$

где

$$k = 4 \sup_{x>0} \left\{ \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) x^{-3} \right\} \approx 0,396648.$$

3°. Для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\delta(t) \leq \delta_3(t) = 1 + e^{-t^2/2}.$$

Подставляя в функцию $q(y)$ величину

$$\delta_0(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t)\},$$

получаем функцию $q(y, \varepsilon, n)$, зависящую также от ε и n . При этом для $D(\varepsilon, n)$ остается справедливой оценка

$$D(\varepsilon, n) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{V(x)y^{-1} + q(y, \varepsilon, n)}{\varepsilon(4v(x) - \|p\|)} \equiv D(\varepsilon, n, x, y, p),$$

так что мы можем положить при каждом ε и n

$$D(\varepsilon, n) = \inf\{D(\varepsilon, n, x, y, p): y > 0, x > \chi_p, p \in \Lambda\}.$$

Найдем теперь при каждом фиксированном ε супремум по n определенной таким образом функции $D(\varepsilon, n)$. Заметим, что $\beta^3 \geq 1$ в силу моментных условий (1), поэтому супремум нужно брать по $n \geq \max\{1, \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil\}$, где $\lceil x \rceil$ — минимальное целое, превосходящее, либо равное x . Заметим далее, что $D(\varepsilon, n, x, y, p)$ зависит от n только через функцию $\delta_0(t)$, причем монотонно. Из представления

$$\tau(|t|, \varepsilon, n) = \frac{\varepsilon|t|}{6} + \frac{t^2}{4n} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{t^2}{2n} \right)^{r-2},$$

очевидно, вытекает, что $\tau(|t|, \varepsilon, n)$, а значит, и $\delta_1(t)$ монотонно убывает по n при каждом фиксированном ε . Поскольку с ростом n множество, по которому берется минимум

$$\delta_0(t) = \begin{cases} \min\{\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t)\}, & |t| < \sqrt{2n}, \\ \min\{\delta_2(t), \delta_3(t)\}, & |t| \geq \sqrt{2n}, \end{cases}$$

расширяется, величина $\delta_0(t)$, а значит и $D(\varepsilon, n, x, y, p)$, монотонно убывает с ростом n при каждом фиксированном ε . Отсюда вытекает, что $\sup_n D(\varepsilon, n)$ достигается при $n = \max\{1, \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil\}$, так что

$$D(\varepsilon) = D(\varepsilon, \max\{1, \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil\}).$$

Следующая лемма дает возможность оценить второй супремум $C = \sup_{\varepsilon} D(\varepsilon)$ по значениям $D(\varepsilon)$ только в конечном числе точек.

Лемма 3 (см. [1], [5]). Для любых $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$ справедливо соотношение

$$D(\varepsilon) \leq D(\varepsilon_2) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Поскольку равномерное расстояние между двумя функциями распределения не превосходит единицы, для любого ε можно требовать выполнения неравенства $C \cdot \varepsilon \leq 1$, из которого вытекает, что достаточно рассматривать $\varepsilon \leq 1/C < 1,4173$. Кроме того, как показал Правитц в работе [13], $C \leq 0,51513$ при $\varepsilon \leq 0,1$, так что для доказательства теоремы достаточно рассматривать только $\varepsilon \in (0, 1/C]$.

Ядро $p(x)$ выберем таким же, как в работе [5]:

$$p(x) = 0,5(p_1(x + a_1) + p_1(x - a_1) + a_3(p_1(x + a_2) + p_1(x - a_2))),$$

где a_1, a_2, a_3 — действительные числа,

$$p_1(x) = \frac{\sin x}{2\pi x(1 - x^2/\pi^2)}.$$

Преобразование Фурье такого ядра имеет вид

$$\widehat{p}(t) = \widehat{p}_1(t)(\cos(a_1 t) + a_3 \cos(a_2 t)), \quad \widehat{p}_1(t) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi t\right) 1(|t| \leq 1),$$

где $1(\cdot)$ — индикаторная функция. Легко видеть, что функция $p(x)$ симметрична по a_1 и a_2 , поэтому достаточно рассматривать только неотрицательные a_1, a_2 . Кроме того, можно убедиться, что $\chi_p < \infty$ тогда и только тогда, когда $a_3 > -1$. Таким образом, задача минимизации функционала $D(\varepsilon, n, x, y, p)$ свелась к задаче минимизации функции $D(\varepsilon, n, x, y, a_1, a_2, a_3)$ пяти аргументов $x > \chi_p$, $y > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 > -1$ при фиксированных ε и n .

Численная оптимизация проводилась на компьютере с процессором тактовой частоты 3 ГГц. При написании соответствующей программы использовалась библиотека математических функций GNU Scientific Library (GSL) на языке C, версия 1.8, домашняя страница <http://www.gnu.org/software/gsl/>. Вычисление интегралов $\|p\|$, $v(x)$ и $q(y)$ проводилось по квадратурным формулам (для вычисления $\|p\|$ предварительно проводилась замена переменной, переводящая бесконечный интервал интегрирования $(0, \infty)$ в отрезок $[0, 1]$), минимизация — по методу сопряженных градиентов; соответствующие процедуры были взяты из библиотеки GSL.

В ходе оптимизации оказалось, что экстремальные значения функции $D(\varepsilon)$ появляются при $\varepsilon \approx 0,5782$ и $\varepsilon \approx 0,5047$. При этом в качестве x, y, a_1, a_2, a_3 можно взять

а) $\varepsilon = 0,5782$: $x = 7,7968$, $y = 14,8491$, $a_1 = 0,3224$, $a_2 = 4,2565$, $a_3 = 2,2041$, $D(\varepsilon) = 0,705592$;

б) $\varepsilon = 0,5047$: $x = 7,7147$, $y = 16,4049$, $a_1 = 2,3050$, $a_2 = 5,2758$, $a_3 = 0,5176$, $D(\varepsilon) = 0,705593$.

Таким образом, в отличие от работы Шиганова, где супремум $D(\varepsilon)$ достигался при $\varepsilon \rightarrow 0$, в данной работе супремум $D(\varepsilon)$ достигается при ε , отделенных от нуля. Предположение В. М. Золотарева о том, что супремум $D(\varepsilon)$ достигается при $\varepsilon \rightarrow 0$, позволяет надеяться, что расширение класса рассматриваемых ядер p приведет к снижению верхней границы постоянной C как минимум до 0,51513.

В заключение автор выражает искреннюю признательность В. Ю. Королеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
2. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, 1953, № 10, с. 29–38.

3. *Рогозин Б. А.* Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
5. *Шиганов И. С.* Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
6. *van Beek P.* Fourier-analytische Methoden zur Verschärfung der Berry-Esseen Schranke. — Doctoral dissertation, Friedrich Wilhelms Universität, Bonn, 1971.
7. *van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 1972, B. 23, S. 187–196.
8. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 32, p. 37–62.
9. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
10. *Esseen C.-G.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
11. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
12. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
13. *Prawitz H.* Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Skand. Aktuarietidskr., 1972, p. 138–154.
14. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Math., 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15.
15. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 635–654.
16. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry-Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 1967, B. 8, S. 332–342.

Поступила в редакцию
28.VI.2006