Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Артёмов, Е. В. Бурнаев, Оптимальное оценивание сигнала, наблюдаемого во фрактальном гауссовском шуме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 1, 163–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:44:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2015 г.

АРТЕМОВ А. В.*, БУРНАЕВ Е. В.**

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО ВО
ФРАКТАЛЬНОМ ГАУССОВСКОМ ШУМЕ¹⁾

Мы рассматриваем задачу оценивания векторного параметра $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n)^\top$ коэффициента сноса фрактального броуновского движения. Коэффициент сноса представляется в виде разложения $\sum_{i=0}^n \theta_i \varphi_i(t)$ по конечному числу известных функций $\varphi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$. Для параметров коэффициента сноса получены оценка максимального правдоподобия, а также байесовские оценки для нормального и равномерного априорных распределений.

Ключевые слова и фразы: фрактальное броуновское движение, оценка максимума правдоподобия, байесовская оценка, последовательное оценивание, оптимальная остановка.

1. Постановка задачи. Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ задан случайный процесс $\xi = (\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$, имеющий представление

$$\xi_t = a(t) + \sigma(t)B_t^H, \quad (1)$$

где $B^H = (B_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ — фрактальное броуновское движение с параметром $H \in (0, 1)$, а коэффициенты сноса $a(t)$ и диффузии $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям $\int_0^T |a(t)| dt < \infty$ и $\int_0^T |\sigma(t)|^2 dt < \infty$ соответственно, причем функция $\sigma(t)$ предполагается известной. Пусть коэффициент сноса $a(t)$ представим в виде разложения

$$a(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i \varphi_i(t) \quad (2)$$

по заданной системе функций $\varphi_i(t)$, таких, что $\int_0^T |\varphi_i(t)| dt < \infty$, $i = 0, \dots, n$, а параметры θ_i , $i = 0, \dots, n$, неизвестны. Для краткости примем векторные обозначения $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n)^\top$, $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t))^\top$, тогда

$$a(t) = \theta^\top \varphi(t). \quad (3)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Лаборатория математического моделирования сложных естественных и инженерных систем, Москва, Россия; Yandex Data Factory, Москва, Россия; e-mail: artemov@physics.msu.ru

** Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия; ООО ДАТАДВАНС, Москва, Россия; Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия; e-mail: burnaev@iitp.ru

¹⁾ Исследование выполнено в ИППИ РАН исключительно за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Мы рассматриваем задачу нахождения последовательной оценки значения θ по наблюдениям $\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\}$, доступным до момента времени t . В качестве таких последовательных оценок мы используем оценку максимального правдоподобия и байесовскую оценку.

В случае оценки максимального правдоподобия θ считается неизвестным детерминированным вектором параметров и требуется отыскать оценку $\hat{\theta}_{\text{ML}} = \hat{\theta}_{\text{ML}}(t)$, максимизирующую правдоподобие соответствующего наблюдаемого процесса.

В случае байесовской оценки мы предполагаем, что θ — случайный вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющий известное априорное распределение $p^\theta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, и рассматриваем задачу нахождения последовательного правила оценивания $\delta_{\text{BAYES}} = (\tau_{\text{BAYES}}, \hat{\theta}_{\text{BAYES}})$, такого, что

$$\inf_{\delta \in \mathbb{D}} \mathbf{E} \left[c\tau + \|\theta - \hat{\theta}\|^2 \right] = \mathbf{E} \left[c\tau_{\text{BAYES}} + \|\theta - \hat{\theta}_{\text{BAYES}}\|^2 \right], \quad (4)$$

где $\mathbb{D} = \{\delta: \delta = (\tau, \hat{\theta})\}$ — класс правил оценивания с конечными моментами остановки $\tau \leq T < \infty$ относительно фильтрации $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\})$, а $c > 0$ — заданная постоянная, интерпретируемая как плата за длительность наблюдений. Байесовская стратегия последовательного оценивания θ заключается в том, что наблюдения останавливаются в момент τ_{BAYES} , и $\hat{\theta}_{\text{BAYES}}$ принимается оптимальной оценкой значения θ .

Отметим, что задача выделения детерминированного сигнала на фоне фрактального гауссовского шума малоизучена в литературе, посвященной теории оптимального оценивания. В единственной известной авторам работе [1] получена оптимальная байесовская оценка для параметра μ линейного сноса $a(t) = \mu t$ фрактального броуновского движения в предположении, что μ — нормально распределенная случайная величина с известными математическим ожиданием и дисперсией.

2. Фрактальное броуновское движение. Процесс фрактального броуновского движения был впервые рассмотрен Колмогоровым [7] и позднее был конструктивно задан Мандельбротом [4]. Здесь и далее мы используем обозначения из статьи [3].

Стандартное фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ на $[0, T]$ с параметром $H \in (0, 1)$ — это гауссовский процесс с непрерывными траекториями, такой, что

$$B_0^H = 0, \quad \mathbf{E} B_t^H = 0, \quad \mathbf{E} B_s^H B_t^H = \frac{1}{2} \left(s^{2H} - t^{2H} + |t - s|^{2H} \right).$$

В случае, когда $H = 1/2$, фрактальное броуновское движение является обыкновенным броуновским движением, в случае же $H \neq 1/2$ процесс B^H не является мартингалом. Известно следующее интегральное преобразование процесса B^H , результатом которого является мартингал. Обозначим для $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned} \kappa_H &= 2H\Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + H\right), \quad k_H(t, s) = \kappa_H^{-1} s^{1/2-H} (t-s)^{1/2-H}, \\ \lambda_H &= \frac{2H\Gamma(3-2H)\Gamma(1/2+H)}{\Gamma(3/2-H)}, \quad w_H(t) = \lambda_H^{-1} t^{2-2H}, \\ dw_t^H &= d(w_H(t)) = \lambda_H^{-1} (2-2H)t^{1-2H} dt, \end{aligned} \quad (5)$$

и определим процесс $M^H = (M_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ согласно формуле

$$M_t^H \equiv \int_0^t k_H(t, s) dB_s^H.$$

Так заданный процесс M_t^H является гауссовским мартингалом, причем его квадратическая вариация $\langle M_t^H \rangle$ равна $w_H(t)$ (см. [3], [6]). Для дальнейшего удобства определим также процесс $m^H = (m_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ соотношением $m_t^H = M_t^H / w_H(t)$.

3. Теорема Гирсанова для фрактального броуновского движения. Приведем результат, относящийся к структуре процесса правдоподобия для фрактального броуновского движения со сносом [3]. Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ задан процесс $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$, стохастический дифференциал которого удовлетворяет соотношению

$$dY_t = C(t) dt + D(t) dB_t^H,$$

где $B^H = (B_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ — фрактальное броуновское движение с параметром $H \in (0, 1)$, а детерминированные функции $C(t)$ и $D(t)$ таковы, что функция $Q_H(t)$, задаваемая соотношением

$$Q_H(t) = \frac{d}{dw_t^H} \int_0^t k_H(t, s) D^{-1}(s) C(s) ds, \quad (6)$$

корректно определена. В последнем соотношении дифференцирование по величине dw_t^H понимается в смысле следующей операции

$$\frac{df(t)}{dw_t^H} \equiv \frac{\lambda_H}{2 - 2H} t^{2H-1} \frac{df(t)}{dt}.$$

Задание функции $Q_H(t)$ позволяет сформулировать аналог теоремы Гирсанова для процесса Y .

Теорема 1 (см. [3]). Пусть $Q_H(t)$ принадлежит $L^2([0, T], dw_t^H)$, где величина dw_t^H определена в (5). Зададим случайный процесс $\Lambda^H = (\Lambda_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ соотношением

$$\Lambda_t^H = \exp \left\{ \int_0^t Q_H(s) dM_s^H - \frac{1}{2} \int_0^t (Q_H(s))^2 dw_s^H \right\}. \quad (7)$$

Тогда $\mathbf{E} \Lambda_t^H = 1$ и распределение процесса Y по мере $\mathbf{P}^Y = \Lambda_t^H \mathbf{P}$ совпадает с распределением процесса $\int_0^t D(s) dB_s^H$ по мере $\mathbf{P}$.

Случайный процесс Λ^H называется процессом правдоподобия или производной Радона–Никодима $d\mathbf{P}^Y/d\mathbf{P}$ меры $\mathbf{P}^Y$ по мере $\mathbf{P}$.

4. Оценка максимального правдоподобия параметра сноса. Рассмотрим задачу отыскания оценки максимального правдоподобия для параметра θ коэффициента сноса $a(t)$ в (1). Согласно (1), (2) процесс ξ_t удовлетворяет уравнению

$$\xi_t = \sum_{i=0}^n \theta_i \varphi_i(t) + \sigma(t) B_t^H, \quad (8)$$

а его стохастический дифференциал — уравнению

$$d\xi_t = \sum_{i=0}^n \theta_i \varphi_i'(t) dt + \sigma(t) dB_t^H.$$

Структуру процесса правдоподобия и соответствующей оценки описывает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть коэффициент сноса $a(t)$ фрактального броуновского движения имеет вид (2), (3). Тогда оценка $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ максимального правдоподобия параметра θ имеет вид

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \mathbf{R}_H^{-1}(t) \psi_t^H, \quad (9)$$

где компоненты $(n+1)$ -мерного случайного процесса $\psi^H = (\psi_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ и элементы детерминированной матрицы $\mathbf{R}_H(t)$ равны

$$\begin{aligned} (\psi_t^H)_i &= \int_0^t \psi_i(s) dM_s^H, \\ (\mathbf{R}_H(t))_{ij} &= \int_0^t \psi_i(s) \psi_j(s) dw_s^H, \quad i, j = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (10)$$

соответственно, а функции $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, задаются соотношениями

$$\psi_i(t) = \frac{d}{dw_t^H} \int_0^t k_H(t, s) \sigma^{-1}(s) \varphi'_i(s) ds, \quad i = 0, \dots, n. \quad (11)$$

Доказательство. Для функции $Q_H^\theta(t)$, общий вид которой определен в (6), получим

$$Q_H^\theta(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i \frac{d}{dw_t^H} \int_0^t k_H(t, s) \sigma^{-1}(s) \varphi'_i(s) ds = \sum_{i=0}^n \theta_i \psi_i(t),$$

где приняты обозначения (11) для функций $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$. Для процесса правдоподобия Λ^H , общий вид которого записан в (7), имеем

$$\Lambda_t^H(\theta) = \exp \left\{ \sum_{i=0}^n \theta_i \int_0^t \psi_i(s) dM_s^H - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\sum_{i=0}^n \theta_i \psi_i(s) \right)^2 dw_s^H \right\}. \quad (12)$$

Процесс Λ^H определяет производную Радона–Никодима меры, порожденной процессом ξ_s из (8), относительно меры процесса $\xi_s = B_s^H$, $s \leq t$. Формулу (12) можно записать более компактно, используя векторные обозначения:

$$\Lambda_t^H(\theta) = \exp \left\{ \theta^\top \psi_t^H - \frac{1}{2} \theta^\top \mathbf{R}_H(t) \theta \right\}, \quad (13)$$

где компоненты $(n+1)$ -мерного процесса ψ^H и элементы матрицы $\mathbf{R}_H(t)$ заданы соотношениями (10). Используя условие равенства нулю градиента $\nabla_\theta \ln \Lambda_t^H(\theta)$, получим оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_\theta \Lambda_t^H(\theta)$ как решение системы алгебраических уравнений

$$\int_0^t \psi_i(s) dM_s^H - \sum_{j=0}^n \theta_j \int_0^t \psi_i(s) \psi_j(s) dw_s^H = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

или в векторном виде

$$\psi_t^H - \mathbf{R}_H(t) \theta = 0.$$

Если матрица $\mathbf{R}_H(t)$ обратима для каждого t , то решением этой системы является оценка $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ из (9). Теорема доказана.

Следствие 1 (случай полиномиального сноса). Пусть $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0, \dots, n$, а коэффициент диффузии предполагается постоянным: $\sigma(t) = \sigma$. Тогда наблюдаемый процесс имеет структуру $\xi_t = \sum_{i=0}^n \theta_i t^i + \sigma B_t^H$, для функций $\psi_i(t)$ получаем $\psi_i(t) = \beta_H(i) / \sigma t^{i-1}$, $i = 0, \dots, n$, а компоненты векторнозначного процесса ψ^H и элементы матрицы $\mathbf{R}_H(t)$, определенные в (10), равны

$$(\psi_t^H)_i = \frac{\beta_H(i)}{\sigma} \int_0^t s^{i-1} dM_s^H, \quad (\mathbf{R}_H(t))_{ij} = \frac{\alpha_H(i, j)}{\sigma^2} t^{i+j-2H}$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} \alpha_H(i, j) &= \lambda_H^{-1} \beta_H(i) \beta_H(j) \frac{2-2H}{i+j-2H}, \\ \beta_H(i) &= i \frac{2-2H+i-1}{2-2H} \frac{\Gamma(3-2H)}{\Gamma(3-2H+i-1)} \frac{\Gamma(3/2-H+i-1)}{\Gamma(3/2-H)}, \quad i, j = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Оценка $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ получается решением системы $\psi_t^H - \mathbf{R}_H(t) \theta = 0$.

Отметим, что в случае $n = 1$ наблюдаемый процесс удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $d\xi_t = \theta_1 dt + \sigma dB_t^H$, а выражение для процесса

правдоподобия имеет вид $\Lambda_t^H(\theta) = \exp\{\theta_1 \sigma^{-1} M_t^H - \theta_1^2 \sigma^{-2} \lambda_H^{-1} t^{2-2H}/2\}$, поэтому оценка максимального правдоподобия $(\hat{\theta}_1)_{\text{ML}}$ для θ_1 имеет вид

$$(\hat{\theta}_1)_{\text{ML}} = \frac{\sigma M_t^H}{w_H(t)}. \quad (14)$$

Этот результат (при $\sigma = 1$) получен в [6].

5. Байесовская оценка параметра сноса. Рассмотрим задачу отыскания байесовской оценки параметра $\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$, имеющего априорное распределение $\mathbf{P}^\theta$ с плотностью $p^\theta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Согласно обобщенной формуле Байеса (см. [1], [8]) условная плотность распределения θ при условии наблюдений $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\})$ за процессом ξ выражается в виде

$$\begin{aligned} p^\theta(\mathbf{x} | \mathcal{F}_t^\xi) &= \frac{d\mathbf{P}(\theta_0 \leq x_0, \dots, \theta_n \leq x_n | \mathcal{F}_t^\xi)}{dx_0 \cdots dx_n} \\ &= \frac{p^\theta(\mathbf{x}) \Lambda_t^H(\mathbf{x})}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} p^\theta(\mathbf{z}) \Lambda_t^H(\mathbf{z}) d\mathbf{z}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Lambda_t^H(\mathbf{x})$ — процесс правдоподобия, структура которого описана в разделе 4. Далее мы рассмотрим частные случаи, в которых априорное распределение является нормальным и равномерным.

5.1. Случай нормального априорного распределения. Рассмотрим случай нормального априорного распределения. Основной результат настоящего раздела изложен в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть θ — нормальный случайный вектор с математическим ожиданием $\mathbf{m}$ и ковариационной матрицей Σ . Тогда оптимальной в среднем квадратичном байесовской оценкой $\hat{\theta}_{\text{BAYES}}$ значения θ является апостериорное среднее

$$\hat{\theta}_{\text{BAYES}} = \mathbf{E}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi] = (\mathbf{R}_H(t) + \Sigma^{-1})^{-1}(\psi_t^H + \Sigma^{-1}\mathbf{m}). \quad (16)$$

Величина условной среднеквадратичной ошибки оценивания $\mathbf{E}(\|\theta - \hat{\theta}_{\text{BAYES}}\|^2 | \mathcal{F}_t^\xi)$ определяется следом условной ковариационной матрицей

$$\text{cov}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi] = (\mathbf{R}_H(t) + \Sigma^{-1})^{-1}. \quad (17)$$

Доказательство. Хорошо известно, что наилучшей в среднеквадратичном оценкой значения вектора θ при условии наблюдений $\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\}$ является условное математическое ожидание $\mathbf{E}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi]$, при этом величина среднеквадратичной погрешности оценивания равна следу условной ковариационной матрицы $\text{cov}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi]$. Как будет показано ниже, для случая нормального априорного распределения эти величины легко подсчитать.

Используя формулы (13) и (15) и учитывая, что плотность нормального случайного вектора $p^\theta(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-(n+1)/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\{-(\mathbf{x} - \mathbf{m})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})/2\}$, для условного распределения θ при условии наблюдений $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\})$ получаем

$$\begin{aligned} p^\theta(\mathbf{x} | \mathcal{F}_t^\xi) &= g(\mathbf{x}) / \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(\mathbf{z}) d^n \mathbf{z}, \\ g(\mathbf{x}) &= \exp \left\{ \mathbf{x}^\top (\psi_t^H + \Sigma^{-1}\mathbf{m}) - \mathbf{x}^\top (\mathbf{R}_H(t) + \Sigma^{-1}) \mathbf{x} / 2 \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь известной формулой

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{b} \right\} d^n \mathbf{x} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det \mathbf{A}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right\},$$

последнее выражение преобразуем к виду

$$p^{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x} | \mathcal{F}_t^\xi) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{(2\pi)^{n+1}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \right\},$$

где детерминированная матрица $\mathbf{A} = \mathbf{A}_H(t)$ и $(n+1)$ -мерный случайный процесс $\mathbf{b}^H = (\mathbf{b}_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ задаются соотношениями $\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_t^H = \boldsymbol{\psi}_t^H + \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{m}$ соответственно. Таким образом, условная плотность

$$p^{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x} | \mathcal{F}_t^\xi) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{(2\pi)^{n+1}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \right\}$$

является многомерной нормальной со средним и ковариационной матрицей

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\boldsymbol{\theta} | \mathcal{F}_t^\xi] &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = (\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\psi}_t^H + \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{m}), \\ \text{cov}[\boldsymbol{\theta} | \mathcal{F}_t^\xi] &= \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

соответственно. Величина $\mathbf{E}(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{BAYES}}\|^2 | \mathcal{F}_t^\xi)$ условной среднеквадратичной ошибки оценивания при этом равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{BAYES}}\|^2 | \mathcal{F}_t^\xi) &= \mathbf{E} \left[\text{tr}((\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1}) \right] \\ &= \text{tr}((\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда оптимальный момент остановки в задаче (4) детерминирован.

Доказательство. Действительно, для определения оптимального момента остановки τ_{BAYES} необходимо решить следующую задачу оптимальной остановки:

$$\tau_{\text{BAYES}} = \arg \inf_{\tau \in \mathbb{D}} \mathbf{E} \left[c\tau + \mathbf{E}(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{BAYES}}\|^2 | \mathcal{F}_\tau^\xi) \right] = \arg \inf_{t \in [0, T]} F_H(t),$$

где функция

$$F_H(t) = ct + \mathbf{E}(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{BAYES}}\|^2 | \mathcal{F}_t^\xi) = ct + \text{tr}((\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1}), \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

детерминирована.

Следствие 3 (случай полиномиального сноса). Пусть $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0, \dots, n$, коэффициент диффузии $\sigma(t) = \sigma$ постоянен, а матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ — диагональная (координаты вектора $\boldsymbol{\theta}$ независимы). Тогда функция $F_H(t)$ из (18) имеет единственный минимум при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Действительно, пусть $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\gamma_0^2, \dots, \gamma_n^2)$, где γ_i^2 — дисперсия координаты θ_i , $i = 0, \dots, n$. Тогда след условной ковариационной матрицы равен

$$\text{tr}((\mathbf{R}_H(t) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1}) = \prod_{i=0}^n \left(\frac{\alpha_H(i, i) t^{2i-2H}}{\sigma^4} + \gamma_i^{-2} \right)^{-1}$$

и является строго убывающей функцией при $t > 0$. Поэтому $F_H(t)$ в (18) является суммой строго возрастающей и строго убывающей функций и имеет при $t \in [0, T]$ минимум, и притом единственный.

Аналогичный результат известен для случая линейного сноса $a(t) = \mu t$ [1]. Для случая квадратичного сноса и значений $H = 0.2, c = 0.02$ график функции $F_H(t)$ представлен на рис. 1.

Рис. 1. Значения функции потерь $F_H(t)$ при $n = 2$, $H = 0.2$, $c = 0.02$.

Заметим, что если наблюдаемый процесс удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению с линейным сносом $d\xi_t = \theta_1 dt + \sigma dB_t^H$, в котором θ_1 — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией γ^2 , то условная плотность распределения θ_1 является нормальной:

$$p^{\theta_1}(x | \mathcal{F}_t^\xi) = \sqrt{\frac{w_H(t)/\sigma^2 + 1/\gamma^2}{2\pi}} \exp \left\{ - \left(x - \frac{M_t^H/\sigma + m/\gamma^2}{w_H(t)/\sigma^2 + 1/\gamma^2} \right)^2 \frac{w_H(t)/\sigma^2 + 1/\gamma^2}{2} \right\},$$

а байесовская оценка $(\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}} = \mathbf{E}[\theta_1 | \mathcal{F}_t^\xi]$ параметра θ_1 и условная среднеквадратичная погрешность оценивания $\mathbf{E}[(\theta_1 - (\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}})^2 | \mathcal{F}_t^\xi]$ задаются соотношениями

$$(\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}} = \frac{M_t^H/\sigma + m/\gamma^2}{w_H(t)/\sigma^2 + 1/\gamma^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[(\theta_1 - (\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}})^2 | \mathcal{F}_t^\xi] = \frac{1}{w_H(t)/\sigma^2 + 1/\gamma^2}$$

соответственно. Этот результат (при $\sigma = 1$) получен Норросом [6].

5.2. Случай равномерного априорного распределения. Рассмотрим задачу отыскания байесовской оценки параметра $\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$ в случае равномерного априорного распределения на $(n+1)$ -мерном параллелепипеде $\mathbf{r} = \prod_{i=0}^n [a_i, b_i]$.

Плотность распределения параметра θ задается соотношением

$$p^\theta(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^n \frac{1}{b_i - a_i} \mathbf{1}_{[a_i, b_i]}(x_i) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{1}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{1}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^n \mathbf{1}_{[a_i, b_i]}(x_i)$, $|\mathbf{r}| = \prod_{i=0}^n (b_i - a_i)$, а плотность условного распределения выражается формулой

$$p^\theta(\mathbf{x} | \mathcal{F}_t^\xi) = \frac{1}{Z_t^H} \mathbf{1}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \exp \left\{ \mathbf{x}^\top \psi_t^H - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{R}_H(t) \mathbf{x} \right\} = \frac{1}{Z_t^H} \mathbf{1}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \Lambda_t^H(\mathbf{x}),$$

где процесс $Z^H = (Z_t^H)_{0 \leq t \leq T}$, задаваемый равенством $Z_t^H = \int_{\mathbf{r}} \Lambda_t^H(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$, играет роль нормировочной постоянной, а процесс правдоподобия $\Lambda_t^H(\mathbf{x})$ задан согласно (12).

Аналитический расчет нормировочного множителя Z_t^H , условных среднего $\mathbf{E}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi]$ и ковариационной матрицы $\text{cov}[\theta | \mathcal{F}_t^\xi]$ в случае произвольного n , вообще говоря, труден (соответствующий подсчет может быть выполнен численно, например, с использованием алгоритма, предложенного в [2]). Остановимся на расчете оценки для важного частного случая линейного сноса, в котором наблюдаемый процесс ξ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \theta_1 dt + \sigma dB_t^H, \quad (19)$$

где $\theta_1 \sim U(a, b)$. Результат подсчета в этой задаче составляет следующая теорема.

Теорема 4. Пусть в (19) θ_1 — равномерно распределенная на $[a, b]$ случайная величина, не зависящая от B_t^H . Тогда оптимальная в среднеквадратичном байесовская оценка параметра θ_1 имеет вид

$$(\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}} = m_t^H + [Z_t^H w_H(t)]^{-1} [\Lambda_t^H(a) - \Lambda_t^H(b)], \quad (20)$$

а условная среднеквадратичная погрешность оценивания равна

$$\begin{aligned}\gamma_t^H &= \mathbf{E} \left((\theta_1 - (\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}})^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi \right) \\ &= [w_H(t)]^{-1} + [Z_H(t)w_H(t)]^{-1} [\Lambda_t^H(a)(a - m_t^H) - \Lambda_t^H(b)(b - m_t^H)] \\ &\quad - [Z_H(t)w_H(t)]^{-2} [\Lambda_t^H(a) - \Lambda_t^H(b)]^2,\end{aligned}\quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}Z_t^H &= \sqrt{\frac{2\pi}{w_H(t)}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (m_t^H)^2 w_H(t) \right\} C_t^H, \\ C_t^H &= \Phi \left((b - m_t^H) \sqrt{w_H(t)} \right) - \Phi \left((a - m_t^H) \sqrt{w_H(t)} \right).\end{aligned}\quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условное распределение $p^{\theta_1}(x \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ легко подсчитать прямым вычислением, оно выражается формулой

$$p^{\theta_1}(x \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \frac{1}{Z_t^H} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \exp \left\{ w_H(t) \left(x m_t^H - \frac{x^2}{2} \right) \right\},$$

где процесс Z^H определен согласно (22). Условные среднее и дисперсия получаются прямым вычислением соответствующих интегралов. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько асимптотических свойств полученного байесовского фильтра (20).

При $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ (т.е. в случае априори произвольного θ_1) байесовская оценка в (20) совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Действительно, так как $\Lambda_t^H(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то второе слагаемое в (20) стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, и $(\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}} \rightarrow m_t^H$.

При $t \rightarrow \infty$ байесовская оценка в (20) также совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Действительно, так как $w_H(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то второй член в (20) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, и $(\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}} \rightarrow m_t^H$.

Рассмотрим задачу отыскания оптимального момента остановки в (4). Функция штрафа в этой задаче задается выражением

$$\mathbf{E} \left[c\tau + \mathbf{E} \left((\theta_1 - (\hat{\theta}_1)_{\text{BAYES}})^2 \mid \mathcal{F}_\tau^\xi \right) \right] = \mathbf{E} [c\tau + \gamma_\tau^H],$$

где случайный процесс $\gamma^H = (\gamma_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ задается соотношением (21). Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется $\gamma_t^H \rightarrow 0$. Для определения оптимального момента остановки необходимо найти

$$\tau_{\text{BAYES}} = \arg \inf_{\tau} \mathbf{E} [c\tau + \gamma_\tau^H]. \quad (23)$$

В силу громоздкости формул (20), (21) и (22) не представляется возможным найти для τ_{BAYES} из (23) аналитическое описание (см. подходы в [5]), возможно лишь только численное оценивание этого момента остановки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Çetin U., Novikov A., Shiryaev A. N. Bayesian sequential estimation of a drift of fractional Brownian motion. — Sequential Analysis, 2013, v. 32, № 3, p. 288–296.
2. Genz A. Numerical computation of multivariate normal probabilities. — J. Comput. Graph. Statist., 1992, v. 1, № 2, p. 141–149.
3. Kleptsyna M. L., Le Breton A., Roubaud M.-C. Parameter estimation and optimal filtering for fractional type stochastic systems. — Statist. Inference Stochastic Processes, 2000, v. 3, № 1–2, p. 173–182.

4. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fraxtional noises and applications. — SIAM Rev., 1968, v. 10, № 4, p. 422–437.
5. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. ETH Zürich: Springer, 2006, 502 p.
6. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. — Bernoulli, 1999, v. 5, № 4, p. 571–587.
7. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, с. 115–118.
8. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974, 696 с.

Поступила в редакцию
12.II.2015

© 2015 г.

АФАНАСЬЕВА Л. Г.* , БАШТОВА Е. Е.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕГЕНЕРИРУЮЩИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ¹⁾

Рассматривается одноканальная система обслуживания с неограниченной очередью и регенерирующим входящим потоком. Получены условия, при которых существует ненулевой логарифмический предел для вероятностей больших отклонений времени ожидания в стационарном режиме. Показано, что асимптотическое поведение большой очереди в стационарном режиме определяется совместным распределением периода регенерации входящего потока и числа требований, поступивших за этот период, и не зависит от распределения моментов поступления требований на периоде регенерации.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, регенерирующий поток, время ожидания.

1. Введение. Вопросам больших отклонений для распределений функционалов, заданных на траекториях случайных процессов, в частности случайных блужданий, цепей Маркова и процессов восстановления, посвящена обширная литература (см., например, [2], [7], [8], [10], [11] и библиографию в этих работах). Как отмечено в [8], для теории очередей эти вопросы важны не только в теоретическом плане, но и с прикладной точки зрения. Оценка вероятности неприемлемо большой очереди, например, в системе $G|G|r|\infty$ позволяет обосновать необходимость принятия тех или иных организационных решений (таких как добавление прибора, увеличение скорости обслуживания, установка буфера конечного объема и т.п.).

Мы рассматриваем одноканальную систему обслуживания с регенерирующим входящим потоком, являющимся обобщением многих процессов, обычно используемых в теории массового обслуживания для описания входящих потоков. Основная цель исследования — определение условий, при которых существует ненулевой логарифмический предел для вероятностей больших отклонений виртуального времени ожидания $W(t)$ в стационарном режиме. Рассматриваются также время ожидания

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: afanas@mech.math.msu.su; bashtovaelena@rambler.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00653).