Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. II. Функциональные предельные теоремы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 1, 25–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:15:17

© 2015 г.

ВАТУТИН В. А.*

СТРУКТУРА РАЗЛОЖИМЫХ РЕДУЦИРОВАННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ. II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ¹⁾

Рассматривается строго критический разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц, занумерованными символами $1, 2, \dots, N$, в котором частицы типа i могут производить потомков лишь типов $j \geq i$. Доказаны функциональные предельные теоремы, описывающие структуру редуцированного процесса, порожденного исходным процессом, а также найдены распределения момента рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в популяции в далекий момент n , и типа частицы, являющейся ближайшим общим предком.

Ключевые слова и фразы: редуцированные процессы, расстояние до ближайшего общего предка, условные функциональные предельные теоремы.

1. Введение и основные результаты. В данной работе, дополняющей статью [6], мы будем рассматривать ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц, занумерованными числами $1, 2, \dots, N$. Обозначим $\eta_{i,j}$ число непосредственных потомков типа j , произведенных частицей типа i в момент ее гибели. Как и в [6], мы будем иметь дело с разложимым процессом Гальтона–Ватсона и, более того, будем предполагать, что $m_{i,j} = \mathbf{E}[\eta_{i,j}] = 0$, если $j < i$. Таким образом, частицы типа i анализируемого процесса могут порождать лишь потомков типов $j \geq i$.

В такой ситуации производящая функция закона распределения числа потомков частицы типа i явно зависит лишь от $N - i + 1$ аргументов:

$$h_i(s_1, \dots, s_N) = \mathbf{E}[s_1^{\eta_{i,1}} \dots s_N^{\eta_{i,N}}] = \mathbf{E}[s_i^{\eta_{i,i}} \dots s_N^{\eta_{i,N}}], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Будем говорить, что справедлива **гипотеза А**, если разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N типами частиц является строго критическим, т.е.

$$m_{i,i} = \mathbf{E}[\eta_{i,i}] = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

¹⁾ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

и, кроме того, $m_{i,j} = 0$ при $j < i$,

$$m_{i,i+1} = \mathbf{E}[\eta_{i,i+1}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

и

$$\mathbf{E}[\eta_{i,j}\eta_{i,k}] < \infty, \quad i = 1, \dots, N, \quad k, j = i, i+1, \dots, N, \quad (4)$$

причем

$$b_i = \frac{1}{2} \mathbf{D}[\eta_{i,i}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Пусть

$$\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_N(n))$$

— вектор, задающий число частиц различных типов в процессе в момент $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, а

$$\mathbf{Z}(m, n) = (Z_1(m, n), \dots, Z_N(m, n))$$

— вектор, задающий число частиц различных типов в соответствующем редуцированном процессе в момент n , в котором величина $Z_i(m, n)$ — это число частиц типа i , существующих в процессе $\mathbf{Z}(\cdot)$ в момент $m < n$ и имеющих непустое потомство в момент n . При этом $Z_i(n, n) = Z_i(n)$.

В дальнейшем, если не оговорено иное, мы считаем, что $\mathbf{Z}(0) = (1, 0, \dots, 0)$, т.е. что эволюция процесса начинается в момент $n = 0$ с одной частицы типа 1.

Положим $\gamma_0 = 0$, $\gamma_i = \gamma_i(N) = 2^{-(N-i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, и пусть $\xi^{(i)}(j)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots$, — набор независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых

$$\mathbf{E}[s^{\xi^{(i)}(j)}] = 1 - \sqrt{1-s}.$$

Используя этот набор, мы определим на полуинтервале $0 \leq t < 1$ разложимый кусочно постоянный ветвящийся процесс $\mathbf{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_N(t))$ с непрерывным временем и N типами частиц, где $R_i(t)$ — число частиц типа i в момент t .

Ветвящийся процесс $\mathbf{R}(t)$ начинается в момент $t = \gamma_0 = 0$ с одной частицы типа 1, которая живет, не производя потомства, вплоть до момента $\gamma_1 = 2^{-(N-1)}$ (но не включая этот момент). Далее, если $\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, то

$$R_k(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{R_i(\gamma_i-0)} \xi^{(i)}(j), & \text{если } k = i+1; \\ 0, & \text{если } k \neq i+1. \end{cases}$$

Таким образом, в промежутке $\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}$ популяция состоит только из частиц типа $i + 1$. Эти частицы появились в момент $\gamma_i - 0$ и были порождены частицами типа i , которые в промежутке времени $\gamma_{i-1} \leq t < \gamma_i$ не производили потомков.

Для $0 \leq t \leq 1$ введем функцию

$$g_n(t) = 1_{\{0 \leq t < \gamma_1\}} + g_n 1_{\{\gamma_1 \leq t < 1\}},$$

где g_n — монотонно возрастающая последовательность такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\varepsilon} g_n = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

В работе [6] показано, что конечномерные распределения условного процесса $\{(\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n), 0 \leq t < 1) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям процесса $\{\mathbf{R}(t), 0 \leq t < 1\}$. Здесь и далее мы условимся понимать $\mathbf{Z}(x, n)$ как $\mathbf{Z}([x], n)$, где $[x]$ — целая часть числа x .

В данной работе мы усилим указанный результат и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если справедлива гипотеза А, то для любого $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ при $n \rightarrow \infty$*

$$\{(\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n), \gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \implies \{\mathbf{R}(t), \gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}\},$$

где символ $\implies$ обозначает сходимость в пространстве $D_{[a,b]}(\mathbb{Z}_+^N)$ функций $\mathbf{x}(t)$, $a \leq t < b$, без разрывов второго рода со значениями в пространстве $\mathbb{Z}_+^N$, оснащенном топологией Скорохода.

Нестрого говоря, теорема 1 показывает, что в условном редуцированном процессе $\{\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$ фазовый переход от типа i к типу $i + 1$ происходит в момент n^{γ_i} . Природа этого фазового перехода детализирована в приводимой ниже теореме 2, формулировка которой требует дополнительных обозначений.

Для $1 \leq i \leq N - 1$ положим

$$c_{i,N} = \left(\frac{1}{b_N}\right)^{1/2^{N-i}} \prod_{j=i}^{N-1} \left(\frac{m_{j,j+1}}{b_j}\right)^{1/2^{j-i+1}} \quad \text{и} \quad c_{N,N} = \frac{1}{b_N}. \quad (6)$$

Как и в [6], введем набор

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i(y) &= (U_{i,1}(y), \dots, U_{i,N}(y)), & 0 \leq y < \infty, & \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \mathbf{U}_N(x) &= (U_{N,1}(x), \dots, U_{N,N}(x)), & 0 \leq x < 1, \end{aligned}$$

марковских процессов с непрерывным временем. Если $1 \leq i \leq N - 1$, то $U_{i,j}(y) \equiv 0$, $0 \leq y < \infty$, $j \neq i, i + 1$, в то время как пара

$$(U_{i,i}(y), U_{i,i+1}(y)), \quad 0 \leq y < \infty,$$

образует однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и частицами типов i и $i + 1$. Этот процесс с двумя типами частиц начинается в момент времени $y = 0$ со случайного числа $U_{i,i}(0) = R_i$ частиц типа i , причем

$$\mathbf{E}[s_i^{R_i}] = \mathbf{E}[s_i^{U_{i,i}(0)}] = 1 - (1 - s_i)^{1/2^{i-1}} \quad (7)$$

(в частности, $U_{1,1}(0) = 1$ с вероятностью 1). Распределение длительности жизни частиц типа i является экспоненциальным с параметром $2b_i c_{i,N}$. В момент гибели частица типа i порождает (независимо от поведения других частиц и предыстории этого процесса) либо две частицы своего типа, либо одну частицу типа $i + 1$ (каждое событие происходит с вероятностью $1/2$). Частицы типа $i + 1$ процесса $\mathbf{U}_i(\cdot)$ бессмертны и не дают потомства.

В N -мерном процессе $\mathbf{U}_N(x)$, $0 \leq x < 1$, все компоненты, кроме последней, равны нулю, а компонента $U_{N,N}(\cdot)$ является неоднородным по времени марковским ветвящимся процессом с одним типом частиц. Этот процесс стартует в момент времени $x = 0$ со случайного числа $U_{N,N}(0) = R_N$ частиц типа N , где

$$\mathbf{E}[s_N^{R_N}] = \mathbf{E}[s_N^{U_{N,N}(0)}] = 1 - (1 - s_N)^{1/2^{N-1}}. \quad (8)$$

Продолжительность жизни каждой из R_N первоначальных частиц типа N имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. В момент гибели каждая частица порождает ровно двух потомков типа N и ничего более. Если x — момент гибели частицы-родителя, то продолжительность жизни каждого ее потомка имеет равномерное распределение на отрезке $[x, 1]$ (независимо от поведения других частиц и предыстории этого процесса). В момент гибели каждая частица процесса порождает ровно две частицы типа N и т.д.

В работе [6] показано, что если справедлива гипотеза А, а l_n — монотонно убывающая последовательность такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\varepsilon l_n = \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0,$$

то при $n \rightarrow \infty$

1) для каждого $i = 1, \dots, N - 1$ конечномерные распределения условного процесса

$$\{(\mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y < \infty) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$$

сходятся к конечномерным распределениям процесса $\{\mathbf{U}_i(y), 0 \leq y < \infty\}$;

2) конечномерные распределения условного процесса

$$\{(\mathbf{Z}((x + l_n)n, n), 0 \leq x < 1) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$$

сходятся к конечномерным распределениям процесса $\{\mathbf{U}_N(x), 0 \leq x < 1\}$.

В следующей теореме мы уточняем упомянутые утверждения.

Теорема 2. Если справедлива гипотеза А, то при $n \rightarrow \infty$

1) для каждого $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\{(\mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y < \infty) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \implies \{\mathbf{U}_i(y), 0 \leq y < \infty\};$$

$$2) \{(\mathbf{Z}((x + l_n)n, n), 0 \leq x < 1) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} \implies \{\mathbf{U}_N(x), 0 \leq x < 1\}.$$

Важной характеристикой редуцированного процесса является момент β_n рождения ближайшего общего предка всех частиц, присутствующих в популяции в момент n , определяемый равенством

$$\beta_n = \max \{m \leq n - 1: Z_1(m, n) + Z_2(m, n) + \dots + Z_N(m, n) = 1\}.$$

Основываясь на результатах теорем 1 и 2, мы даем в следующей теореме ответ на еще один важный вопрос: каково асимптотическое распределение момента рождения ближайшего общего предка в популяции, не вымершей к далекому моменту n ?

Теорема 3. Пусть справедлива гипотеза А. Тогда

1) имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\beta_n \ll n^{\gamma_1} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = 0;$$

2) если $y \in (0, \infty)$, то для $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\beta_n \leq yn^{\gamma_i} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = 1 - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^i} e^{-2b_i c_i N y};$$

3) для $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\beta_n \ll n^{\gamma_i} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}; \quad (9)$$

3а) для $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n^{\gamma_i} \ll \beta_n \ll n^{\gamma_{i+1}} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = 0; \quad (10)$$

4) для любого $x \in (0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\beta_n \leq xn \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = 1 - \frac{1}{2^{N-1}} (1 - x).$$

З а м е ч а н и е. Как видно из (10), существуют промежутки времени возрастающих порядков, в каждом из которых вероятность найти ближайшего общего предка популяции, выжившей до момента $n \rightarrow \infty$, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью невырождения популяции к этому моменту. Более того, эти временные промежутки отделены друг от друга временными интервалами возрастающих порядков, внутри каждого из которых вероятность найти ближайшего общего

предка положительна. Такое явление не имеет аналогов для неразложимых ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона.

Наряду с распределением момента рождения ближайшего общего предка, нас будет интересовать тип ζ_n ближайшего общего предка популяции, не выродившейся к моменту n . Распределение этой случайной величины описано в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть справедлива гипотеза А. Тогда для $i = 1, 2, \dots, N$

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_n = i \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = \frac{1}{2^i} (1 - \delta_{i,N}) + \frac{1}{2^{N-1}} \delta_{i,N},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Заметим, что $p_{N-1} = p_N$.

Структура основной части статьи выглядит следующим образом. Раздел 2 содержит формулировки некоторых известных результатов, описание ряда свойств предельных процессов и формулировки необходимых утверждений из работы [6] о сходимости конечномерных распределений допредельных процессов к предельным. Раздел 3 содержит доказательства теорем 1 и 2. Наконец, раздел 4 посвящен доказательству теорем 3 и 4.

2. Вспомогательные результаты. Для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p) \in [0, 1]^p$ (размерность p которого будет обычно ясна из контекста) и вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ с целыми неотрицательными координатами положим

$$\mathbf{s}^{\mathbf{k}} = s_1^{k_1} \cdots s_p^{k_p}.$$

Пусть $\mathbf{e}_i$ — N -мерный вектор, i -я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю, а $\mathbf{1}^{(i)}$ — вектор размерности i , все компоненты которого равны единице.

Введем вероятностную производящую функцию

$$H_n^{(i,N)}(\mathbf{s}) = \mathbf{E} [\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(n)} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i] = \mathbf{E} [s_i^{Z_i(n)} \cdots s_N^{Z_N(n)} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i]$$

процесса $\mathbf{Z}(n)$ при условии, что этот процесс начался в нулевой момент времени с одной частицы типа i , и пусть

$$Q_n^{(i,N)}(\mathbf{s}) = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{s}), \quad Q_n^{(i,N)} = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{0}),$$

$$m_{i,j}(n) = \mathbf{E} [Z_j(n) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i],$$

$$b_{j,k}(n) = \mathbf{E} [Z_j(n)(Z_k(n) - \delta_{j,k}) \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_j].$$

В дальнейших рассуждениях важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{Z}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, — строго критический разложимый ветвящийся процесс, удовлетворяющий гипотезе А. Тогда $m_{j,j}(n) = 1$ и при $n \rightarrow \infty$

$$m_{i,j}(n) \sim a_{i,j}n^{j-i}, \quad i < j; \quad b_{j,k}(n) \sim \hat{a}_{j,k}n^{k-j+1}, \quad j \leq k, \quad (11)$$

где $a_{i,j}$ и $\hat{a}_{j,k}$ — положительные константы, явный вид которых известен (см. [5, теорема 1]).

Кроме того (см. [4, теорема 1]), при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n^{(i,N)} = 1 - H_n^{(i,N)}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \sim c_{i,N}n^{-1/2^{N-i}}, \quad (12)$$

где константы $c_{i,N}$ те же, что и в (6).

Положим $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1$ и обозначим

$$T_i = \min \{n \geq 1: Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_i(n) = 0\}$$

момент вырождения популяции, порожденной частицами первых i типов. Согласно (12),

$$Q_n^{(1,i)} = \mathbf{P}(T_i > n) \sim c_{1,i}n^{-2^{-(i-1)}}. \quad (13)$$

Ниже нам понадобятся некоторые свойства процессов $\mathbf{R}(\cdot)$ и $\mathbf{U}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, N$, установленные в работе [6].

Из определения процесса $\mathbf{R}(t)$ следует, что если

$$\gamma_i \leq t_1 < \dots < t_p < \gamma_{i+1}$$

для некоторого $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, а $\mathbf{S}_l = (s_{l,1}, \dots, s_{l,N}) \in [0, 1]^N$, то

$$\mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{S}_l^{\mathbf{R}(t_j)} \right] = 1 - \left(1 - \prod_{l=1}^p s_{l,i+1} \right)^{1/2^i}.$$

Положим

$$\overline{X}_{R_i}(y; \mathbf{s}) = \mathbf{E}_{R_i} [\mathbf{s}^{\mathbf{U}_i(y)}] = \mathbf{E}_{R_i} [s_i^{U_{i,i}(y)} s_{i+1}^{U_{i,i+1}(y)}] = \overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}),$$

где выражение $\mathbf{E}_{R_i}[\cdot]$ обозначает, что процесс стартовал со случайного числа частиц R_i типа i с распределением (7). Как отмечено в [6],

$$\overline{X}_{R_i}(y; s_i, s_{i+1}) = 1 - (\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}))^{1/2^{i-1}},$$

где

$$\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}) = \sqrt{1 - s_{i+1}} \frac{(1 - s_i) + \sqrt{1 - s_{i+1}} \tanh(b_i c_{i,N} y \sqrt{1 - s_{i+1}})}{(1 - s_i) \tanh(b_i c_{i,N} y \sqrt{1 - s_{i+1}}) + \sqrt{1 - s_{i+1}}} \quad (14)$$

при $(s_i, s_{i+1}) \in [0, 1]^2$, причем $\varphi_i(y; 1, 1) = 0$ и

$$\varphi_i(y; s_i, 1) = \frac{1 - s_i}{b_i c_{i,N} y (1 - s_i) + 1}.$$

Пусть

$$\overline{G}_{R_N}(x; s) = \mathbf{E}_{R_N} \left[s^{U_{N,N}(x)} \right].$$

Оказывается, что (см. [6])

$$\overline{G}_{R_N}(x; s) = 1 - (\psi(x; s))^{1/2^{N-1}},$$

где

$$\psi(x; s) = \frac{1}{x + (1-x)/(1-s)}, \quad s \in [0, 1], \quad x \in [0, 1].$$

При доказательстве теорем 1 и 2 будет использован ряд утверждений, установленных в работе [6], которые нам будет удобно собрать вместе. Всюду при этом предполагается, что справедлива гипотеза А.

Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$, а $\mathbf{S}_l = (s_{l,1}, \dots, s_{l,N})$, $l = 1, 2, \dots, p$.

1) Если $m \ll n^{\gamma_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathbf{Z}(m, n) = \mathbf{e}_i \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) = 1. \quad (15)$$

2) Если для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$

$$n^{\gamma_i} \ll m_l \ll n^{\gamma_{i+1}}, \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{S}_l^{\mathbf{Z}(m_l, n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right] = 1 - \left(1 - \prod_{l=1}^p s_{l,i+1} \right)^{1/2^i}. \quad (16)$$

3) Если $m \sim (y + l_n) n^{\gamma_i}$, $y \in [0, \infty)$, для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m, n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] = 1 - (\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}))^{1/2^{i-1}}. \quad (17)$$

4) Если $m \sim (x + l_n) n$, $x \in [0, 1)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m, n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] = 1 - (\psi(x; s_N))^{1/2^{N-1}}. \quad (18)$$

Пусть

$$\begin{aligned} J_{m,n}^{(k,N)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(m,n)} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_k \right], \\ \mathbf{J}_{m,n}(\mathbf{s}) &= \left(J_{m,n}^{(1,N)}(\mathbf{s}), \dots, J_{m,n}^{(N,N)}(\mathbf{s}) \right). \end{aligned}$$

Для $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_p \leq n$ положим $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_p)$ и обозначим $\Delta_i = m_i - m_{i-1}$. Пусть далее

$$\begin{aligned} \hat{J}_{m_0, m_1, \dots, m_p, n}^{(i, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) &= \hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(i, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{l=1}^p \mathbf{S}_l^{\mathbf{Z}^{(m_l, n)}} \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{e}_i \right] \end{aligned}$$

и

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) = \left(\hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p), \dots, \hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(N, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) \right).$$

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ положим $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_N y_N)$.

Следующая лемма является очевидным уточнением следствия 2 работы [7].

Лемма 1. Для любого набора $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_p \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p) &= \hat{J}_{m_0, m_1, n}^{(1, N)} \left(\mathbf{S}_1 \otimes \hat{\mathbf{J}}_{m_1, m_2, \dots, m_p, n}(\mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_p) \right) \\ &= J_{\Delta_1, n-m_0}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{\Delta_2, n-m_1}(\mathbf{S}_2 \otimes \dots (\mathbf{S}_{p-1} \otimes \mathbf{J}_{\Delta_p, n-m_{p-1}}(\mathbf{S}_p)) \dots)). \end{aligned}$$

В частности, если $\mathbf{m} = (0, m_1, m_2)$, то

$$\hat{J}_{\mathbf{m}, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = J_{m_1, n}^{(1, N)}(\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{J}_{\Delta_2, n-m_1}(\mathbf{S}_2)),$$

а если $\mathbf{m} = (m_0, m_1)$, то

$$\hat{J}_{m_0, m_1, n}^{(j, N)}(\mathbf{s}) = J_{\Delta_1, n-m_0}^{(j, N)}(\mathbf{s}) = 1 - \frac{1 - H_{\Delta_1}^{(j, N)}(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-m_1})}{Q_{n-m_0}^{(j, N)}}. \quad (19)$$

Лемма 2. Если $m_0 = (Y_0 + l_n)n^{\gamma_i} < m_1 = (Y_1 + l_n)n^{\gamma_i}$, то для любого $j \geq i$ существует константа $\chi \in (0, \infty)$ такая, что для всех $n \geq n_0$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(m_1, n) = \mathbf{e}_j \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{e}_j) \geq 1 - \chi(Y_1 - Y_0). \quad (20)$$

Доказательство. В силу гипотезы разложимости и условия $m_{j,j} = 1$, влекущего за собой равенство

$$m_{j,j}(\Delta_1) = \frac{\partial H_{\Delta_1}^{(j, N)}(\mathbf{s})}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}} = 1,$$

получаем

$$1 - \frac{\partial H_{\Delta_1}^{(j, N)}(\mathbf{s})}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{H}_{n-m_1}(\mathbf{0})} \leq \sum_{k=j}^N \mathbf{E}[Z_j(\Delta_1)(Z_k(\Delta_1) - \delta_{k,j})] Q_{n-m_1}^{(k, N)}.$$

Вспоминая (11) и (12) и полагая $h = Y_1 - Y_0$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z_j(\Delta_1)Z_k(\Delta_1)]Q_{n-m_1}^{(k,N)} &\leq c_0(n-m_1)^{-1/2^{N-k}}(\Delta_1)^{k-j+1} \\ &\leq c_0(n-m_1)^{-1/2^{N-k}}(hn^{1/2^{N-i}})^{k-j+1} \\ &\leq \chi hn^{-1/2^{N-k}}(n^{1/2^{N-i}})^{k-j+1} \end{aligned}$$

для некоторых констант $0 < c_0 \leq \chi < \infty$. Ввиду неравенств $k \geq j \geq i$ имеем

$$\frac{k-j+1}{2^{N-i}} - \frac{1}{2^{N-k}} = \frac{1}{2^{N-i}}(k-j+1-2^{k-i}) \leq 0.$$

Таким образом,

$$1 - \frac{\partial H_{\Delta_1}^{(j,N)}(\mathbf{s})}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{H}_{n-m_1}(\mathbf{0})} \leq \chi h.$$

Отсюда, используя предыдущую лемму и монотонность функции $Q_r^{(j,N)}$ по r , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{Z}(m_1, n) = \mathbf{e}_j \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{e}_j) &= \frac{Q_{n-m_1}^{(j,N)}}{Q_{n-m_0}^{(j,N)}} \frac{\partial H_{\Delta_1}^{(j,N)}(\mathbf{s})}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{H}_{n-m_1}(\mathbf{0})} \\ &\geq \frac{\partial H_{\Delta_1}^{(j,N)}(\mathbf{s})}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{H}_{n-m_1}(\mathbf{0})} \geq 1 - \chi h. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

3. Плотность. Обозначим через $\mathbf{z}^{(i,i+1)}$ вектор размерности $N-2$, полученный из вектора $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ вычеркиванием координат i и $i+1$, через $\mathbf{z}^{(i)}$ вектор размерности $N-1$, полученный из вектора $\mathbf{z}$ вычеркиванием i -й координаты, а через $\|\mathbf{z}\|$ сумму абсолютных значений координат вектора $\mathbf{z}$.

Пусть $\mathcal{C}_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^N: \|\mathbf{z}^{(i)}\| > 0\}$, $\mathcal{B}_i = \mathbb{Z}_+^N \setminus \mathcal{C}_i$ и

$$\mathcal{C}_{i,i+1} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^N: \|\mathbf{z}^{(i,i+1)}\| > 0 \right\}.$$

Положим $\underline{Z}_i(m) = Z_1(m) + \dots + Z_i(m)$ и пусть

$$\underline{Z}_i(m, n) = \sum_{k=1}^i Z_k(m, n), \quad \overline{Z}_i(m, n) = \sum_{k=i}^N Z_k(m, n).$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначение $\mathbf{P}_n(\mathcal{B})$ вместо $\mathbf{P}(\mathcal{B} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1)$ для любого допустимого события $\mathcal{B}$.

Мы начинаем проверку желаемой плотности допредельных процессов из теорем 1 и 2 с доказательства двух важных лемм.

Пусть $A_i(n) = \{m: n^{\gamma_i} g_n(\gamma_i) \leq m < n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon} g_n(\gamma_{i+1} - \varepsilon)\}$, $\varepsilon \in (0, \gamma_1)$.

Лемма 3. Для любых $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ и $\varepsilon \in (0, \gamma_1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\exists m \in A_i(n): \mathbf{Z}(m, n) \in \mathcal{C}_{i+1}) = 0.$$

Доказательство. Если $m \in A_i(n)$, то

$$\bar{Z}_{i+2}(m, n) \leq \bar{Z}_{i+2}(n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon} g_n(\gamma_{i+1} - \varepsilon), n)$$

и

$$\{\underline{Z}_i(m, n) > 0\} \subseteq \{\underline{Z}_i(m) > 0\} \subseteq \{\underline{Z}_i(n^{\gamma_i} g_n(\gamma_i)) > 0\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\exists m \in A_i(n): \mathbf{Z}(m, n) \in \mathcal{C}_{i+1}) &\leq \mathbf{P}_n(\bar{Z}_{i+2}(n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon} g_n(\gamma_{i+1} - \varepsilon), n) > 0) \\ &\quad + \mathbf{P}_n(\underline{Z}_i(n^{\gamma_i} g_n(\gamma_i)) > 0). \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, мы видим, что первое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к нулю в силу (16), в то время как второе слагаемое равно нулю при $i = 0$ и стремится к нулю при $1 \leq i \leq N-1$ в силу оценок

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\underline{Z}_{i-1}(n^{\gamma_i} g_n(\gamma_i)) > 0) &= \frac{\mathbf{P}(T_i > n^{\gamma_i} g_n(\gamma_i))}{\mathbf{P}(T_N > n)} \\ &\sim \frac{c_{1,i}}{c_{1,N}} \frac{n^{1/2^{N-1}}}{(n^{1/2^{N-i}} g_n(\gamma_i))^{1/2^{i-1}}} = \frac{c_{1,i}}{c_{1,N}} \frac{1}{(g_n(\gamma_i))^{1/2^{i-1}}}, \end{aligned}$$

следующих из (13). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если $N \geq 3$, то для любого $i = 1, 2, \dots, N-1$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\exists m \in [n^{3\gamma_{i-1}}, n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon}]: \mathbf{Z}(m, n) \in \mathcal{C}_{i+1}) = 0.$$

Доказательство. При помощи тех же соображений, что и в доказательстве леммы 3, заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\exists m \in [n^{3\gamma_{i-1}}, n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon}]: \mathbf{Z}(m, n) \in \mathcal{C}_{i+1}) \\ \leq \mathbf{P}_n(\bar{Z}_{i+2}(n^{\gamma_{i+1}-\varepsilon}, n) > 0) + \mathbf{P}_n(\underline{Z}_{i-1}(n^{3\gamma_{i-1}}) > 0). \end{aligned}$$

В силу (16) первое слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, в то время как второе слагаемое при $i = 1$ равно нулю по определению, а при $i \geq 2$ его можно оценить следующим образом:

$$\frac{\mathbf{P}(T_{i-1} > n^{3\gamma_{i-1}})}{\mathbf{P}(T_N > n)} \sim \frac{c_{1,i-1}}{c_{1,N}} \frac{n^{1/2^{N-1}}}{(n^{3/2^{N-i+1}})^{1/2^{i-2}}} \sim \frac{c_{1,i-1}}{c_{1,N}} \frac{1}{n^{1/2^{N-2}}}.$$

Этим завершается доказательство леммы 4.

3.1. Макроскопический взгляд. В этом пункте мы докажем теорему 1, которая описывает макроскопическую структуру генеалогического дерева процесса.

Сходимость конечномерных распределений условного процесса $\{\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n), 0 \leq t < 1 \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1\}$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\{\mathbf{R}(t), 0 \leq t < 1\}$ была установлена в теореме 1 работы [6]. Поэтому мы сконцентрируемся на доказательстве плотности.

Поскольку процесс $\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n)$ имеет целочисленные компоненты, нам необходимо проверить, что для каждого отрезка $A_i = [\gamma_i, \gamma_{i+1} - \varepsilon]$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, выполнено следующее (см. [1, теорема 15.3]):

1) для любого положительного числа η существует число L такое, что

$$\mathbf{P}_n \left(\sup_{t \in A_i} \|\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n)\| > L \right) \leq \eta, \quad n \geq 1; \quad (21)$$

2) для любого положительного числа η существуют $\delta > 0$ и n_0 такие, что для всех $n \geq n_0$

$$\mathbf{P}_n \left(\max \left(\min_{k=1,2} \|\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) - \mathbf{Z}(n^{t_k} g_n(t_k), n)\| \right) \neq 0 \right) \leq \eta \quad (22)$$

(здесь максимум взят по всем $\gamma_i \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq \gamma_{i+1} - \varepsilon$ таким, что $t_2 - t_1 \leq \delta$),

$$\mathbf{P}_n \left(\exists t, s \in [\gamma_i, \gamma_i + \delta]: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \neq \mathbf{Z}(n^s g_n(s), n) \right) \leq \eta \quad (23)$$

и

$$\mathbf{P}_n \left(\exists t, s \in [\gamma_{i+1} - \delta - \varepsilon, \gamma_{i+1} - \varepsilon]: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \neq \mathbf{Z}(n^s g_n(s), n) \right) \leq \eta. \quad (24)$$

Монотонность случайной величины $\|\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n)\|$ по t при фиксированном n существенно упрощает доказательство.

Действительно, в этом случае

$$\mathbf{P}_n \left(\sup_{t \in A_i} \|\mathbf{Z}(n^t g_n(t), n)\| > L \right) \leq \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(n^{1-\varepsilon} g_n(1 - \varepsilon), n)\| > L \right)$$

и (21) следует из сходимости одномерных распределений, установленной в (16) для случая $p = 1$, $i = N - 1$.

Для доказательства (22)–(24) введем события

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i &= \left\{ \forall t \in A_i: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \in \mathcal{B}_{i+1} \right\}, \\ \mathcal{F}_i(a, b) &= \left\{ \exists t, s \in [a, b]: \mathbf{Z}_{i+1}(n^t g_n(t), n) \neq \mathbf{Z}_{i+1}(n^s g_n(s), n) \right\}, \end{aligned}$$

выберем достаточно малое $\delta > 0$ и заметим, что если $[a, b] \subset [\gamma_i, \gamma_{i+1} - \varepsilon]$, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_n(\exists t, s \in [a, b]: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \neq \mathbf{Z}(n^s g_n(s), n)) \\ & \leq \mathbf{P}_n(\exists t \in A_i: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \in \mathcal{C}_{i+1}) + \mathbf{P}_n(\mathcal{D}_i \cap \mathcal{F}_i(\gamma_i, \gamma_{i+1} - \varepsilon)). \end{aligned}$$

В силу леммы 3 первый член в правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Далее, для $i \geq 1$

$$\mathbf{P}_n(\mathcal{D}_i \cap \mathcal{F}_i(\gamma_i, \gamma_{i+1} - \varepsilon)) \leq \mathbf{P}_n(Z_{i+1}(n^{\gamma_i} g_n, n) \neq Z_{i+1}(n^{\gamma_{i+1} - \varepsilon} g_n, n)) \rightarrow 0$$

в силу (16). Это доказывает (23) и (24).

Для проверки справедливости соотношения (22) осталось заметить, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_n\left(\max\left(\min_{k=1,2} \left\| \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) - \mathbf{Z}(n^{t_k} g_n(t_k), n) \right\| \right) \neq 0\right) \\ & \leq \mathbf{P}_n(\exists t, s \in [\gamma_i, \gamma_{i+1} - \varepsilon]: \mathbf{Z}(n^t g_n(t), n) \neq \mathbf{Z}(n^s g_n(s), n)), \end{aligned}$$

и использовать такие же рассуждения, как и раньше. Теорема 1 доказана.

3.2. Микроскопический взгляд. В этом пункте мы опираемся на идеи работы [3] и в связи с этим формулируем частный и слегка модифицированный случай теоремы 6.5.4 из [2], дающий критерий сходимости марковских процессов в топологии Скорохода.

Пусть $\mathbf{K}_n(y)$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность марковских процессов со значениями в $\mathbb{Z}_+^N$, траектории которых принадлежат с вероятностью 1 пространству $D_{[a,b]}(\mathbb{Z}_+^N)$ функций без разрывов второго рода на отрезке $[a, b]$.

Теорема 6. Если конечномерные распределения процессов $\{\mathbf{K}_n(y), a \leq y \leq b\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\{\mathbf{K}(y), a \leq y \leq b\}$ и существует разбиение $\mathbb{Z}_+^N = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ такое, что

$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s-y \leq h} \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} \mathbf{P}(\mathbf{K}_n(s) \neq \mathbf{K}_n(y) \mid \mathbf{K}_n(y) = \mathbf{z}) = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\exists y \in [a, b]: \mathbf{K}_n(y) \in \mathcal{C}) = 0,$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\{\mathbf{K}_n(y), a \leq y \leq b\} \Longrightarrow \{\mathbf{K}(y), a \leq y \leq b\}.$$

В силу леммы 1 закон распределения

$$\mathbf{P}_n(\{\mathbf{Z}(m, n), 0 \leq m \leq n\} \in (\cdot) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0})$$

задает, при каждом фиксированном n , неоднородный марковский ветвящийся процесс. Обозначим через $\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, (\cdot))$ переходные вероятности этого процесса.

Для доказательства плотности распределений процессов

$$\left\{ \left(\mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y < \infty \right) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

нам необходимо построить соответствующее разбиение пространства $\mathbb{Z}_+^N$ и использовать теорему 6 при каждом $[0, b] \subset [0, \infty)$.

Заметим, что если $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N) \leq \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ (где знак неравенства понимается покомпонентно), то

$$\mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{w}; m_1, \{\mathbf{w}\}) \geq \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}).$$

Положим $\mathcal{C}(k) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^N: \|\mathbf{z}\| \leq k\}$,

$$\mathcal{C}_i(k) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^N: z_1 + \dots + z_{i-1} > 0; \|\mathbf{z}\| \leq k\}, \quad \mathcal{J}_i(k) = \mathcal{C}(k) \setminus \mathcal{C}_i(k),$$

зафиксируем $i \in \{1, \dots, N-1\}$ и обозначим $m_j = (Y_j + l_n)n^{\gamma_i}$, $j = 1, 2$.

Лемма 5. *Если справедлива гипотеза А, то для любых фиксированных k и $0 < b < \infty$*

$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 \leq Y_1 - Y_0 \leq h \\ Y_1, Y_0 \in [0, b]}} \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{J}_i(k)} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(m_1; n) \neq \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0; n) = \mathbf{z}) = 0.$$

Доказательство. В силу свойства ветвления, предположения о разложимости исходного процесса и положительности числа потомков у каждой частицы редуцированного процесса, имеем для всех $m_1 \geq m_0$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{J}_i(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}) &= \prod_{j=i}^N (\mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{e}_j; m_1, \{\mathbf{e}_j\}))^{z_j} \\ &\geq \prod_{j=i}^N (\mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{e}_j; m_1, \{\mathbf{e}_j\}))^k. \end{aligned}$$

Используя лемму 2, получаем для $m_0 = (Y_0 + l_n)n^{\gamma_i}$ и $m_1 = (Y_1 + l_n)n^{\gamma_i}$:

$$\inf_{\substack{0 \leq Y_1 - Y_0 \leq h \\ Y_0, Y_1 \in [0, b]}} \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}) \geq (1 - \chi h)^{Nk}. \quad (25)$$

Эта оценка влечет за собой утверждение леммы 5.

Лемма 6. Если $m_j = (Y_j + l_n)n^{\gamma_i}$, $j = 0, 1, 2$, и $0 \leq Y_0 < Y_1 < Y_2$ с $Y_1 - Y_0 \leq h$, то для всех $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(m_1, n) = \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{z}; \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) \\ \geq \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}) \frac{\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k))}{\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) + \chi Nkh}. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(m_1, n) = \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{z}, \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) \\ = \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}) \frac{\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k))}{\mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k))}. \end{aligned}$$

В силу (25)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) &= \sum_{\mathbf{z}'} \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}'\}) \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}'; m_2, \mathcal{C}(k)) \\ &\leq 1 - \mathbf{P}_n(m_0, \mathbf{z}; m_1, \{\mathbf{z}\}) + \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) \\ &\leq 1 - (1 - \chi h)^{Nk} + \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) \\ &\leq \chi Nkh + \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)). \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает необходимое утверждение.

Лемма 7. Если справедлива гипотеза А, то для любых фиксированных k , $0 < b < \infty$ и

$$m_0 = (Y_0 + l_n)n^{\gamma_i}, \quad m_1 = (Y_1 + l_n)n^{\gamma_i}, \quad m_2 = 2bn^{\gamma_i}$$

справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sup_{\substack{0 \leq Y_1 - Y_0 \leq h \\ Y_1, Y_0 \in [0, b]}} \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{J}_i(k)} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(m_1; n) \neq \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0; n) = \mathbf{z}, \\ \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу неравенства (25) и леммы 6 для $m_0 = (Y_0 + l_n)n^{\gamma_i}$ и $m_1 = (Y_1 + l_n)n^{\gamma_i}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(m_1, n) = \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0, n) = \mathbf{z}; \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) \\ \geq (1 - \chi h)^{Nk} \frac{\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k))}{\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) + \chi Nkh}. \end{aligned}$$

Используя предположение о разложимости и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \mathcal{C}(k)) &\geq \mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{z}; m_2, \{\mathbf{z}\}) \\ &= \prod_{j=i}^N (\mathbf{P}_n(m_1, \mathbf{e}_j; m_2, \{\mathbf{e}_j\}))^{z_j} \geq \prod_{j=i}^N \mathbf{P}_n^k(l_n n^{\gamma_i}, \mathbf{e}_j; 2bn^{\gamma_i}, \{\mathbf{e}_j\}). \end{aligned}$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=i}^N \mathbf{P}_n^k(l_n n^{\gamma_i}, \mathbf{e}_j; 2bn^{\gamma_i}, \{\mathbf{e}_j\}) = \mathbf{P}^k(\mathbf{U}_i(2b) = \mathbf{e}_i \mid \mathbf{U}_i(0) = \mathbf{e}_i) = B > 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\substack{0 \leq Y_1 - Y_0 \leq h \\ Y_1, Y_0 \in [0, b]}} \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{J}_i(k)} \mathbf{P}_n \left(\mathbf{Z}(m_1; n) = \mathbf{z} \mid \mathbf{Z}(m_0; n) = \mathbf{z}, \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k \right) \\ \geq (1 - \chi h)^{Nk} \frac{B}{B + \chi N k h}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $h \downarrow 0$, получаем утверждение леммы 7.

Следствие 1. Если выполнены условия леммы 7, то

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{Z}((y + l_n)n^{1/2^{N-i}}, n), 0 \leq y \leq b \mid \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k, \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \right\} \\ \implies \left\{ \mathbf{U}_i(y), 0 \leq y \leq b \mid \|\mathbf{U}_i(2b)\| \leq k \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений следует из соответствующих результатов о сходимости процессов, установленных в пункте 1) теоремы 2 работы [6]. Плотность вытекает из леммы 7 и теоремы 6, если взять $\mathcal{B} = \mathcal{J}_i(k)$, $\mathcal{C} = C_i(k)$ и заметить, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}(l_n n^{\gamma_i}, n) \in \mathcal{C}_i(k) \mid \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\underline{Z}_{i-1}(l_n n^{\gamma_i}) > 0 \mid \|\mathbf{Z}(m_2, n)\| \leq k) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Для $c > b$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n,i}(b; (\cdot)) &= \mathbf{P}_n \left(\{ \mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y \leq b \} \in (\cdot) \right), \\ \mathbf{P}_{n,i}^{(k)}(b, c; (\cdot)) &= \mathbf{P}_n \left(\{ \mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y \leq b \} \in (\cdot) \mid \|\mathbf{Z}(cn^{\gamma_i}, n)\| \leq k \right), \\ \overline{\mathbf{P}}_{n,i}^{(k)}(b, c; (\cdot)) &= \mathbf{P}_n \left(\{ \mathbf{Z}((y + l_n)n^{\gamma_i}, n), 0 \leq y \leq b \} \in (\cdot) \mid \|\mathbf{Z}(cn^{\gamma_i}, n)\| > k \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(b; (\cdot)) &= \mathbf{P}_{R_i} \left(\{ \mathbf{U}_i(y), 0 \leq y \leq b \} \in (\cdot) \right), \\ \mathcal{P}_i^{(k)}(b, c; (\cdot)) &= \mathbf{P}_{R_i} \left(\{ \mathbf{U}_i(y), 0 \leq y \leq b \} \in (\cdot) \mid \|\mathbf{U}_i(c)\| \leq k \right). \end{aligned}$$

Для $0 < b < \infty$ и непрерывной действительной функции ψ на $D_{[0,b]}(\mathbb{Z}_+^N)$ такой, что $|\psi| \leq q < \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \mathbf{P}_{n,i}(b; dx) &= \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(2bn^{\gamma_i}, n)\| > k \right) \int \psi(x) \overline{\mathbf{P}}_{n,i}^{(k)}(b, 2b; dx) \\ &\quad + \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(2bn^{\gamma_i}, n)\| \leq k \right) \int \psi(x) \mathbf{P}_{n,i}^{(k)}(b, 2b; dx). \end{aligned}$$

В силу свойств процесса $\mathbf{U}_i(\cdot)$ для первого слагаемого при $k \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(2bn^{\gamma_i}, n)\| > k \right) \int \psi(x) \overline{\mathbf{P}}_{n,i}^{(k)}(b, 2b; dx) \\ & \leq q \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(2bn^{\gamma_i}, n)\| > k \right) = q \mathbf{P}_{R_i} \left(\|\mathbf{U}_i(2b)\| > k \right) = o(1). \end{aligned}$$

Далее, устремив к бесконечности сначала n , а затем k , получим

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n \left(\|\mathbf{Z}(2bn^{\gamma_i}, n)\| \leq k \right) \int \psi(x) \mathbf{P}_{n,i}^{(k)}(b, 2b; dx) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{R_i} \left(0 < \|\mathbf{U}_i(2b)\| \leq k \right) \int \psi(x) \mathcal{P}_i^{(k)}(b, 2b; dx) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0 < \|\mathbf{U}_i(2b)\| \leq k\}} \psi(x) \mathcal{P}_i(b, 2b; dx) = \int \psi(x) \mathcal{P}_i(b; dx). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi(x) \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}((\cdot + l_n)n^{\gamma_i}, n) \in dx) = \int \psi(x) \mathcal{P}_i(b; dx)$$

для любой непрерывной ограниченной функции ψ на $D_{[0,b]}(\mathbb{Z}_+^N)$, что доказывает пункт 1) теоремы 2.

Доказательство пункта 2) теоремы 2 требует лишь несущественных изменений по сравнению с доказательством соответствующей теоремы работы [3], и мы его опускаем.

4. Доказательство теорем 3 и 4.

Доказательство теоремы 3. Наши рассуждения основаны на следующем простом наблюдении:

$$\{\overline{Z}_1(m, n) = 1\} \Leftrightarrow \{\beta_n \geq m\}.$$

Доказательство пункта 1). Согласно (15) при $m \ll n^{\gamma_1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\overline{Z}_1(m, n) = 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_1(m, n) = 1) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\overline{Z}_2(m, n) = 1) = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Доказательство пункта 2). Заметим, что в силу (17)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\beta_n \geq yn^{\gamma_i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\overline{Z}_1(yn^{\gamma_i}, n) = 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_i(yn^{\gamma_i}, n) + Z_{i+1}(yn^{\gamma_i}, n) = 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_i(yn^{\gamma_i}, n) = 1; Z_{i+1}(yn^{\gamma_i}, n) = 0) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_i(yn^{\gamma_i}, n) = 0; Z_{i+1}(yn^{\gamma_i}, n) = 1) \\ &= - \frac{\partial(\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}))^{1/2^{i-1}}}{\partial s_i} \Big|_{s_i=s_{i+1}=0} - \frac{\partial(\varphi_i(y; s_i, s_{i+1}))^{1/2^{i-1}}}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s_i=s_{i+1}=0}. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают (см. (14)), что

$$-\frac{\partial \varphi_i(y; s_i, s_{i+1})}{\partial s_i} \Big|_{s_i=s_{i+1}=0} = \frac{1 - \tanh(yb_i c_{i,N})}{1 + \tanh(yb_i c_{i,N})} = e^{-2yb_i c_{i,N}}$$

и

$$-\frac{\partial \varphi_i(y; s_i, s_{i+1})}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s_i=s_{i+1}=0} = \frac{\tanh(yb_i c_{i,N})}{1 + \tanh(yb_i c_{i,N})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2yb_i c_{i,N}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_i(yn^{\gamma_i}, n) = 1) &= \frac{1}{2^{i-1}} e^{-2yb_i c_{i,N}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(Z_{i+1}(yn^{\gamma_i}, n) = 1) &= \frac{1}{2^i} (1 - e^{-2yb_i c_{i,N}}). \end{aligned}$$

Комбинируя предыдущие оценки, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\beta_n \leq yn^{\gamma_i}) = 1 - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^i} e^{-2yb_i c_{i,N}}.$$

Доказательство пункта 3). Это утверждение очевидно.

Доказательство пункта 4). Необходимый результат следует из соотношения (18) и равенства

$$-\frac{\partial}{\partial s_N} \left(\frac{1}{x + (1-x)/(1-s_N)} \right)^{2^{-(N-1)}} \Big|_{s_N=0} = \frac{1}{2^{N-1}} (1-x).$$

Доказательство теоремы 4. Мы рассмотрим только случай $N \geq 4$ и $i \in \{2, 3, \dots, N-2\}$. Для $N = 2, 3$ или $N \geq 4$ и $i \in \{1, N-1\}$ некоторые из появляющихся ниже случайных величин (событий) не существуют (пусты) и необходимые аргументы становятся короче.

Прежде всего заметим, что $\mathbf{P}_n(\beta_n < m) = \mathbf{P}_n(\mathbf{Z}_1(m, n) \geq 2)$, поскольку суммарное число частиц всех типов в редуцированном процессе не убывает от поколения к поколению. Положим $m_i = n^{\gamma_i(1+\gamma_i)}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и введем множество $\mathcal{H}_i = \{m: m_{i-1} \leq m \leq m_i\}$.

В силу (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\zeta_n = i; \beta_n > m_i) &\leq \mathbf{P}_n(\exists k > m_i: Z_i(k, n) > 0) \\ &\leq \mathbf{P}_n(\exists k > m_i: Z_i(k) > 0) \leq \mathbf{P}_n(Z_i(m_i) > 0) \\ &\leq \frac{\mathbf{P}(T_i > m_i)}{\mathbf{P}(T_N > n)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{26}$$

Далее, по определению $\{Z_i(k, n) = 1; \underline{Z}_{i-1}(k, n) + \bar{Z}_{i+1}(k, n) = 0\} = \{\mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i\}$. Так как случайная последовательность $\bar{Z}_j(k, n)$, $k \leq n$,

не убывает по k для каждого фиксированного n , а частицы типа j могут производить потомков только типов, имеющих номера, не меньшие чем j , то

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n(\zeta_n = i; \beta_n < m_{i-1}) &= \sum_{k=0}^{m_{i-1}-1} \mathbf{P}_n(\zeta_n = i; \beta_n = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{m_{i-1}-1} \mathbf{P}_n \left(Z_i(k, n) = 1; \underline{Z}_{i-1}(k, n) + \overline{Z}_{i+1}(k, n) = 0; \overline{Z}_i(k+1, n) \geq 2 \right) \\
 &\leq m_{i-1} \max_{0 \leq k < m_{i-1}} \mathbf{P}_n \left(\mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i; \overline{Z}_i(k+1, n) \geq 2 \right) \\
 &\leq m_{i-1} \max_{0 \leq k < m_{i-1}} \mathbf{P}_n \left(\overline{Z}_i(k+1, n) \geq 2 \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i \right).
 \end{aligned}$$

Ввиду (19) и равенства $H_1^{(i,N)}(\mathbf{s}) = h_i(\mathbf{s})$ (см. (1)) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(k+1, n)} \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i \right] &= 1 - \frac{1 - H_1^{(i,N)}(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-k-1})}{Q_{n-k}^{(i,N)}} \\
 &= 1 - \frac{1 - h_i(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{s}) \otimes \mathbf{Q}_{n-k-1})}{Q_{n-k}^{(i,N)}}
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} \left[s_i^{Z_i(k+1, n)} \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i \right] = 1 - \frac{1 - h_i(1 - (1 - s_i)Q_{n-k-1}^{(i,N)}; \mathbf{1}^{(N-i)})}{Q_{n-k}^{(i,N)}},$$

что в силу неравенства $\mathbf{P}_n(\overline{Z}_i(k+1, n) = 1 \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i) \geq \mathbf{P}_n(Z_i(k+1, n) = 1 \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i)$ дает

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}_n(\overline{Z}_i(k+1, n) = 1 \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i) \\
 &\geq \frac{1}{Q_{n-k}^{(i,N)}} \frac{dh_i(1 - (1 - s_i)Q_{n-k-1}^{(i,N)}; \mathbf{1}^{(N-i)})}{ds_i} \Big|_{s_i=0} \\
 &= \frac{Q_{n-k-1}^{(i,N)}}{Q_{n-k}^{(i,N)}} h'_i \left(1 - Q_{n-k-1}^{(i,N)}; \mathbf{1}^{(N-i)} \right) \geq \frac{Q_{n-k-1}^{(i,N)}}{Q_{n-k}^{(i,N)}} \left(1 - 2b_i Q_{n-k-1}^{(i,N)} \right) \\
 &\geq 1 - 2b_i Q_{n-k-1}^{(i,N)} \geq 1 - 2b_i Q_{n-m_{i-1}}^{(i,N)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{0 \leq k < m_{i-1}} \mathbf{P}_n(\overline{Z}_i(k+1, n) \geq 2 \mid \mathbf{Z}(k, n) = \mathbf{e}_i) \leq 2b_i Q_{n-m_{i-1}}^{(i,N)}.$$

Отсюда, учитывая (12), выводим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n(\zeta_n = i; \beta_n < m_{i-1}) &\leq 2b_i m_{i-1} Q_{n-m_{i-1}}^{(i,N)} \\
 &= O \left(n^{\gamma_{i-1}(1+\gamma_{i-1})} n^{-\gamma_i} \right) = o(1).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Используя (26) и (27), заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n(\zeta_n = i) &= \mathbf{P}_n(\zeta_n = i; \beta_n \in \mathcal{H}_i) + o(1) \\ &= \mathbf{P}_n(\beta_n \in \mathcal{H}_i) - \mathbf{P}_n(\zeta_n \neq i; \beta_n \in \mathcal{H}_i) + o(1).\end{aligned}$$

Далее, в силу теоремы 1

$$\mathbf{P}_n(\zeta_n \neq i; \beta_n \in \mathcal{H}_i) = \mathbf{P}_n(\zeta_n = i + 1; \beta_n \in \mathcal{H}_i) + o(1).$$

Применяя теперь (27) с заменой i на $i + 1$, мы видим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n(\zeta_n = i + 1; \beta_n \in \mathcal{H}_i) &\leq \mathbf{P}_n(\zeta_n = i + 1; \beta_n \leq m_i) \\ &\leq 2b_{i+1}m_i Q_{n-m_i}^{(i+1, N)} = O\left(n^{\gamma_i(1+\gamma_i)}n^{-\gamma_{i+1}}\right) = o(1).\end{aligned}$$

Суммируя доказанные ранее оценки, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}_n(\zeta_n = i) = \mathbf{P}_n(\beta_n \in \mathcal{H}_i) + o(1).$$

Это с учетом (9) дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\zeta_n = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\beta_n \in \mathcal{H}_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(n^{\gamma_i} \ll \beta_n \ll n^{\gamma_{i+1}}) = \frac{1}{2^i},$$

что и требовалось.

Наконец,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\zeta_n = N) = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
3. Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton-Watson processes. — Math. Nachr., 1977, v. 79, p. 233–241.
4. Foster J., Ney P. Decomposable critical multi-type branching processes. — Sankhyā A, 1976, v. 38, № 1, p. 28–37.
5. Foster J., Ney P. Limit laws for decomposable critical branching processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1978, v. 46, № 1, p. 13–43.
6. Ватутин В. А. Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. I. Конечномерные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 4, с. 667–692.
7. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 2, с. 271–300.

Поступила в редакцию
18.III.2014