Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Задачи оценивания коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. III, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 209–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:55:58

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 45
Выпуск 2, 2000 год
апрель, май, июнь

© 1999 г. ИБРАГИМОВ И. А.*, ХАСЬМИНСКИЙ Р. З.**

ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. III¹⁾

В работе рассматривается задача оценивания функционального параметра $a_0(t, x)$ по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ стохастического дифференциального уравнения в частных производных

$$du_\varepsilon(t) = \sum_{|k| \leq 2p} a_k D_x^k u_\varepsilon dt + f dt + \varepsilon dw(t) = 0.$$

Указываются асимптотически минимаксные оценки для a_0 и асимптотически эффективные оценки для $\Phi(a_0)$ в предположении, что a_0 не зависит от t .

Ключевые слова и фразы: обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, статистическое оценивание, непараметрические задачи оценивания.

III. Оценка коэффициента a_0 при u

Как и в предыдущих частях I, II (см. [1]), мы рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} du_\varepsilon(t, x) &= \sum_{|k| \leq 2p} a_k(t, x) D_x^k u_\varepsilon dt + f(t, x) dt + \varepsilon dw_Q(t) = 0, \\ u_\varepsilon(0, x) &= \varphi(x), \quad B(x, D_x) u_\varepsilon|_{\Gamma_T} = g, \end{aligned} \quad (0.1)$$

и сохраняем все обозначения § 1, ч. I.

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

** Wayne State University, Detroit, USA.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов ONR № 00014-95-1-0793 и NSF DMS 96000245; первый автор получил также поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00-684) и INTAS (гранты 96-4194, 95-0099).

В частности, $|\cdot|_p$ означает норму в $L_p(G)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(G)$; $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ означают скалярное произведение и норму в $\mathcal{L}_2 = L_2([0, T] \times G)$. Если это не вызывает недоразумения, $\|\cdot\|$ может означать и другие нормы. Через C, c обозначаются константы, причем необязательно одни и те же.

В настоящей части III мы считаем известными все элементы a_k, f, ε, Q и т.д. задачи, кроме коэффициента $a_0(t, x)$, который подлежит оцениванию по наблюдению $u_\varepsilon(t, x)$ для всех $(t, x) \in [0, T] \times G$.

Следуя статистической традиции обозначения неизвестного параметра, мы будем ниже вместо $a_0(t, x)$ писать $\theta(t, x)$. Мы всюду предполагаем, что $\theta \in \Theta$, где Θ есть некоторое заданное (известное) множество функций. При этом все $\theta \in \Theta$ удовлетворяют условию Гёльдера и $|\theta|_\infty < \infty$. Как и выше, мы предполагаем выполненными условия регулярности (R) § 1. Из этих условий, в частности, следует, что существует функция Грина $s(t, \tau; x, y)$ задачи с однородными граничными данными. Функция Грина s зависит от неизвестного параметра θ , и, чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы иногда пишем $s(t, \tau; x, y; \theta)$. Условия (R) содержат также неравенства

$$|D_x^\alpha s(t, \tau; x, y; \theta)| \leq C_0 |t - \tau|^{-(d+|\alpha|)/p} \exp \left\{ -c_0 \left(\frac{|x - y|^{2p}}{t - \tau} \right)^{1/(2p-1)} \right\}, \quad c_0 > 0, \quad (\text{R1})$$

и мы ниже считаем, что константы C_0, c_0 в (R1) можно выбрать общими для всех $\theta \in \Theta$. В данной части мы дополним условия (R) двумя следующими требованиями:

$$d < 2p; \quad (\text{R2})$$

$$\begin{aligned} &\text{коэффициенты } a_k, \quad k \neq 0, \quad f \text{ — бесконечно} \\ &\text{дифференцируемые функции } (t, x). \end{aligned} \quad (\text{R3})$$

Условие (R3) может быть, как увидит читатель, сильно ослаблено и принимается лишь для упрощения формулировок.

Наконец, всюду ниже мы считаем, что невозмущенное решение $u_0(t, x) \not\equiv 0$ и даже что найдется $\gamma > 0$ такое, что

$$\sup_t \int_G |u_0(t, x)|^{-\gamma} dx < \infty.$$

§ 7. Свойства решений. Статистики

Пусть выполняются условия (R) кроме условия (R2). Тогда решение $u_0(t, x)$ невозмущенной ($\varepsilon = 0$) задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad B(x, D_x) u|_{\Gamma_T} = g \quad (7.1)$$

существует, единственно и представляется в виде

$$u_0(t, x) = \hat{u}_0(t, x) + \int_G s(t, 0; x, y) \varphi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_G s(t, \tau; x, y) f(\tau, y) dy,$$

где $\hat{u}_0$ есть решение задачи (7.1) с f и φ равными нулю, а s — функция Грина однородной задачи (см. [2]–[4]).

Последнюю формулу можно также записать в виде

$$u_0(t, x) = \hat{u}_0(t, x) + S(t, 0) \varphi + \int_0^t S(t, \tau) f(\tau, \cdot) d\tau,$$

где $S(t, \tau)$ — семейство интегральных операторов с ядром $s(t, \tau; x, y)$.

Решение задачи (0.1) существует, единственно и представимо в виде

$$u_\varepsilon(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau), \quad (7.2)$$

см. ч. I, § 2. В предположении, что $d < 2p$, $u_\varepsilon(t, x)$ есть непрерывное с вероятностью 1 гауссовское случайное поле, см. § 2.

В частности, значения поля $u_\varepsilon(t, x)$ в точках (t, x) являются наблюдаемыми величинами, статистиками. Поэтому если $\varphi(t)$ есть $L_2(G)$ -значная ступенчатая функция, то статистиками будут величины

$$A(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle = \sum_j \langle \varphi(t_j), u(t_{j+1}) - u(t_j) \rangle.$$

Если при этом $\varphi(t), \psi(t) \in D(L^*(t))$ при всех t , то

$$\begin{aligned} A(\varphi) - A(\psi) &= \int_0^T \langle L^*(t) (\varphi(t) - \psi(t)), u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle \varphi(t) - \psi(t), f(t) \rangle dt \\ &+ \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t) - \psi(t), dw_Q(t) \rangle, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |A(\varphi) - A(\psi)|^2 &\leq 3 \left(\int_0^T \mathbf{E} |u_\varepsilon(t)|^2 dt \int_0^T |L^*(t) (\varphi(t) - \psi(t))|^2 dt \right. \\ &\left. + \|\varphi - \psi\|^2 \|f\|^2 + \varepsilon^2 \|Q\| \|\varphi - \psi\|^2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если мы обозначим $H(L)$ гильбертово пространство функций с нормой $(\|\varphi\|^2 + \|L^*\varphi\|^2)^{1/2}$, то статистики

$$A(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle \quad (7.3)$$

определены для всех $\varphi \in H(L)$.

Далее, положим

$$L_1(t) = \sum_{0 < |k| \leq 2p} a_k(t, x) D_x^k.$$

Если $\varphi(t)$ — ступенчатая функция и при всех $t \in [0, T]$ функции $\varphi(t)$ суть бесконечно дифференцируемые функции x , обращающиеся в нуль вне одного и того же компакта $K \subset G$, то

$$B(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) \rangle - \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), L_1^* \varphi(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \varphi(t), f(t) \rangle dt$$

является статистикой. Мы будем записывать ее в виде

$$B(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) - L_1 u_\varepsilon(t) dt - f(t) dt \rangle.$$

В силу определения слабого решения

$$B(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), \theta u_\varepsilon(t) \rangle dt + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi(t), dw_Q(t) \rangle.$$

Поэтому если $\varphi(t), \psi(t)$ две допустимые ступенчатые функции, то

$$\mathbf{E} |B(\varphi) - B(\psi)|^2 \leq 2 \left(|\theta|_\infty \|\varphi - \psi\|^2 \mathbf{E} \|u_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^2 \|Q\| \|\varphi - \psi\|^2 \right).$$

Следовательно, статистики

$$B(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi(t), du_\varepsilon(t) - L_1 u_\varepsilon(t) dt - f(t) dt \rangle \quad (7.4)$$

определены для всех $\varphi \in \mathcal{L}_2$. Более того, те же рассуждения показывают, что статистики $B(\varphi)$ определены для всех случайных неупреждающих $L_2(G)$ -значных функций $\varphi(t)$ таких, что $\mathbf{E} \|\varphi\|^2 < \infty$. Именно статистики (7.4) используются ниже для построения оценок.

§ 8. Асимптотически эффективные оценки. Определение

Всюду ниже в этом параграфе мы предполагаем, что оператор Q имеет ограниченный обратный.

Покажем, что в этом предположении семейство мер $\{\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, отвечающих статистическим экспериментам, порожденным наблюдениями $u_\varepsilon(\cdot; \theta)$, удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности (ЛАН) из [5], см. [5, определение 2.1].

При этом мы будем опираться на следующую формулу для отношения правдоподобия, вытекающую из результатов С. М. Козлова [6]:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\theta+h}^{(\varepsilon)}}{d\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}}(u_\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle Q^{-1/2} h u_\varepsilon, dw \rangle - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |Q^{-1/2} h u_\varepsilon|_2^2 dt \right\}. \quad (8.1)$$

Эта формула справедлива, если $\|hu_\varepsilon\|^2$ конечна с вероятностью 1 по обоим мерам, $\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}$, $\mathbf{P}_{\theta+h}^{(\varepsilon)}$. Обозначим H_0 множество функций $h(t, x)$ таких, что $h(t, x)(u_0(t, x; \theta))^{-1} \in \mathcal{L}_2$. Ясно, что H_0 есть линейное множество, плотное в $\mathcal{L}_2$. Определим операторы $A_\varepsilon: H_0 \rightarrow \mathcal{L}_2$ равенством $A_\varepsilon = \varepsilon Q^{1/2} u_0^{-1}$, где u_0^{-1} означает оператор умножения на функцию $(u_0(t, x; \theta))^{-1}$.

Покажем, что для $h \in H_0$ норма $\|Q^{-1/2} A_\varepsilon h\|$ конечна с вероятностью 1 по мерам $\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}$, $\mathbf{P}_{\theta+A_\varepsilon h}^{(\varepsilon)}$. Действительно,

$$Q^{-1/2} A_\varepsilon h u_\varepsilon(\cdot; v) = \varepsilon u_0(\cdot; v) \frac{h}{u_0(\cdot; \theta)} + \varepsilon \frac{h}{u_0(\cdot; \theta)} \int_0^T S(t, \tau; v) dw(\tau),$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|A_\varepsilon h u_\varepsilon(\cdot; v)\| &\leq \varepsilon \|u_\varepsilon(\cdot; v)\| \|h u_0^{-1}(\cdot; \theta)\| + \varepsilon \|h u_0^{-1}(\cdot; \theta)\| \\ &\quad \times \left[\int_0^T dt \int_0^t \text{tr} S(t, \tau; v) S^*(t, \tau; v) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условий $d < 2p$ и (R1)

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{tr} (S(t, \tau; v) S^*(t, \tau; v)) d\tau &\leq \int_0^t d\tau \int_G \int_G s^2(t, \tau; x, y; v) dx dy \\ &\leq C \text{mes } G \int_0^t |t - \tau|^{-d/(2p)} d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{E} \|Q^{-1/2} A_\varepsilon h u_\varepsilon(\cdot; v)\| < \infty$, и мы можем, пользуясь равенством (8.1), написать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{d\mathbf{P}_{\theta+A_\varepsilon h}^{(\varepsilon)}}{d\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}}(u_\varepsilon(\cdot; \theta)) = \exp \left\{ \int_0^T \langle h, dw(\tau) \rangle - \frac{1}{2} \|h\|^2 + r_\varepsilon \right\}, \quad (8.2)$$

где $r_\varepsilon \rightarrow 0$ по вероятности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Функция $\Delta(h) = \int_0^T \langle h, dw(\tau) \rangle$ есть линейная гауссовская функция на H_0 с $\mathbf{E} |\Delta(h)|^2 = \|h\|^2$, и (8.2) означает, что меры $\{\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}\}$ удовлетворяют условию ЛАН вдоль $\mathcal{L}_2$ с нормирующими операторами A_ε .

Обозначим $R_0(\theta) = R_0$ множество тех $h \in \mathcal{L}_2$, для которых $\theta + \varepsilon u_0^{-1}(\cdot; \theta) h \in \Theta$ при всех $\varepsilon < \varepsilon(h)$, $\varepsilon(h) > 0$. Допустим, что R_0 — линейное множество, и пусть R есть его замыкание в $\mathcal{L}_2$. Обозначим P_R проектор на R . Пусть $\mathcal{B}$ — какая-нибудь топология в R , согласованная с его линейной структурой, и такая, что $A_\varepsilon h \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathcal{B}$ -топологии при всех $h \in R_0$. Назовем такую топологию согласованной с условиями ЛАН.

Пусть $\Phi: \mathcal{L}_2 \rightarrow V$ — функция, принимающая значения в евклидовом или гильбертовом пространстве. Наша задача — оценить значение известной функции Φ в точке θ , $\Phi(\theta)$, по наблюдению u_ε . Точность оценивания измеряется функцией потерь $l(\cdot)$. Мы предполагаем ниже, что l обладает следующими свойствами:

1. $l(v) \geq 0$; 2. $l(v) = l(-v)$; 3. Для всех $\lambda > 0$ множества $V_\lambda = \{v: l(v) < \lambda\}$ — выпуклые.

Мы обозначаем этот класс функций потерь Λ .

Теорема 8.1. Допустим, что функция $\Phi: \mathcal{L}_2 \rightarrow V$ дифференцируема по Фреше и что оператор $K = \Phi'(\theta) Q^{1/2} u_0^{-1}(\cdot; \theta) P_R$ — оператор Гильберта-Шмидта. Пусть $\mathcal{B}$ — какая-либо топология, согласованная с условиями ЛАН, а l — какая-либо функция потерь из Λ . Тогда для любого семейства $\{\Phi_\varepsilon\}$ оценок $\Phi(\theta)$ и любого семейства $\{U\}$ окрестностей точки θ в $\mathcal{B}$

$$\inf_{\{U\}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{v \in U} \mathbf{E}_v^{(\varepsilon)} \left\{ l \left(\varepsilon^{-1} (\Phi_\varepsilon - \Phi(v)) \right) \right\} \geq \mathbf{E} l(\xi), \quad (8.3)$$

где ξ есть гауссовский случайный вектор в V с корреляционным оператором KK^* .

Следствие 8.1. В условиях теоремы

$$\begin{aligned} \inf_U \limsup_{\varepsilon} \sup_{v \in U} \mathbf{E}_v^{(\varepsilon)} \left\| \varepsilon^{-1} (\Phi_\varepsilon - \Phi(v)) \right\|^2 &\geq \text{tr } KK^* \\ &= \text{tr} \left(\Phi'(\theta) Q^{1/2} u_0^{-1} P_R u_0^{-1} Q^{1/2} (\Phi'(\theta))^* \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Теорема 8.1 есть непосредственное следствие условий ЛАН, см. [5].

Оценки Φ_ε , для которых в (8.3) или (8.4) достигается знак равенства, мы будем называть асимптотически эффективными. Такие оценки для ряда задач будут построены ниже, в § 11 (ср. ч. I).

Пример 8.1. Допустим, что параметрическое множество $\Theta \subseteq H = L_2(G)$, т.е. функция $\theta = \theta(x)$ зависит только от x . Предположим далее, что в окрестности θ множество Θ достаточно массивно, например, Θ в пересечении с каким-нибудь H -шаром с центром в θ плотно в этом шаре. В этом случае $R = u_0 H$. Следовательно, $\int_0^T \langle h - P_R h, u_0 g \rangle dt = 0$ для всех $g \in H$, т.е.

$$\int_G g(x) dx \int_0^T \left(h(t, x) - (P_R h)(t, x) \right) u_0(t, x) dt = 0.$$

Поэтому

$$P_R h = u_0(t, x) \frac{\int_0^T h(t, x) u_0(t, x) dt}{\int_0^T u_0^2(t, x) dt} = T(u_0 v_0^2 P_H u_0)(h),$$

где по-прежнему знак функции означает оператор умножения на эту функцию, а $v_0^2(x) = (\int_0^T u_0^2(t, x) dt)^{-1}$.

В условиях примера оператор $K = T \Phi'(\theta) Q^{1/2} v_0^2 P_H u_0$. Неравенство следствия принимает вид

$$\inf_V \limsup_{\varepsilon} \sup_{v \in V} \mathbf{E}_v \left\| \Phi_\varepsilon - \Phi(v) \right\|^2 \geq T^2 \text{tr} \left(\Phi'(\theta) Q^{1/2} v_0^2 P_H u_0^2 P_H v_0^2 Q^{1/2} (\Phi'(\theta))^* \right),$$

а если $Q = I$, то

$$\inf_V \limsup_{\varepsilon} \sup_{v \in V} \mathbf{E}_v \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|^2 \geq \text{tr} \left(\Phi'(\theta) v_0^2 (\Phi'(\theta))^* \right). \quad (8.5)$$

Ниже мы приведем примеры, когда здесь достигается знак равенства.

§ 9. Оценивание θ . Нижние границы точности оценок

И по методам, и по результатам этот параграф чрезвычайно близок § 4, ч. II, и потому соответствующие результаты по большей части лишь формулируются, ибо их доказательства мало отличаются от доказательства соответствующих результатов § 4.

Рассмотрим метрическое пространство (M, ρ) , где множество $M \subseteq \mathcal{L}_2$, а метрика ρ такова, что 1) $\rho(x, y) \geq c \|x - y\|$, $c > 0$; 2) если $\|x - y\| = 0$, то $\rho(x, y) = 0$.

Обозначим $C_\delta(A)$ δ -емкость (по Колмогорову) множества A в (M, ρ) . Как и в § 4, введем пропускную способность $\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta)$ множества Θ , определяя ее аналогично § 4:

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) = \sup I(u_\varepsilon, \theta),$$

где $I(u_\varepsilon, \theta)$ означает количество информации в u_ε относительно θ , причем θ есть случайный процесс, связанный с u_ε задачей (0.1) ($a_0(t, x) = \theta(t, x)$) и независимый от винеровского процесса w_Q из (0.1), а верхняя грань берется по всем θ с реализациями $\theta \in \Theta$.

Теорема 9.1. Пусть параметрическое множество Θ есть подмножество (M, ρ) . Тогда, какова бы ни была оценка θ_ε параметра θ ,

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta \{ \rho(\theta_\varepsilon, \theta) \geq \delta \} \geq 1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) + 1}{C_{2\delta}(\Theta) - 1}. \quad (9.1)$$

Следствие 9.1. Пусть $l(y)$ — монотонно неубывающая неотрицательная функция на $[0, \infty)$. Тогда

$$\sup_\theta \mathbf{E}_\theta l(\rho(\theta_\varepsilon, \theta)) \geq \sup_{\delta > 0} l(\delta) \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) + 1}{C_{2\delta}(\Theta) - 1} \right). \quad (9.2)$$

Доказательство теоремы и следствия см. в § 4. Однако, чтобы использовать (9.1) или (9.2), нам понадобится информация о поведении пропускной способности «канала» (0.1) при «входном сигнале» θ .

Теорема 9.2. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) &\geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \sup_\theta \|u_0(\cdot; \theta)\|_\infty \sup_\theta \|\theta\|^2 + C_0 c(p, d) c_0^{-(2p-1)d/(2p)} \\ &\times \|Q\| \|Q^{-1}\| T^{(2p-d)/(2p)} \sup_\theta \|\theta\|^2 \leq C(\Theta) \varepsilon^{-2} \sup_\theta \|\theta\|^2, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где C_0, c_0 — постоянные из (R1), а $c(p, d)$ зависит лишь от p и d .

Доказательство. Покажем сперва, что информация Шеннона

$$I(u_\varepsilon, \theta) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \mathbf{E} |Q^{-1/2} \theta u_\varepsilon|_2^2 dt = \frac{1}{2\varepsilon^2} \mathbf{E} \|Q^{-1/2} \theta u_\varepsilon\|_2. \quad (9.4)$$

В самом деле, из (8.1) следует, что $(P_0$ означает меру, отвечающую $\theta \equiv 0)$

$$\ln \frac{dP_{u_\varepsilon|\theta}}{dP_0}(u_\varepsilon, \theta) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle Q^{-1/2} \theta u_\varepsilon, dw \rangle + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |Q^{-1/2} \theta u_\varepsilon|_2^2 dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I(u_\varepsilon, \theta) &= \mathbf{E} \left\{ \ln \frac{dP_{u_\varepsilon|\theta}}{dP_{u_\varepsilon} \times dP_\theta}(u_\varepsilon, \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \mathbf{E} |Q^{-1/2} \theta u_\varepsilon|_2^2 dt + \mathbf{E} \ln \frac{dP_0}{dP_{u_\varepsilon}}(u_\varepsilon). \end{aligned}$$

По неравенству Йенсена

$$\mathbf{E} \ln \frac{dP_0}{dP_{u_\varepsilon}}(u_\varepsilon) \leq \ln \mathbf{E} \left\{ \frac{dP_0}{dP_{u_\varepsilon}}(u_\varepsilon) \right\} \leq 0.$$

Неравенство (9.4) доказано.

Запишем теперь решение u_ε в виде (7.2) и подставим это представление в (9.4). Мы найдем

$$I(u_\varepsilon, \theta) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |Q^{-1/2} \theta u_0|_2^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{E} \left| Q^{-1/2} \theta \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau) \right|_2^2 dt.$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \mathbf{E} \left| Q^{-1/2} \theta \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau) \right|_2^2 dt \\ &\leq \|\theta\| \|Q^{-1}\| \mathbf{E} \left\{ \int_0^T dt \int_0^t \text{tr} (\theta S(t, \tau) S^*(t, \tau) \theta) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

В силу (R3)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \text{tr} (\theta S(t, \tau) S^*(t, \tau) \theta) d\tau = \int_0^t d\tau \int_G \int_G |s(t, \tau; x, y)|^2 |\theta(t, x)|^2 dx dy \\ &\leq C_0 \int_0^t d\tau |\theta(t, \cdot)|_2^2 |t - \tau|^{-d/p} \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ -c_0 \left(\frac{|x - y|^{2p}}{t - \tau} \right)^{1/(2p-1)} \right\} dy \\ &\leq C_0 c_0^{-(2p-1)d/(2p)} |\theta(t, \cdot)|_2^2 t^{1-d/(2p)} \\ &\quad \times \frac{2p}{2p-1} \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ -|y|^{2p/(2p-1)} \right\} dy. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 9.3 (ср. с теоремой 5.2). Пусть B — банахово пространство функций $f(t, x)$ такое, что $\|f\|_B \geq k \|f\|$, $k > 0$, и пусть параметрическое множество $\Theta \subseteq B$. Обозначим $b_n(\Theta)$ n -й поперечник по Бернштейну множества Θ в $\mathcal{L}_2$ (см. § 4). Пусть $l(y)$, $y > 0$, — положительная неубывающая функция. Какова бы ни была оценка θ_ε для θ ,

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta l(\|\theta_\varepsilon - \theta\|_B) \geq 2^{-1} l\left(k \frac{b_N}{2}\right), \quad (9.5)$$

где целое число N определяется соотношением $N = \inf\{n: C(\Theta) b_n^2 \varepsilon^{-2} + 1 \leq n/2\}$ и $C(\Theta)$ — постоянная из неравенства (9.3).

Доказательство. Мы выведем (9.5) из (9.2). Без потери общности можно предположить, что максимальные $(n+1)$ -мерные диски из B , вписанные в Θ , имеют центром нуль. Пусть, например, O — единичный шар в B , M_{n+1} есть $(n+1)$ -подпространство B и $B_n(r) = rO \cap M_{n+1}$. Для любого $r < b_n$ можно найти $B_n(r) \subseteq \Theta$. Очевидно, $\sup_\theta \mathbf{E}_\theta l(\|\theta_\varepsilon - \theta\|_B) \geq \sup_{B_n} \mathbf{E}_\theta l(k\|\theta_\varepsilon - \theta\|)$. В силу (9.2)

$$\sup_\theta \mathbf{E}_\theta l(k\|\theta_\varepsilon - \theta\|) \geq \sup_n \sup_\delta l(k\delta) \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(B_n(r)) + 1}{C_{2\delta}(B_n(r); \mathcal{L}_2) - 1}\right). \quad (9.6)$$

Из теоремы 9.2 следует, что

$$\mathcal{C}_\varepsilon(B_n(r)) \leq C(\Theta) \frac{r^2}{\varepsilon^2}. \quad (9.7)$$

Легко видеть, что

$$C_{2\delta}(B_n(r); \mathcal{L}_2) \geq (n+1) \ln \frac{r}{2\delta}. \quad (9.8)$$

Неравенства (9.7) и (9.8) вместе с (9.6) приводят к неравенству теоремы.

Следствие 9.2. Пусть $\Theta \supseteq \Sigma$, где $\Sigma = \Sigma\{a_n\}$ — эллипсоидальный диск в $\mathcal{L}_2$ (см. § 4). Тогда

$$\sup_\Theta \mathbf{E}_\theta l(\|\theta_\varepsilon - \theta\|) \geq \frac{1}{2} l\left((2a_{N+1})^{-1}\right), \quad (9.9)$$

где $N = \min\{n: n \geq 2C(\Theta) a_{n+1}^{-2} \varepsilon^{-2} + 2\}$. В частности,

$$\sup_\theta \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\| \geq \frac{a_{N+1}^{-1}}{4}. \quad (9.10)$$

Доказательство следует из того, что $b_n(\Theta) \geq b_n(\Sigma) = a_{n+1}^{-1}$. Неравенства (9.9), (9.10) позволяют переформулировать на случай оценки коэффициента $\theta = a_0$ примеры § 4, точнее, ту их часть, которая относится к нижним границам точности оценивания.

§ 10. Состоятельное оценивание θ

10.1. В этом параграфе мы построим оценки для θ по наблюдениям $u_\varepsilon(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times G$. Для краткости мы считаем ниже, что свободный член $f(t, x) \equiv 0$ (читатель увидит, что это предположение совсем не умаляет общности), так что u_ε удовлетворяет уравнению

$$du_\varepsilon(t) = L_1 u_\varepsilon(t) dt + \theta u_\varepsilon dt + \varepsilon dw_Q(t), \quad (10.1)$$

снабженному начальными и краевыми условиями.

Более существенно, что ниже мы всюду считаем, что $\theta = \theta(x)$ есть функция только x . Кроме того, для простоты мы ограничимся оценкой $\theta(x)$ лишь в точках x , находящихся на положительном расстоянии от границы. Точнее, пусть g, g_1 суть открытые множества в $\mathbb{R}^d$ и $g \subset \bar{g}_1 \subset G$. Мы будем оценивать $\theta(x)$ для $x \in g$ (ср. § 6).

Естественная оценка для $\theta(x)$

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) (du_\varepsilon(t, x) - L_1 u_\varepsilon(t, x) dt)}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt}$$

заведомо не имеет смысла. Чтобы подправить правую часть этого равенства, мы поступим следующим образом. Пусть φ — какая-нибудь функция из L_2 . Тогда, см. (7.4), статистика

$$\theta_\varepsilon(x; \varphi) = \frac{\int_0^T \langle du_\varepsilon(t) - L_1 u_\varepsilon(t) dt, \varphi \rangle u_\varepsilon(t, x)}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt} \quad (10.2)$$

корректно определена. Запишем $\theta_\varepsilon(x; \varphi)$ в виде

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x; \varphi) &= \frac{\int_G \varphi(y) \theta(y) dy \int_0^T u_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon(t, y) dt}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt} \\ &\quad + \varepsilon \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Если выбрать функцию $\varphi(y)$ имеющей острый максимум в точке x , то первое слагаемое в (10.3) будет хорошо аппроксимировать $\theta(x)$. Второе же слагаемое в (10.3) при фиксированном φ и $\varepsilon \rightarrow 0$ будет сходиться к нулю. Следовательно, можно пытаться построить состоятельную оценку для $\theta(x)$, выбирая в (10.3) $\varphi = \varphi_\varepsilon$ так, что $\varphi_\varepsilon(y) \rightarrow \delta(y - x)$, но настолько медленно, что второе слагаемое в (10.3) еще стремится к нулю. Ниже мы осуществляем этот план.

Запишем $\theta_\varepsilon(x; \varphi) - \theta(x) = \Delta_1 + \Delta_2$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \theta u_\varepsilon, \varphi \rangle dt}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt} - \theta(x), \\ \Delta_2 &= \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Тогда

$$\mathbf{E}_\theta \left| \theta_\varepsilon(x, \varphi) - \theta(x) \right|^2 \leq 2(\mathbf{E}\Delta_1^2 + \mathbf{E}\Delta_2^2), \quad (10.5)$$

и мы оценим по отдельности слагаемые в правой части.

Предварительно нужно условиться о выборе ядра φ . Общий способ подбора таких ядер указан в § 6, ч. II. Ниже, желая опираться на готовые результаты теории приближения целыми функциями конечной степени, мы примем тот же способ построения ядер φ , что и в § 6. Именно, пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, пусть

$$V_\nu(x) = \prod_1^d \frac{\sin(\nu_j x_j/2) \sin(3\nu_j x_j/2)}{\pi \nu_j x_j^2} \quad (10.6)$$

суть ядра Валле-Пуссена (см. [7]). Пусть, далее, $\psi(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, есть финитная бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\psi(y) = 1$, $y \in g$, и $\psi(y) = 0$, $y \notin G$. Оператор $R: f \rightarrow f\psi$ осуществляет гладкое продолжение $f(x)$ с g на $\mathbf{R}^d$. Определим теперь функцию φ равенством

$$\varphi(y) = \varphi_\nu(y; x) = R^* V_\nu(x - y) = V_\nu(x - y) \psi(y).$$

Вектор ν мы ниже выбираем в зависимости от ε и от свойств параметрического множества Θ .

Отметим сразу же, что, как и в § 6, предлагаемый выбор ядер отнюдь не является единственно возможным. Он удобен в теоретических исследованиях, позволяя единообразно получать точные порядки убывания функций риска. В конкретных задачах более целесообразным может оказаться другой выбор ядер.

10.2. Границы для $\mathbf{E}\Delta_1^2$. Положим

$$K_\varepsilon(x, y) = \int_0^T u_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon(t, y) dt.$$

Запишем решение $u_\varepsilon(t, x)$ в виде $u_\varepsilon(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon \xi(t, x)$, где гауссовское случайное поле $\xi(t, x) = \xi(t) = \int_0^t S(t, \tau) dw_Q(\tau)$. Тогда случайное ядро K_ε можно записать в виде

$$K_\varepsilon(x, y) = K_0(x, y) + \varepsilon K_1(x, y) + \varepsilon^2 K_2(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} K_0(x, y) &= \int_0^T u_0(t, x) u_0(t, y) dt, \\ K_1(x, y) &= \int_0^T u_0(t, x) \xi(t, y) dt + \int_0^T u_0(t, y) \xi(t, x) dt, \\ K_2(x, y) &= \int_0^T \xi(t, x) \xi(t, y) dt. \end{aligned}$$

Полагая теперь $v_\varepsilon^2(x) = (\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt)^{-1}$, найдем

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= v_\varepsilon^2(x) \int_G \varphi(y) (K_0(x, y) \theta(y) - K_0(x, x) \theta(x)) dy \\ &\quad + \varepsilon v_\varepsilon^2(x) \int_G \varphi(y) (K_1(x, y) \theta(y) - K_1(x, x) \theta(x)) dy \\ &\quad + \varepsilon^2 v_\varepsilon^2(x) \int_G \varphi(y) (K_2(x, y) \theta(y) - K_2(x, x) \theta(x)) dy \\ &= \Delta_{10}(x) + \varepsilon \Delta_{11}(x) + \varepsilon^2 \Delta_{12}(x). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Лемма 10.1. Пусть $A \subset G$. Если выполнено условие

$$\inf_{x \in A} |u_0(0, x)| = m > 0, \quad (10.8)$$

то для всех $n > 0$

$$\sup_{x \in A} \mathbf{E} v_\varepsilon^{2n}(x) \leq \mathbf{E} \left(\sup_{x \in A} v_\varepsilon^{2n}(x) \right) < \infty. \quad (10.9)$$

Доказательство. Введем функцию

$$I(\rho) = \mathbf{P} \left\{ \int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt < \rho \right\}$$

и изучим ее поведение при $\rho \rightarrow 0$. Очевидно, что

$$I(\rho) < \mathbf{P} \left\{ \int_0^\gamma u_0^2(t, x) dt + 2\varepsilon \int_0^\gamma u_0(t, x) \xi(t, x) dt < \rho \right\}.$$

Выберем здесь $\gamma = 2\rho/m^2$. Тогда

$$I(\rho) < \mathbf{P} \left\{ \left| \int_0^\gamma \xi(t, x) u_0(t, x) dt \right| > \frac{\rho}{2\varepsilon} \right\}.$$

Интеграл $\eta = \int_0^\gamma \xi(t, x) u_0(t, x) dt$ есть гауссова величина со средним нуль и дисперсией

$$\mathbf{E} \eta^2 \leq \int_0^\gamma u_0^2(t, x) dt \int_0^\gamma \mathbf{E} |\xi(t, x)|^2 dt \leq C\rho \|Q\| \int_0^\gamma d\tau \int_G s^2(t, \tau; x, y) dy.$$

В силу (R1) правая часть здесь не больше

$$C\rho \|Q\| \int_0^\gamma d\tau \int_{\mathbf{R}^d} |t - \tau|^{-d/p} \exp \left\{ - \left(\frac{|x|^{2p}}{t - \tau} \right)^{1/(2p-1)} \right\} dx \leq C\rho^{2+\kappa} \|Q\|,$$

$\kappa = 1 - d/(2p) > 0$. Поэтому найдутся такие постоянные $C, c > 0$, что $I(\rho) \leq C \exp\{-c\rho^{-\kappa}\}$.

Из этого неравенства немедленно следует, что $\sup_{x \in A} \mathbf{E} v_\varepsilon^{2n}(x) < \infty$ при всех n .

Все моменты $\mathbf{E} |u_\varepsilon(t, x)|^p$ равномерно ограничены на $[0, T] \times A$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |v_\varepsilon^{2n}(x) - v_\varepsilon^{2n}(y)|^p &\leq C \mathbf{E} \left\{ v_\varepsilon^{2np}(x) v_\varepsilon^{2np}(y) \int_0^T |u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t, y)|^p \right. \\ &\quad \times (1 + |u_\varepsilon(t, x)|^{2np} + |u_\varepsilon(t, y)|^{2np}) dt \Big\} \\ &\leq C \int_0^T \mathbf{E}^{1/2} |u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t, y)|^{2p} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 2.2 ч. I следует, что для некоторого $\kappa > 0$ и всех $p > 0$ справедливо неравенство $\mathbf{E} |v_\varepsilon^{2n}(x) - v_\varepsilon^{2n}(y)|^p \leq C |x - y|^{\kappa p}$. Поэтому для $\alpha < \kappa$ (см. [8])

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{|x-y|<1} \frac{|v_\varepsilon^{2n}(x) - v_\varepsilon^{2n}(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\} < \infty,$$

и, в частности, $\mathbf{E} \sup_{x \in A} v_\varepsilon^{2n}(x) < \infty$. Лемма доказана.

Для функции $f \in L_p(\mathbf{R}^d)$ обозначим $E_\nu^{(p)}(f)$ величину наилучшего приближения функции f целыми функциями конечной степени ν (см. [7]).

Лемма 10.2. *Имеет место неравенство*

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d} dx \left| \int_{\mathbf{R}^d} V_\nu(x - y) f(y) dy - f(x) \right|^p \right)^{1/p} \leq C E_\nu^{(p)}(f), \quad (10.10)$$

где постоянная C зависит лишь от d .

По поводу этой леммы см., например, [7].

Лемма 10.3. *Справедливо неравенство*

$$\left(\int_g dx \left| \int_G \varphi(y; x) f(y) dy - f(x) \right|^p \right)^{1/p} \leq C E_\nu^{(p)}(\psi f). \quad (10.11)$$

Доказательство. По лемме 10.2

$$\begin{aligned} &\int_g \left| \int_G \varphi(y; x) f(y) dy - f(x) \right|^p dx \\ &\leq \int_g \left| \int_{\mathbf{R}^d} V_\nu(x - y) (\psi(y) f(y)) dy - \psi(x) f(x) \right|^p dx \leq C E_\nu^{(p)}(\psi f). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем к оценкам уклонений $\Delta_{1j}(x)$. В силу (10.7) и по лемме 10.3

$$\begin{aligned} \int_g \mathbf{E} |\Delta_{10}(x)|^p dx &\leq \max_x \mathbf{E} |v_\varepsilon^2(x)|^p \\ &\quad \times \int_g dx \left| \int_0^T u_0(t, x) dt \left[\int_G \varphi(y; x) \theta(y) u_0(t, y) dy - \theta(x) u_0(t, x) \right] \right|^p \end{aligned}$$

$$\leq C \max_x \mathbf{E} v_\varepsilon^{2p}(x) \max_x \left(\int_0^T |u_0(t, x)|^{p/(p-1)} dt \right)^{p-1} \times \int_0^T E_\nu^{(p)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) dt. \quad (10.12)$$

Подобным же образом, но с учетом того, что $\mathbf{E} \sup_x v_\varepsilon^{2n}(x) < \infty$, доказывается и неравенство

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{x \in G} |\Delta_{10}(x)|^p \right\} \leq C \max_{t, x} |u_0(t, x)|^p \max_t E_\nu^{(\infty)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) \mathbf{E} \max_x v_\varepsilon^{2p}(x).$$

Чтобы оценить $\mathbf{E} |\Delta_{11}|^p$, заметим сначала, что для любого $p > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |K_1(x, y)|^p \\ & \leq 2^{p-1} \left\{ \mathbf{E} \left| \int_0^T u_0(t, x) \xi(t, y) dt \right|^p + \mathbf{E} \left| \int_0^T u_0(t, y) \xi(t, x) dt \right|^p \right\} \\ & \leq 2^{p-1} \max_x \left(\int_0^T |u_0(t, x)|^{p/(p-1)} dt \right)^{p-1} \\ & \quad \times \int_0^T \max_x \mathbf{E} |\xi(t, x)|^p dt \leq C_p. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Очевидно, что

$$\sup_x \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi(y; x)| dy < \infty. \quad (10.14)$$

Далее, в силу (10.7)

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |\Delta_{11}(x)|^p \leq C \varepsilon^p \\ & \quad \times \mathbf{E} \left\{ v_\varepsilon^{2p}(x) \int_G |\varphi(y)| |K_{11}(x, y) \theta(y) - K_{11}(x, x) \theta(x)|^p dy \right\}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Отсюда и из (10.13), (10.14) следует, что

$$\mathbf{E} |\Delta_{11}(x)|^p \leq C \varepsilon^p (|\theta|_p^p + |\theta|_\infty^p). \quad (10.16)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\mathbf{E} |\Delta_{12}(x)|^p \leq C \varepsilon^{2p} (|\theta|_p^p + |\theta|_\infty^p). \quad (10.17)$$

Оценку (10.16) можно несколько усилить. Именно, в наших предположениях найдется число $\kappa > 0$ такое, что

$$|\theta(x) - \theta(y)| \leq C |x - y|^\kappa, \quad \sup_t |u_0(t, x) - u_0(t, y)| \leq C |x - y|^\kappa.$$

В силу результатов ч. I (теорема 2.2) можно также считать, что $\sup_t \mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^p \leq |x - y|^{\kappa p}$. Из (10.15) следует тогда, что можно подобрать α , $0 < \alpha < 1$, так, чтобы

$$\mathbf{E} |\Delta_{11}(x)|^p \leq C \varepsilon^p \int_{\mathbf{R}^d} V_\nu(x - y) |x - y|^\alpha dy \leq C \varepsilon^p \sum_{j=1}^d \nu_j^{-\alpha}. \quad (10.18)$$

Объединяя все оценки для Δ_{1j} , мы приходим к следующей лемме.

Лемма 10.4. *Имеют место неравенства:*

$$\sup_{x \in g} \mathbf{E} |\Delta_1(x)|^p \leq C \left\{ \sup_t |E_\nu^{(\infty)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi)|^p + (|\theta|_p^p + |\theta|_\infty^p) \times \left(\varepsilon^p \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^{2p} \right) \right\}, \quad p > 0; \quad (10.19)$$

$$\mathbf{E} \int_g |\Delta_1(x)|^p dx \leq C \left\{ \sup_t |E_\nu^{(p)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi)|^p + (|\theta|_p^p + |\theta|_\infty^p) \times \left(\varepsilon^p \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^{2p} \right) \right\}, \quad 0 < p < \infty; \quad (10.20)$$

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{x \in g} |\Delta_1(x)| \right\} \leq C \left\{ \sup_t E_\nu^{(\infty)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) + |\theta|_\infty \left(\varepsilon \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^2 \right) \right\}. \quad (10.21)$$

Постоянная C здесь зависит от всех элементов задачи, кроме θ и ε , а α есть положительное число, зависящее от всех элементов задачи, кроме ε .

10.3. Границы для Δ_2 .

Лемма 10.5. *Для всех $x \in g$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{E} |\Delta_2(x)|^p \leq C_p \varepsilon^p \left(v_0^2(x) \right)^p \left(\|Q\| \nu_1 \cdots \nu_d \right)^{p/2}.$$

Доказательство. Пусть $g(t)$ — вещественнозначная неупреждающая случайная функция. Тогда

$$\mathbf{E} \left| \int_0^T g(t) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right|^2 = |Q^{1/2} \varphi|_2^2 \int_0^T \mathbf{E} |g(t)|^2 dt. \quad (10.22)$$

Для более высоких моментов верно неравенство (см., например, [9, с. 173]),

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left| \int_0^T g(t) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right|^p \\ & \leq \left(\frac{e}{2} \right)^{p/2} p^p |Q^{1/2} \varphi|_2^{p/2} \left(\int_0^T \mathbf{E} |g(t)|^2 dt \right)^{p/2}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Из неравенства (10.23) следует, что

$$\mathbf{E} \left| \int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right|^p \leq C_p |Q|^{p/2} |\varphi|^p.$$

Далее, $|\varphi|_2^2 \leq C \int_{\mathbf{R}^d} |V_\nu(x)|^2 dx \leq C \nu_1 \cdots \nu_d$. Поэтому равномерно по $x \in g$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\Delta_2(x)|^p &\leq \varepsilon^p \mathbf{E}^{1/2} v_\varepsilon^{2p}(x) \mathbf{E}^{1/2} \left| \int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \varphi, dw_Q \rangle \right|^p \\ &\leq C \varepsilon^p (\nu_1 \cdots \nu_d)^{p/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. Из нее немедленно следует

Лемма 10.6. Для всех $2 \leq p < \infty$

$$\mathbf{E} \int_g |\Delta_2(x)|^p dx \leq C \varepsilon^p (\nu_1 \cdots \nu_d)^{p/2}. \quad (10.24)$$

Случай $p = \infty$ несколько сложнее.

Лемма 10.7. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \sup_{x \in g} |\Delta_2(x)| \right\} &\leq C \left[\varepsilon (\nu_1 \cdots \nu_d)^{1/2} \left(\ln(\nu_1 \cdots \nu_d) \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 (\nu_1 \cdots \nu_d)^{1/2} \ln(\nu_1 \cdots \nu_d) \right]. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Доказательство. Запишем $\Delta_2(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_2(x) &= \varepsilon v_0^2(x) \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q \rangle \\ &\quad + \varepsilon (v_\varepsilon^2(x) - v_0^2(x)) \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q \rangle \\ &\quad + \varepsilon v_\varepsilon^2(x) \int_0^T (u_\varepsilon(t, x) - u_0(t, x)) \langle \varphi, dw_Q \rangle \end{aligned} \quad (10.26)$$

и исследуем порознь слагаемые в правой части. Функция $u_0(t, x)$ умножением на $\psi(x)$ продолжается до функции в $\mathbf{R}^d$. Будем обозначать продолженную функцию тоже $u_0(t, x)$. Эта функция имеет равномерно ограниченные производные $\partial u_0 / \partial x_j$, и ее приближение в $\mathbf{R}^d$ целыми функциями степени ν удовлетворяет неравенствам $E_\nu^{(p)}(u_0(t, \cdot)) \leq C \sum_1^d \nu_j^{-1}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Последнее неравенство есть следствие следующего общего результата (см. [7, с. 266]): если $g \in H_p^\beta M$ на $\mathbf{R}^d$, то

$$E_\nu^{(p)}(g) \leq cM \sum_1^d \nu_j^{-\beta_j}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d). \quad (10.27)$$

Пусть теперь

$$g_k(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} V_{2k\nu}(x - y) u_0(t, y) dy, \quad k = 0, 1, \dots$$

В силу леммы 10.2 равномерно по $t \in L_p(\mathbf{R}^d)$ норма $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq c 2^{-k} \sum \nu_j^{-1}$. Случайные функции $\int_0^T [g_k(t, x) - g_{k+1}(t, x)] \langle \varphi, dw_Q \rangle$ являются гауссовскими, и в силу (10.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \int_0^T [g_{k+1}(t, x) - g_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q \rangle \right|^p \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2^{p/2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) |Q|^{1/2} |\varphi|_2^p \left(\int_0^T |g_k(t, x) - g_{k+1}(t, x)|^2 dt \right)^{p/2} \\ \leq C^p p^{p/2} \|Q\|^{p/2} |\varphi|_2^{p/2} T^{(p-2)/2} \int_0^T |g_k(t, x) - g_{k+1}(t, x)|^p dt. \end{aligned}$$

Обозначая $\|\cdot\|_p$ норму в $L_p(\mathbf{R}^d)$, найдем отсюда, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| \int_0^T [g_{k+1}(t, \cdot) - g_k(t, \cdot)] \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_p \\ \leq C \sqrt{p} \|Q\|^{1/2} |\varphi|_2^{1/2} T^{(p-2)/(2p)} \left(\int_0^T \|g_{k+1}(t, \cdot) - g_k(t, \cdot)\|_p^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $\int_0^T [g_{k+1}(t, x) - g_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q \rangle$ есть случайная целая функция степени $2^{k+1}\nu$, и воспользуемся следующим неравенством С.М. Никольского (см. [7, с. 150]): *если $g(x)$ есть целая функция степени ν , то для любого $p < \infty$*

$$\|g\|_\infty \leq 2^d (\nu_1 \cdots \nu_d)^{1/p} \|g\|_p. \quad (10.28)$$

Мы получим тогда, что для любого p

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| \int_0^T [g_{k+1}(t, \cdot) - g_k(t, \cdot)] \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_\infty \\ \leq C \sqrt{p} \|Q\|^{1/2} |\varphi|_2^{1/2} T^{(p-2)/(2p)} 2^{(kd)/p} (\nu_1 \cdots \nu_d)^{1/p} 2^{-k} \sum_1^d \nu_j^{-1}. \end{aligned}$$

Выбирая здесь $p = k + \ln N$, $N = \nu_1 \cdots \nu_d$, найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| \int_0^T u_0(t, \cdot) \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_\infty \\ \leq \mathbf{E} \left\| \int_0^T g_0 \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_\infty \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E} \left\| \int_0^T [g_{k+1} - g_k] \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_\infty \\ \leq C \|\varphi\|_2^{1/2} \sqrt{\ln N} \leq C \sqrt{N \ln N}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Аналогичным образом доказывается, что для любого $p > 0$

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{x \in g} \left| \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right|^p \right\} \leq C \|\varphi\|_2^{p/2} (\ln N)^{p/2}. \quad (10.30)$$

Поэтому на основании леммы 10.1 второе слагаемое в (10.26) допускает оценку

$$\begin{aligned} & \varepsilon \mathbf{E} \left\{ \sup_x \left| v_\varepsilon^2(x) - v_0^2(x) \right| \left| \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right| \right\} \\ & \leq \varepsilon \mathbf{E}^{1/2} \left(\sup_x \left| v_\varepsilon^2(x) - v_0^2(x) \right| \right)^2 \mathbf{E}^{1/2} \left\{ \sup_x \left| \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right|^2 \right\} \\ & \leq C \varepsilon^{1+\gamma} |\varphi|_2^{1/2} (\ln N)^{1/2} \leq C \varepsilon^{1+\gamma} \sqrt{N \ln N}, \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

Чтобы оценить третье слагаемое в (10.26), рассмотрим случайную функцию $\eta(x) = \int_0^T \xi(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle$, считая, что здесь опять $\xi(t, x)$ обозначает продолженную функцию $\psi(x) \xi(t, x)$. Как и выше, представим $\xi(t, x)$ в виде суммы

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \xi_0(t, x) + \sum_{k=0}^{\infty} [\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)], \\ \xi_k(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \xi(t, y) V_{2^k \nu}(x - y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta(x) = \int_0^T \xi_0(t, x) \langle \varphi, dw_Q \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T [\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle.$$

В силу (10.23) для любого $p < \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\| \int_0^T [\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right\|_p \\ & \leq C p |\varphi|_2 \left(\int_{\mathbf{R}^d} dx \left(\int_0^T \mathbf{E} |\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)|^2 dt \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

По теореме 2.2, ч. I, $\mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^2 \leq C |x - y|^\kappa$, $\kappa > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^2 \\ & \leq C \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} \left| \xi(t, x) - \xi \left(t, x + 2^{-k} \left(\frac{y_1}{\nu_1}, \dots, \frac{y_d}{\nu_d} \right) \right) \right|^2 \prod_1^d \frac{\sin^2 y_j}{y_j^2} dy \\ & \leq C 2^{-k\kappa}. \end{aligned}$$

Если, кроме того, $x \notin G$ и $|x|$ достаточно велик, то $\xi(t, x) = 0$ и найдется $c > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} |\xi(t, x) - \xi(t, y)|^2 \leq C \int_{|y| > c|x|} \prod_1^d \frac{\sin^2 y_j}{y_j^2} dy \leq C |x|^{-1} 2^{-k}.$$

Следовательно, для достаточно больших p

$$\mathbf{E} \left\| \int_0^T [\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q \rangle \right\|_p \leq C p |\varphi|_2 2^{-k\alpha},$$

где $\alpha > 0$. Применяя неравенство Никольского (10.28), найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \sup_x \left| \int_0^T [\xi_{k+1}(t, x) - \xi_k(t, x)] \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right| \right\} \\ \leq C p |\varphi|_2 2^{-k\alpha} (2^{kd} \nu_1 \dots \nu_d)^{1/p}. \end{aligned}$$

Возьмем здесь $p = k + \ln N$, $N = \nu_1 \dots \nu_d$. Мы получим тогда, что $\mathbf{E} \left\| \int_0^T \xi(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right\|_\infty \leq C |\varphi|_2 \ln N$. Аналогично доказывается, что и

$$\mathbf{E}^{1/2} \left(\sup_x \left| \int_0^T \xi(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle \right| \right)^2 \leq C |\varphi|_2 \ln N.$$

Следовательно, третье слагаемое в (10.26) не превзойдет $C \varepsilon^2 |\varphi|_2 \ln N$. Лемма доказана.

10.4. Основные результаты. Будем обозначать $\theta_\nu(x)$ оценку для $\theta(x)$, построенную в п. 10.1 с помощью ядра $\psi(y) V_\nu(x - y)$. Из лемм 10.4–10.6 немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 10.1. Пусть выполняются условия (R) введения, и пусть, кроме того, $\inf_{x \in g} |u_0(0, x)| = t > 0$. Тогда для оценки $\theta_\nu(x)$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in g} \mathbf{E}_\theta |\theta(x) - \theta_\nu(x)|^p \leq C \left\{ \sup_t \left(E_\nu^{(\infty)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) \right)^p \right. \\ \left. + |\theta|_\infty^p \left(\varepsilon^p \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^{2p} \right) + \varepsilon^p (\nu_1 \dots \nu_d)^{p/2} \right\}, \quad 0 < p < \infty; \quad (10.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \int_g |\theta(x) - \theta_\nu(x)|^p dx \leq C \left\{ \sup_t \left(E_\nu^{(p)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) \right)^p \right. \\ \left. + |\theta|_\infty^p \left(\varepsilon^p \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^{2p} \right) + \varepsilon^p (\nu_1 \dots \nu_d)^{p/2} \right\}, \quad 0 < p < \infty; \quad (10.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \left\{ \left(\sup_{x \in g} |\theta(x) - \theta_\nu(x)| \right)^p \right\} \\ \leq C \left\{ \sup_t \left(E_\nu^{(\infty)}(u_0(t, \cdot) \theta \psi) \right)^p + |\theta|_\infty^p \left(\varepsilon^p \sum_1^d \nu_j^{-\alpha} + \varepsilon^{2p} \right) \right. \\ \left. + \varepsilon^p \left((\nu_1 \dots \nu_d) \ln(\nu_1 \dots \nu_d) \right)^{p/2} \right. \\ \left. + \varepsilon^{2p} (\nu_1 \dots \nu_d)^{p/2} \left(\ln(\nu_1 \dots \nu_d) \right)^p \right\}. \quad (10.33) \end{aligned}$$

$B(10.31)-(10.33)$ α есть положительное число, зависящее лишь от разности $1 - d/(2p)$.

Опираясь на теорему 10.1, при различных предположениях относительно параметрического множества Θ можно строить оценки θ_ε для θ , обладающие оптимальной по порядку скоростью сходимости к θ в L_p -нормах.

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда Θ есть пространство Никольского $H_p^\beta(G)M$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$. Ниже мы определяем число β из соотношения $\beta^{-1} = \beta_1^{-1} + \dots + \beta_d^{-1}$. Из теорем вложения (см. [7, гл. 6]) следует, что если $\beta p > 1$, то все функции θ из $H_p^\beta M$ удовлетворяют условию Гёльдера положительного порядка $\gamma > 0$.

Теорема 10.2. Пусть выполняются условия (R), пусть также $\inf_{x \in g} |u_0(0, x)| = m > 0$, а оператор Q имеет ограниченный обратный. Положим

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta; g) = \begin{cases} \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta} \mathbf{E} \left(\int_g |\hat{\theta}(x) - \theta(x)|^p dx \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta} \mathbf{E} \left\{ \sup_{x \in g} |\hat{\theta}(x) - \theta(x)| \right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Если $\Theta = H_p^\beta M$ и $\beta p > 1$, то

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta; g) \asymp \begin{cases} \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}, & p < \infty, \\ \left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{2\beta/(2\beta+1)}, & p = \infty. \end{cases} \quad (10.34)$$

Доказательство. Как отмечалось выше, если $\Theta = H_p^\beta M$, то $E_\nu^{(p)}(\theta) \leq c \sum_1^d \nu_j^{-\beta_j}$ равномерно по θ . Следовательно, для оценки $\theta_\varepsilon = \theta_{\nu(\varepsilon)}$, где $\nu_j \asymp \varepsilon^{-2\beta/[\beta_j(2\beta+1)]}$, в силу (10.33) скорость сходимости θ_ε к θ не хуже правой части (10.34).

Если же $\Theta \supseteq H_p^\beta M$, то чтобы получить оценки для Δ_ε снизу, нам достаточно повторить аргументы п. 6.5 § 6 ч. II. Действительно, в основе доказательств п. 6.5 лежит неравенство (4.4) теоремы 4.2. Поэтому чтобы доказать нижние границы в (10.34), можно использовать неравенство (9.1) теоремы 9.1 и оценку для пропускной способности из теоремы 9.3, имеющую ту же зависимость от $|\theta|_2^2$, что и пропускная способность в § 6. Таким образом, все аргументы п. 6.5 остаются в силе и в условиях теоремы 10.2 (для справедливости нижних оценок условия строгой положительности (отрицательности) начальных данных, конечно, не нужны).

Теорема 10.3. Пусть выполнены условия регулярности (R), условие $|u_0(0, x_0)| > 0$, где $x_0 \in G$ — заданная внутренняя точка G , и пусть оператор Q имеет ограниченный обратный. Допустим, что сужение

всех функций из Θ на некоторую фиксированную окрестность точки x_0 совпадает с $H_{\infty}^{\beta} M$ в этой окрестности. Тогда

$$\inf_{\theta_{\varepsilon}} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\theta_{\varepsilon} - \theta(x_0)|^p \asymp \varepsilon^{2\beta p/(2\beta+1)}, \quad (10.35)$$

где нижняя грань берется по всем возможным оценкам θ_{ε} значения $\theta(x_0)$ в точке x_0 .

Доказательство. Оценка θ_{ε} , для которой скорость сходимости к $\theta(x_0)$ совпадает с (10.35), определяется выбором подходящего $\nu = \nu(\varepsilon)$ с помощью (10.31).

Доказательство того, что (10.35) есть правильная нижняя граница, осуществляется восходящим к Б. Левиту методом подбора подходящих однопараметрических кривых в множестве Θ (см., например, [10, гл. IV]). Именно, пусть $f_0(x)$ — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция, пусть $g(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция с $g(0) \neq 0$, скажем, $g(0) = 1$. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$\theta(x; \tau) = f_0(x) + \tau \varepsilon^{\beta \delta} g(\dots, (x_j - x_{j0}) \varepsilon^{-\delta_j}, \dots).$$

Если выбрать здесь $\delta = 2/(2\beta + 1)$, а $\delta_j = 2\beta/[\beta_j(2\beta + 1)]$, то для всех достаточно малых $|\tau|$, $|\tau| \leq \tau_0(M)$, все функции нашего семейства будут принадлежать $H_{\infty}^{\beta} M$. Поэтому

$$\inf_{\theta_{\varepsilon}} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} |\theta_{\varepsilon} - \theta(x_0)|^p \geq \inf_{\theta_{\varepsilon}} \sup_{|\tau| \leq \tau_0} \mathbf{E}_{\tau} |\theta_{\varepsilon} - \theta(x_0; \tau)|^p. \quad (10.36)$$

Считая теперь, что θ принадлежит семейству $\theta(x, \tau)$, рассмотрим задачу оценивания параметра τ по наблюдениям u_{ε} . Из формулы (8.1) для отношения правдоподобия и с учетом равенства $\beta^{-1} = \sum \beta_j^{-1}$ легко следует, что количество информации Фишера однопараметрической задачи $I_{\varepsilon}(\tau) \asymp 1$. Поэтому (см. [10, замечание 2.12.3]) найдется постоянная $c_0 > 0$ такая, что для любой четной и монотонной на положительной полуоси функции потерь l будет выполняться неравенство: какова бы ни была оценка τ_{ε} для τ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\tau| < \tau_0} \mathbf{E}_{\tau} (l(\tau_{\varepsilon} - \tau)) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{|y| < c_0} l(y) e^{-y^2/2} dy. \quad (10.37)$$

По оценке θ_{ε} для $\theta(x_0)$ можно, в частности, сконструировать оценку параметра τ в семействе $\theta(x; \tau)$ с помощью формулы $\tau_{\varepsilon} = [\theta_{\varepsilon} - f_0(x_0)] (g(0))^{-1} \varepsilon^{-2\beta/(2\beta+1)}$. Так как $(\tau_{\varepsilon} - \tau) g(0) = (\theta_{\varepsilon} - \theta(x_0; \tau)) \varepsilon^{-2\beta/(2\beta+1)}$ из (10.36) и (10.37) следует (10.35) (см. детали в [10, § 5, гл. IV]).

10.5. Условие обратимости оператора Q в теоремах 10.2 и 10.3, конечно, требуется лишь для доказательства справедливости нижних оценок. В этом пункте мы, наоборот, предположим, что $\text{tr } Q < \infty$, и

убедимся, что это условие обеспечивает максимально возможную скорость сходимости в L_2 -норме.

Теорема 10.4. Пусть выполнены условия регулярности (R) введения, пусть $g \subseteq G$ и $\inf_{x \in g} |u_0(0, x)| > 0$, и пусть $\text{tr } Q < \infty$. Тогда существует оценка θ_ε функции θ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta \int_g |\theta_\varepsilon(x) - \theta(x)|^2 dx = \text{tr}(v_0 Q v_0) = \text{tr}(Q^{1/2} v_0^2 Q^{1/2}),$$

где знак функции v_0 обозначает оператор умножения на функцию $v_0(x) = (\int_0^T u_0^2(t, x) dt)^{-1/2}$.

Доказательство. Пусть для определенности $g = G$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис в $L_2(G)$. Положим

$$\varphi_n(y; x) = \varphi(y) = \sum_1^n e_j(x) e_j(y)$$

и рассмотрим оценки $\theta_\varepsilon(x; \varphi)$, определенные равенством (10.2). Тогда, см. (10.4),

$$\theta_\varepsilon(x; \varphi) = \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \theta u_\varepsilon, \varphi \rangle dt}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt} + \varepsilon \frac{\int_0^T u_\varepsilon(t, x) \langle \varphi, dw_Q(t) \rangle}{\int_0^T u_\varepsilon^2(t, x) dt} = X_{1n} + X_{2n}.$$

Докажем сперва, что $|X_{1n} - \theta|_2 \rightarrow 0$ с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$. В самом деле, с вероятностью 1 функция $\theta u_\varepsilon(t, \cdot) \in L_2(G)$ и потому с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$: $|\theta u_\varepsilon - \langle \theta u_\varepsilon, \varphi_n \rangle|_2 = |\theta u_\varepsilon - \sum_1^n e_i \langle \theta u_\varepsilon, e_i \rangle|_2 \rightarrow 0$. В силу леммы 10.1 тогда и

$$|X_{1n} - \theta|_2 \leq |v_\varepsilon|_2 \cdot \int_0^T |\langle \theta u_\varepsilon, \varphi_n \rangle - u_\varepsilon \theta|_2^2 dt \rightarrow 0.$$

Определим теперь оценку $\theta_\varepsilon(x)$ равенством

$$\hat{\theta}_\varepsilon(x) = \lim_n \theta_\varepsilon(x; \varphi_n).$$

Чтобы убедиться в корректности этого определения, мы должны еще проверить, что X_{2n} тоже имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Представим для этого $w_Q(t)$ в виде $w_Q(t) = \sum (Q^{1/2} e_i)(x) w_i(t)$, где $w_i(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы, и заметим, что ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_\varepsilon(t, x) dw_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} e_j \langle e_j, Q^{1/2} e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_\varepsilon(t, x) dw_k(t) Q^{1/2} e_k = X(x) \end{aligned}$$

сходится с вероятностью 1 в $L_2(G)$ к функции $X \in L_2(G)$. Эта сходимость следует из сходимости ряда

$$\begin{aligned} & \sum_k \mathbf{E} \left| \int_0^T u_\varepsilon(t, x) dw_Q(t) Q^{1/2} e_k \right|_2^2 \\ &= \sum_k \int_G \left(|Q^{1/2} e_k(x)|^2 \int_0^T \mathbf{E} u_\varepsilon^2(t, x) dt \right) dx \\ &\leq \sup_x \int_0^T \mathbf{E} u_\varepsilon^2(t, x) dt \sum_k |Q^{1/2} e_k|_2^2 = \sup_x \int_0^T \mathbf{E} u_\varepsilon^2(t, x) dt \operatorname{tr} Q. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$X_{2n} = \varepsilon v_\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_\varepsilon(t, x) dw_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} e_i \langle e_j, Q^{1/2} e_k \rangle$$

сходится в $L_2(G)$ с вероятностью 1 к $\varepsilon v_\varepsilon^2 X$. Более того, моменты $\mathbf{E} |X_{2n}|_2^4$ равномерно ограничены и, следовательно, оценки θ_ε несмещенные, а

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta |\theta_\varepsilon - \theta|_2^2 &= \mathbf{E} \left\{ \lim_n |X_{2n}|_2^2 \right\} = \varepsilon^2 \mathbf{E} \left\{ |v_\varepsilon^2 X|_2^2 \right\} = \varepsilon^2 \mathbf{E} \left\{ |v_0^2 X|_2^2 \right\} + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2 \sum_j \langle Q^{1/2} v_0^2 Q^{1/2} e_j, e_j \rangle + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2 \operatorname{tr} (Q^{1/2} v_0^2 Q^{1/2}) + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 \operatorname{tr} (v_0 Q v_0) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства следует, что нормированная разность имеет предельное гауссовское распределение, совпадающее с распределением следующего гауссовского процесса:

$$Y(x) = v_0^2(x) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_0(t, x) dw_k(t) Q^{1/2} e_k. \quad (10.38)$$

Действительно, разность

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(\theta_\varepsilon - \theta) &= v_\varepsilon^2 X \\ &= v_\varepsilon^2(x) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_\varepsilon(t, x) dw_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} e_i \langle e_j, Q^{1/2} e_j \rangle \end{aligned} \quad (10.39)$$

сходится с вероятностью 1 в $L_2(G)$ к (10.38).

§ 11. Асимптотически эффективное оценивание $\Phi(\theta)$

Предположим, как и выше, что $g \subset G$. Пусть $\Phi: L_2(g) \rightarrow V$ есть некоторая функция на $L_2(g)$ со значениями в евклидовом или гильбертовом пространстве V . Как и выше, мы наблюдаем решение $u_\varepsilon(t, x)$, $0 \leq t \leq T$, $x \in G$, задачи (0.1). Проблема заключается в том, чтобы

оценить значение $\Phi(\theta)$ известной функции Φ в точке θ , используя наблюдения $u_\varepsilon(t, x)$. Как и выше, мы предполагаем, что θ зависит только от x . В предыдущем параграфе мы построили состоятельные оценки θ_ε для θ . Очевидно, что если $\Phi(\theta)$ есть непрерывная функция θ , то $\Phi(\theta_\varepsilon)$ будет состоятельной оценкой для $\Phi(\theta)$. Более того, если $\Phi(\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha > 0$, то в условиях теоремы 10.2

$$\mathbf{E}_\theta \|\Phi(\theta) - \Phi(\theta_\varepsilon)\| \leq C \mathbf{E}_\theta |\theta - \theta_\varepsilon|_2^\alpha \leq C \varepsilon^{2\alpha\beta/(2\beta+1)},$$

а в условиях теоремы 10.4 $\mathbf{E}_\theta \|\Phi(\theta) - \Phi(\theta_\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^\alpha$. В этом последнем случае можно сказать много больше, если предположить, что Φ — дифференцируемая функция.

Теорема 11.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 10.4, и пусть θ_ε — оценка для θ , построенная в этой теореме. Пусть функция $\Phi(\theta)$ дифференцируема по Фреше, а ее производная $\Phi'(\theta)$ равномерно непрерывна в Θ . Определим оценку Φ_ε для $\Phi(\theta)$, полагая $\Phi_\varepsilon = \Phi(\theta_\varepsilon)$. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|^2 = \text{tr} \left(\Phi'(\theta) v_0 Q v_0 (\Phi'(\theta))^* \right), \quad (11.1)$$

а нормированная разность $\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta))$ имеет предельное распределение в V , совпадающее с распределением случайной величины $\Phi'(\theta)(Y)$, где $Y \in L_2(g)$ определяется равенством (10.38).

Доказательство. Равномерно в Θ

$$\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta) = \Phi'(\theta) (\theta_\varepsilon - \theta) + o(|\theta_\varepsilon - \theta|_2). \quad (11.2)$$

Следовательно, $\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)) = \Phi'(\theta) (\varepsilon^{-1}(\theta_\varepsilon - \theta)) + o(\varepsilon^{-1}|\theta_\varepsilon - \theta|)$. Отсюда и из (10.37) следует, что $\varepsilon^{-1}(\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta))$ сходится с вероятностью 1 к $\Phi'(\theta)(Y)$. Далее, по (11.2)

$$\varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|^2 = \mathbf{E} \|\Phi'(\theta)(Y)\|^2 + o(1).$$

Корреляционный оператор Y равен $R = v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2$, где, как и выше, знак функции обозначает оператор умножения на эту функцию. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\Phi'(\theta)(Y)\|^2 &= \text{tr} \left(\Phi'(\theta) R (\Phi'(\theta))^* \right) \\ &= \text{tr} \left(\Phi'(\theta) v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2 (\Phi'(\theta))^* \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 11.2. *Пусть выполняются условия регулярности (R) и условие $\inf_{x \in g} |u_0(0, x)| > 0$. Предположим далее, что множество $\Theta \subseteq H_2^\beta(G)$ и $\beta > \frac{1}{2}$. Пусть функция $\Phi(\theta) = K\theta$, где $K: L_2(g) \rightarrow V$ —*

линейный оператор Гильберта-Шмидта. Тогда существует оценка K_ε для K_θ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta \|K_\varepsilon - K_\theta\| = \text{tr} \left(K v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2 K^* \right). \quad (11.3)$$

Эта оценка имеет вид $K\theta_\nu$, где θ_ν — оценки для θ , построенные в предыдущем параграфе, $\nu = \nu(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности можно считать, что K есть оператор из $L_2(g)$ в $L_2(g)$. Определим оценку K_ε величины $K\theta$ равенством $K_\varepsilon = K\theta_\nu$, где выбор $\nu = \nu(\varepsilon)$ будет уточнен позднее;

$$\begin{aligned} K_\varepsilon - K\theta &= K(\theta_\varepsilon - \theta) = K \left(v_\varepsilon^2 \int_0^T u_\varepsilon \langle \theta u_\varepsilon, \varphi_\nu \rangle dt - \theta \right) \\ &+ \varepsilon K \left(v_\varepsilon^2 \int_0^T u_\varepsilon \langle \varphi_\nu, dw_Q \rangle \right) = R_1 + \varepsilon R_2. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Далее, в обозначениях п. 10.3

$$\mathbf{E}_\theta |R_1|_2^2 \leq 3 \left(\mathbf{E}_\theta |K \Delta_{10}|_2^2 + \mathbf{E}_\theta |K \Delta_{11}|^2 + \mathbf{E}_\theta |K \Delta_{12}|_2^2 \right).$$

Так как $\theta \in H_2^\beta$, то $E_\nu^{(2)}(u_0 \theta \psi) \leq \sum_1^d \nu_j^{-\beta_j}$, причем мы выбираем ν_j так, чтобы $\nu_j \asymp N^{-\beta/\beta_j}$, $N = \nu_1 \cdots \nu_d$. В силу (10.12)

$$\mathbf{E}_\theta |K \Delta_{10}|_2^2 \leq \|K\|^2 \mathbf{E} |\Delta_{10}|^2 \leq C \|K\|^2 \left(\sum_1^d \nu_j^{-\beta_j} \right)^2 \leq C \|K\|^2 N^{-2\beta}. \quad (11.5)$$

На основании (10.18)

$$\mathbf{E}_\theta |K \Delta_{11}|_2^2 \leq C \|K\|^2 \varepsilon^2 N^{-\kappa}, \quad (11.6)$$

где κ — положительное число.

В силу (10.17)

$$\mathbf{E} |K \Delta_{12}|_2^2 \leq C \|K\|^2 \varepsilon^4. \quad (11.7)$$

Поэтому, если $N = N(\varepsilon)$ выбрано так, что $N(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\mathbf{E}_\theta |R_1|_2^2 \leq C \left(N^{-2\beta} + o(\varepsilon^2) \right). \quad (11.8)$$

Обращаясь к исследованию члена R_2 , представим его в виде

$$\begin{aligned} R_2 &= K \left[v_0^2 \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi_\nu, dw_Q(t) \rangle \right] \\ &+ K \left[(v_\varepsilon^2 - v_0^2) \int_0^T u_0(t, x) \langle \varphi_\nu, dw_Q(t) \rangle \right] \\ &+ \varepsilon K \left[v_\varepsilon^2 \int_0^T \xi(t, x) \langle \varphi_\nu, dw_Q(t) \rangle \right] = R_{21} + \varepsilon R_{22} + R_{23}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое есть гауссовский процесс, корреляционный оператор которого сходится при $N \rightarrow \infty$ к оператору

$$A = K v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2 K^*.$$

По лемме 10.1

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |R_{22}|_2^2 &\leq C \varepsilon^2 \mathbf{E}^{1/2} \left| \int_0^T u_0(t, \cdot) \langle \varphi_\nu, dw_Q(t) \rangle \right|^4 \\ &\leq C \varepsilon^2 |Q^{1/2} \varphi_\nu|^2 \leq C \varepsilon^2 N. \end{aligned} \quad (11.9)$$

В силу тех же соображений

$$\mathbf{E} |R_{23}|_2^2 \leq C \varepsilon^4 N. \quad (11.10)$$

Соединяя оценки для $\mathbf{E} |R_{2j}|_2^2$, найдем, что

$$\mathbf{E} |R_2|_2^2 = \text{tr } A(1 + o(1)) + O(\varepsilon^2 N). \quad (11.11)$$

Из (11.8) и (11.11) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta |K(\theta_\nu - \theta)|_2^2 &= \mathbf{E}_\theta |R_1 + \varepsilon R_2|_2^2 \\ &= \mathbf{E} |R_1|_2^2 + \varepsilon^2 \mathbf{E} |R_2|_2^2 + O(\varepsilon \mathbf{E}^{1/2} |R_1|_2^2 \mathbf{E}^{1/2} |R_2|_2^2) \\ &= \varepsilon^2 \text{tr } A(1 + o(1)) + O(N^{-2\beta} + \varepsilon^4 N) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Произведем теперь окончательный выбор $\nu(\varepsilon)$, полагая $N \sim \varepsilon^{-4/(2\beta+1)}$. Поскольку $\beta > \frac{1}{2}$, мы получим, что $\mathbf{E}_\theta |K_\varepsilon - K\theta|_2^2 = \varepsilon^2 \text{tr } A + o(\varepsilon^2)$. Теорема доказана.

Если оператор $Q = I$, то оператор $A = K v_0^2 K^*$, и основной результат теоремы принимает такой вид: $\lim_\varepsilon \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta |K_\varepsilon - K\theta|_2^2 = \text{tr } (K v_0^2 K^*)$.

Объединяя это равенство с неравенством (8.5), мы придем к следующему результату.

Следствие 11.1. Если в условиях теоремы 11.2 оператор $Q = I$, а параметрическое множество $\Theta = H_2^\beta(g) M$ для каких-нибудь M и $\beta > \frac{1}{2}$, то оценка K_ε теоремы 10.2 асимптотически эффективна.

Теорема 11.3. Пусть выполняются условие регулярности (R) и условие $\inf_{x \in g} |u_0(0, x)| > 0$. Предположим, что функция $\Phi(\theta)$ дифференцируема по Фреше, причем производная $\Phi'(\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α , $\|\Phi'(\theta_2) - \Phi'(\theta_1)\| \leq C |\theta_2 - \theta_1|_2^\alpha$. Предположим также, что $\Phi'(\theta)$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Пусть параметрическое множество $\Theta \subseteq H_2^\beta(g) M$, причем $\beta \geq \frac{1}{2} + 1/(2\alpha)$. Тогда существует оценка Φ_ε функции $\Phi(\theta)$ такая, что

$$\lim_\varepsilon \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\theta \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|^2 = \text{tr} \left(\Phi'(\theta) v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2 (\Phi'(\theta))^* \right).$$

В частности, если $\Theta = H_2^\beta(g) M$, а $Q = I$, то оценка Φ_ε — асимптотически эффективная оценка $\Phi(\theta)$.

Доказательство. Как и выше, рассмотрим оценку θ_ν , где выбор $\nu = \nu(\varepsilon)$ будет уточнен позднее, и положим $\Phi_\varepsilon = \Phi(\theta_\nu)$. Тогда

$$\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta) = \Phi'(\theta)(\theta_\nu - \theta) + O(|\theta_\nu - \theta|^{1+\alpha}),$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|_2^2 &= \mathbf{E}_\theta \|\Phi'(\theta)(\theta_\nu - \theta)\|^2 + O(\mathbf{E}_\theta |\theta_\nu - \theta|_2^{2+2\alpha}) \\ &\quad + O(\mathbf{E}^{1/2} \|\Phi'(\theta)(\theta_\nu - \theta)\|^2 \mathbf{E}_\theta^{1/2} |\theta_\nu - \theta|_2^{1+\alpha}). \end{aligned}$$

Поведение первого члена в правой части было исследовано при доказательстве предыдущей теоремы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\Phi'(\theta)(\theta_\nu - \theta)\|^2 &= \varepsilon^2 \text{tr} \left(\Phi'(\theta) v_0^2 \int_0^T u_0(t, \cdot) Q u_0(t, \cdot) dt v_0^2 (\Phi'(\theta))^* \right) \\ &\quad + O(N^{-2\beta} + \varepsilon^4 N) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что $\mathbf{E}_\theta |\theta_\nu - \theta|_2^{2+2\alpha} \leq C(N^{-2\beta(1+\alpha)} + \varepsilon^{2(1+\alpha)} N^{1+\alpha})$. Выбирая $N \sim \varepsilon^{-2(1+\alpha)/(2\beta+\alpha+1)}$ и учитывая, что $\beta > \frac{1}{2} + 1/(2\alpha)$, приходим к утверждению теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Задачи оценивания коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 417–438; 1999, т. 44, в. 3, с. 526–554.
2. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964, 443 с.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968, 427 с.
4. Егоров Ю., Шубин М. (ред.) Дифференциальные уравнения в частных производных. VI. Итоги науки и техники, совр. пробл. матем., фонд. напр., т. 63. М.: ВИНТИ, 1990.
5. Ibragimov I. A., Khas'minskii R. Z. Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 4, p. 1681–1724.
6. Козлов С. М. Некоторые вопросы стохастических уравнений в частных производных. — Труды семин. им. И. Г. Петровского, 1978, в. 4, с. 147–172.
7. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969, 480 с.
8. Ибрагимов И. А. Об условиях гладкости траекторий случайных функций. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 2, с. 229–250.
9. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.
10. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.

Поступила в редакцию
9.XII.1997